Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

3.3 Proportionen

b) Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{5}{6}$ um 5 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{22}{15}$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch hat den Wert $\frac{5}{8}$. Vermehrt man seinen Zähler um 3 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man dasselbe, wie wenn man seinen Zähler um 10 und seinen Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

49. a) Die Zahl 240 wird so in zwei Teile zerlegt, dass der Quotient aus
1) den beiden Teilen gleich $\frac{3}{7}$ ist,
2) dem größeren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{13}{6}$ ist,
3) dem kleineren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{5}{6}$ ist.
Wie groß sind die Teile?

b) Die Zahl 68 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{1}{3}$ des ersten um 12 größer ist als $\frac{1}{5}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

c) Die Zahl 100 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{2}{5}$ des ersten um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

d) Die Zahl 123 wird so in drei Teile zerlegt, dass der erste um 5 größer ist als der zweite und $\frac{1}{3}$ des ersten mit $\frac{1}{4}$ des zweiten zusammen 6 mehr betragen als die Hälfte des dritten. Wie groß ist der erste Teil?

3.3 Proportionen

Den Bruch $\dfrac{a}{b}$ bezeichnet man auch als das **Verhältnis von *a* zu *b***. Eine Gleichung, die die Gleichheit zweier Verhältnisse zum Ausdruck bringt, nennt man **Verhältnisgleichung** oder **Proportion***. In Verhältnisgleichungen schreibt man die beiden Quotienten statt mit Bruchstrich meist mit Doppelpunkt, also

$$a : b = c : d \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Die Gleichung $a : b = c : d$ liest man

»a verhält sich zu b wie c zu d«.

a und d heißen **Außenglieder**, b und c **Innenglieder** der Proportion:

Innenglieder

$$a : b = c : d$$

Außenglieder

* proportio (lat.) = Verhältnis, Ebenmaß

Selbstverständlich müssen b und d von null verschieden sein. – Die Glieder einer Proportion können natürlich auch Terme mit Variablen sein.

Mit den oben eingeführten Namen gewinnt man aus Satz 14.1 eine Regel zur Umformung von Proportionen, die wir uns merken wollen als

Satz 70.1: In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder,* d.h.,

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Beispiel:

$$3x^2 : (x-1) = (x+1) : (2x^3)$$
$$3x^2 \cdot 2x^3 = (x-1)(x+1)$$
$$6x^5 = x^2 - 1$$

**Zur Geschichte der Proportionen

Verhältnisse kommen bereits bei den Ägyptern im *Papyrus Rhind* und auch bei den Babyloniern vor, eine Theorie der Verhältnisse entwickelten jedoch erst die Griechen. Angeblich soll PYTHAGORAS (um 570–497/6 v. Chr.) die Lehre von den Verhältnissen erfunden haben. Er und seine Schüler, die Pythagoreer, waren der Ansicht, dass sich alle Erscheinungen der Natur auf Verhältnisse von natürlichen Zahlen zurückführen ließen. So erklingen zwei Saiten, deren Längen sich wie 2 : 1 verhalten, im Grundton und der Oktave. Bis in die Neuzeit hinein dienten und dienen Verhältnisgleichungen dazu, funktionale Zusammenhänge zweier Größen zu beschreiben. So lernt man noch heute in der Fahrschule, dass bei Verdoppelung der Geschwindigkeit der Bremsweg viermal so lang, bei Verdreifachung aber neunmal so lang wird, dass sich also allgemein die Bremswege wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten verhalten, kurz, dass $s_1 : s_2 = v_1^2 : v_2^2$ gilt. Den genauen Zusammenhang zwischen Bremsweg und Geschwindigkeit drückt man heute aber durch eine Funktionsgleichung aus, die du in der 11. Klasse lernen wirst. Erst mit der Erfindung der Buchstabenrechnung durch François VIÈTE (1540–1603) wurde es möglich, solche Funktionsgleichungen aufzustellen, und seitdem haben Verhältnisse immer mehr an Bedeutung verloren.
Die Lehre von den Proportionen brachte EUDOXOS aus Knidos (um 400–um 347 v. Chr.) zu einem mustergültigen Abschluss. EUKLID (um 340–um 270 v. Chr.) benützte dessen Darstellung als Vorlage für Buch V seiner *Elemente*.
Das Verhältnis zweier Größen nannten bereits die Pythagoreer *λόγος* (lógos), und wenn zwei Paare dem Verhältnisse nach (= *ἀνὰ λόγον* [aná lógon]) gleich waren, so nannten sie dieses Gleichsein der Verhältnisse *ἀναλογία* (analogía). Die klassische lateinische Übersetzung für *λόγος* (Verhältnis) ist *ratio*; die *ἀναλογία* (Verhältnisgleichheit) übersetzt Marcus Tullius CICERO (106–43 v. Chr.) mit dem seltenen lateinischen Wort *proportio*. BOETHIUS (um 480–524 (?)) hingegen verwendet *proportio* für das Verhältnis und bezeichnet die Verhältnisgleichung mit *proportionalitas*. Dieses Übersetzungsdurcheinander spiegelt sich in der lateinischen mittelalterlichen Literatur wider und geht auch ins Deutsche ein, bis sich schließlich in der 2. Hälfte des 18. Jh.s die Aus-

* Diesen Sachverhalt formuliert EUKLID als Satz 19 in Buch VII seiner *Elemente* (= *στοιχεῖα* [stoicheia]).

1644
Abb. 71.1 William OUGHTRED
(5.3.1574 Eton – 30.6.1660 Albury)

1566
Abb. 71.2 Robert RECORD(E)
(1510(?) Tenby – 1558 London)

drücke **Verhältnis** und für Verhältnisgleichung **Proportion** durchsetzen; Verhältnis tritt 1667 bei Johann Christoph STURM (1635–1703) in seiner Übersetzung von ARCHIMEDES' *Sandrechnung* erstmals auf, Proportion 1694 bei Anton Ernst Burckhart von PIRCKENSTEIN. **Äußeres** und **inneres Glied** verbreiten sich im 18. Jh. vor allem durch Johann Andreas VON SEGNERS (1704–1777) *Deutliche und vollständige Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie* (1747) und durch Abraham Gotthelf KÄSTNERS (1719 bis 1800) *Anfangsgründe* (1758).

Die erste brauchbare Schreibweise für Proportionen, nämlich A.B::C.D, schuf 1631 der englische Landpfarrer William OUGHTRED (1574–1660), der in seiner *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio: Quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est* an die 150 mathematische Symbole erfand, u.a. auch das schräg liegende Multiplikationskreuz ×. Seine Frau soll eine Geizhälsin gewesen sein und ihm nicht erlaubt haben, nach dem Abendessen Kerzen anzuzünden, sodass so manch guter Einfall verloren gegangen und so manches Problem ungelöst geblieben sei.

1651 schreibt der englische Mathematiker und Astronom Vincent WING (1619–1668) in seinem *Harmonicon coeleste* A:B::C:D, wobei der Doppelpunkt keineswegs als Divisionszeichen aufgefasst werden darf; denn ein Verhältnis und eine Division waren zwei ganz verschiedene Operationen! WINGS Schