Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

Aufgaben

1. Löse Beispiel 2 mithilfe des Hauptnenners.

2. a) $\frac{3}{x} + 2 = \frac{9}{x} - 2$ **b)** $2\left(\frac{1}{x} - 7\right) + \left(\frac{5}{x} + 7\right) = 0$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 7 = \frac{8}{x} - 3$ **d)** $\frac{5}{x} - \frac{6}{x} + 1 = \frac{1{,}2}{x}$

3. a) $\frac{4}{x} - \frac{1}{2x} + 2 = \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{5x} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x} - \frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{3} - \frac{13}{x} + \frac{1}{13x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$

d) $\frac{3}{8} + \frac{2}{3x} - \frac{5}{6x} - \frac{13}{15} + \frac{8}{5x} + \frac{11}{12x} = \frac{31}{40}$

4. a) $\frac{6}{x-2} - \frac{3}{x-2} + 3 = 0$ **b)** $\frac{18}{2x-3} + \frac{3}{3-2x} = 5$

5. a) $\frac{2}{1-x} - \frac{3}{5(1-x)} + \frac{5}{4(x-1)} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{5x+2} + \frac{3}{6+15x} = \frac{7}{25x+10}$

c) $\frac{4{,}5}{1-14x} - \frac{7{,}5}{0{,}5-7x} = \frac{69}{28x-2} - 0{,}5$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3x-7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{14-6x} = \frac{3}{7-3x}$

6. a) $\frac{8}{x+3} - \frac{1}{7-x} = \frac{4}{x+3}$ **b)** $\frac{15}{8-x} - \frac{7}{8+x} - \frac{6}{8-x} = 0$

c) $\frac{7}{2x+3} + \frac{11}{3x+2} - \frac{33}{2(2+3x)} = 0$ **d)** $\frac{68}{3(2x-5)} + \frac{51}{5-2x} + \frac{30}{x} = 0$

7. a) $\frac{8}{6x-9} - \frac{35}{10x+4} = \frac{2}{2x-3}$ **b)** $\frac{21}{15x-4} - \frac{42}{8-30x} = \frac{138}{45x-6}$

c) $\frac{27}{2x+11} - \frac{1}{2x-11} - \frac{72}{11+2x} = \frac{2}{11-2x}$

8. a) $\frac{18}{5x+6} + \frac{1}{10x-3} - \frac{8}{x+1{,}2} + \frac{1}{x-0{,}3} = 0$

b) $\frac{13}{3x-11} - \frac{13}{4x+5} - \frac{13}{12x+15} = 0$

c) $\frac{1}{x-7} + \frac{2}{14-2x} + \frac{3}{2x-5} = \frac{21}{14x-35}$

d) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{30}{x^2-1}$

9. a) $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-3} + \frac{2}{4x^2-9} = 0$

b) $\frac{5}{5x+4} + \frac{2}{5x-4} + \frac{2}{16-25x^2} = 0$

c) $\frac{46}{9x^2-121} + \frac{1}{3x+11} = \frac{23}{11-3x}$

d) $\frac{3}{3x-6} + \frac{1}{2x-4} - \frac{15}{4(x-2)^2} = 0$

10. a) $\frac{38}{x^2+16x+64} - \frac{7}{4x+32} = \frac{3}{x+8}$!

b) $\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+5} + \frac{2}{x^2+4x-5} = 0$!

11. a) $\frac{1}{3x-2} + \frac{7}{2x+3} = \frac{35}{6x^2+5x-6}$!

b) $\frac{3x-5}{x} - \frac{2x}{x+5} = 1$

c) $\frac{5x}{x+3} - \frac{8x}{x+2} + 3 = 0$

12. a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = 2$

b) $\frac{x-2}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} = 3$

c) $\frac{3x-7}{3x+1} - \frac{6x+4}{x+1} + 5 = 0$

d) $\frac{13x+26}{x+2} + \frac{6-2x}{x-3} = 11$

13. a) $\frac{7-6x}{4x+1} + \frac{9x+4}{3x+7} - 1{,}5 = 0$

b) $\frac{5x+7}{3+x} - \frac{12x-4}{9x+3} = \frac{11}{3}$

c) $\frac{x+5}{x} - \frac{4}{1-x} = \frac{x+7}{x-1}$

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x-2} + \frac{3x+1}{3x-6} = 0$

14. a) $\frac{x}{x-3} - \frac{3x+2}{6-2x} = \frac{5x}{2x-1}$

b) $\frac{5x+1}{5x-3} - \frac{3x+16}{2x+18} + \frac{0{,}5x}{x-0{,}6} = 0$

15. $\dfrac{2x-11}{7x+35}+\dfrac{4-3x}{2x+3}+\dfrac{3x+4}{2x+10}=\dfrac{2}{7}$

•**16.** $\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{4x-3}{2-x}-\dfrac{7-6x}{2x-4}+\dfrac{x+5}{0{,}2x+0{,}6}=5$

17. a) $\dfrac{0{,}5x}{2x-3}+\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{x}{4x-6}$ **b)** $\dfrac{x+4}{x+2}+\dfrac{8}{x^2-4}=\dfrac{2x-2}{x-2}$

18. a) $\dfrac{2}{2x-3}+\dfrac{2x+4}{2x+3}-\dfrac{6}{9-4x^2}=0$

b) $\dfrac{11}{x^2-25}+\dfrac{3x-9}{5-x}+\dfrac{2x+28}{3x+15}=0$

•**19.** $\dfrac{x}{4x+10}+\dfrac{10x^2-30x+6}{4x^2-25}-\dfrac{3x-2}{x+2{,}5}+\dfrac{x^2+1}{x^2-6{,}25}=\dfrac{3}{4}$

20. $\dfrac{3x+2}{2x-1}+\dfrac{x+1}{6x+3}=2-\dfrac{4x^2-22x-11}{12x^2-3}$

21. a) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{18}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{25-x}{x-3}+\dfrac{55}{x^2-9}=0$

22. a) $\dfrac{9-x}{2x-3}+\dfrac{3x+4{,}5}{9+6x}+\dfrac{195}{9-4x^2}=0$

b) $\dfrac{5x-3}{x-5}-\dfrac{5x+26}{x-3}=\dfrac{25}{x^2-8x+15}$

23. a) $\dfrac{3x+1}{x-7}+\dfrac{3-3x}{x+7}=\dfrac{177x+7}{4x^2-196}$

b) $\dfrac{9x+4}{3x-12}-\dfrac{12x-3}{4x+16}-\dfrac{50x+25}{2x^2-32}=0$

24. a) $\dfrac{7-7x}{9x^2-30x+25}+\dfrac{8-3x}{9x-15}=\dfrac{4-5x}{15x-25}$

b) $\dfrac{4x+3}{5x-7}-\dfrac{3x+1}{5x+7}=\dfrac{5x^2+x-28}{25x^2-49}$

25. $\dfrac{2x-13}{x-1}+\dfrac{5x+3}{x-8}-\dfrac{7x^2+8}{x^2-9x+8}=0$

26. $\dfrac{6x^2-23x-3}{x^2-2x-15}-\dfrac{10x-15}{x+3}=\dfrac{30-4x}{x-5}$

27. $\dfrac{7x}{3x-8} - \dfrac{20+4x}{3x+8} + \dfrac{3x-35}{18x^2-128} = 1$

28. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{x-3}{x-1} - 2}{\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-1}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{x-2}$

29. $\left(\dfrac{\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2}{3x}}{\dfrac{3x-2}{3}} - \dfrac{3x-5}{2x-3}\right) \cdot 2x = 1 + \dfrac{6x}{2x-3}$

30. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - 2}{\dfrac{x}{3} + 1} + \dfrac{x-1}{x+3} = 1 - \dfrac{2x+5}{x^2+3x}$

31. $\dfrac{\dfrac{2-3x}{x}}{\dfrac{x}{x-1}} + \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+2}{2}} = \dfrac{4+5x}{x^2} - 3$

32. $\dfrac{x}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}} : \dfrac{1}{x^2+2} = x^2 + 1$

33. Aus der *Algebra* des AL-CHARIZMI: Die Differenz zweier Zahlen ist 2. Teilt man die kleinere durch die größere, so erhält man $\frac{1}{2}$. Wie groß sind die Zahlen?

34. Die Summe zweier Zahlen ist 425. Dividiert man die größere durch die kleinere, dann erhält man 2, und es bleibt der Rest 92. Wie heißen die Zahlen?

35. Der Zähler eines Bruchs ist um 12 größer als der Nenner. Zieht man die Ganzen heraus, dann ergibt sich die gemischte Zahl $3 + \frac{2}{x}$. Bestimme x.

36. Hans möchte wissen, wie alt Renate ist. Weil sie weiß, dass er schwach im Rechnen ist, sagt sie: »Wenn du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren vom Kehrwert meines heutigen Alters subtrahierst, dann erhältst du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren.« Wie alt ist Renate heute?

37. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

38. Der holländische Arzt und Mathematiker Reinerus GEMMA FRISIUS (1508–1555) stellte in seinem 1544 in Wittenberg gedruckten *Arithmeticae practicae methodus facilis** folgende Aufgabe (Teil 3, Beispiel 6):
Potator quidam solus exhaurit cadum vini in 20 diebus, verum si uxor eum iuverit servata proportione bibendi 12 diebus vini tantundem absumunt, quanto ergo tempore sola uxor totum vas exhauriet?
Ein Trinker leert einen Krug Wein in 20 Tagen. Wenn seine Ehefrau ihm aber hilft, dann verbrauchen sie ebenso viel Wein in 12 Tagen, falls sie das Verhältnis, in dem sie trinken, beibehalten. In welcher Zeit würde also die Ehefrau allein das ganze Gefäß austrinken?

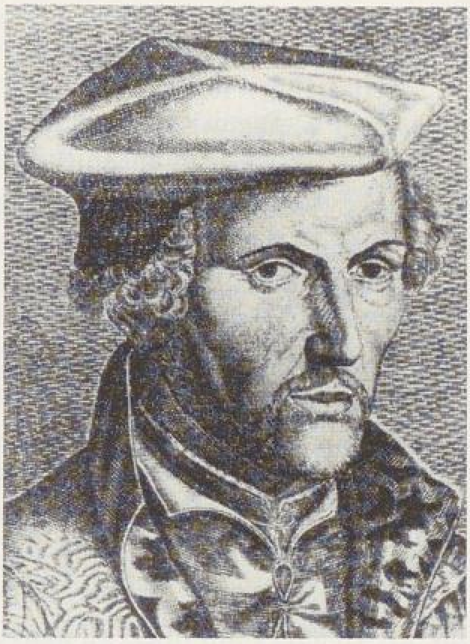

Abb. 67.1 Reinerus GEMMA FRISIUS, eigentlich Rainer VAN DEN STEEN (8.12.1508 Dockum/Ostfriesland – 25.5.1555 Löwen) 1541 Professor der Medizin an der Universität von Löwen

39. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflussröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?

40. Der Kaltwasserhahn füllt eine Badewanne in 10 min. Dreht man zusätzlich den Warmwasserhahn auf, dann dauert es nur 6 min, bis die Wanne voll ist. Wie lange würde es dauern, wenn man die Wanne nur mit dem Warmwasserhahn füllen wollte?

•**41.** Ein Teich wird durch einen Zufluss in 10 Stunden und durch einen zweiten in 5 Stunden gefüllt. Der Abfluss leert ihn in 4 Stunden. Nun werden alle zwei Zuflüsse und der Abfluss gleichzeitig geöffnet. Wie lange dauert es jetzt, bis der Teich voll ist?

•**42.** Ein Dampfkraftwerk ist mit zwei Kesseln von verschiedener Leistungsfähigkeit ausgestattet. Der Inhalt des vollen Kohlenbunkers reicht aus, um den ersten Kessel allein 18 Tage bzw. beide Kessel zusammen $7\frac{1}{5}$ Tage zu beheizen. Wie lange könnte mit derselben Kohlenmenge der zweite Kessel allein betrieben werden?

* »Ein leichter Weg zur Beherrschung der Arithmetik«, geschrieben um 1536, veröffentlicht 1540 in Antwerpen. Das Büchlein war so beliebt, dass es im 16. Jh. mindestens 59 Auflagen erlebte.

43. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

44. Ein Arbeiter würde eine Arbeit in 18 Tagen allein fertigstellen. Nach 8 Tagen erhält er eine Hilfskraft, deshalb ist die Arbeit schon nach insgesamt 14 Tagen fertig. Wie lange hätte die Hilfskraft allein für den Rest der Arbeit gebraucht, wenn der Arbeiter nach 8 Tagen krank geworden wäre?

45. Aus dem *Trattato di aritmetica* (1491) des Filippo CALANDRI (geb. um 1430):
Es sind 3 Männer in einem Gefängnis, die ausbrechen wollen; der erste sagt, dass er in 6 Stunden das Gefängnis aufbrechen werde, der zweite sagt, dass er es in 12 Stunden aufbrechen werde, und der dritte sagt, dass er es in 18 Stunden aufbrechen werde. Die Frage ist, wenn alle 3 zusammenarbeiten, in welcher Zeit sie dann das Gefängnis aufbrechen werden.

46. a) Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{25}$ addiert werden, damit er den Wert $\frac{3}{4}$ erhält?

b) Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{11}{16}$ subtrahiert werden, damit er den Wert $\frac{1}{2}$ erhält?

c) Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{12}{19}$ addiert werden, damit er das arithmetische Mittel zu $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ wird?

• **d)** Um welche Zahl muss man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ **1)** vermehren, **2)** vermindern, um $\frac{c}{d}$ zu erhalten?

• **e)** Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahiert und zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{c}{d}$ addiert werden, damit zwei gleich große Brüche entstehen?

• **47. a)** Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{7}$ um 16 und vermindert seinen Nenner um 5, so erhält man seinen reziproken Wert. Wie heißt der Bruch?

b) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{2}{3}$ um 4 und seinen Nenner um 3, so erhält er den Wert $\frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch?

c) Vermindert man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 8 und vermehrt seinen Nenner um 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Wie heißt er?

d) Ein Bruch mit dem Wert $\frac{5}{6}$ wird doppelt so groß, wenn man seinen Zähler um 5 vermehrt und seinen Nenner um 6 vermindert. Wie heißt der Bruch?

• **48. a)** Vermehrt man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 9 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{37}{30}$ ab, so erhält man $\frac{2}{5}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{5}{6}$ um 5 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{22}{15}$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch hat den Wert $\frac{5}{8}$. Vermehrt man seinen Zähler um 3 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man dasselbe, wie wenn man seinen Zähler um 10 und seinen Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

49. a) Die Zahl 240 wird so in zwei Teile zerlegt, dass der Quotient aus
1) den beiden Teilen gleich $\frac{3}{7}$ ist,
2) dem größeren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{13}{6}$ ist,
3) dem kleineren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{5}{6}$ ist.
Wie groß sind die Teile?

b) Die Zahl 68 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{1}{3}$ des ersten um 12 größer ist als $\frac{1}{5}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

c) Die Zahl 100 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{2}{5}$ des ersten um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

d) Die Zahl 123 wird so in drei Teile zerlegt, dass der erste um 5 größer ist als der zweite und $\frac{1}{3}$ des ersten mit $\frac{1}{4}$ des zweiten zusammen 6 mehr betragen als die Hälfte des dritten. Wie groß ist der erste Teil?

3.3 Proportionen

Den Bruch $\dfrac{a}{b}$ bezeichnet man auch als das **Verhältnis von *a* zu *b***. Eine Gleichung, die die Gleichheit zweier Verhältnisse zum Ausdruck bringt, nennt man **Verhältnisgleichung** oder **Proportion***. In Verhältnisgleichungen schreibt man die beiden Quotienten statt mit Bruchstrich meist mit Doppelpunkt, also

$$a : b = c : d \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Die Gleichung $a : b = c : d$ liest man

»*a* verhält sich zu *b* wie *c* zu *d*«.

a und *d* heißen **Außenglieder**, *b* und *c* **Innenglieder** der Proportion:

Innenglieder

$$a : b = c : d$$

Außenglieder

* proportio (lat.) = Verhältnis, Ebenmaß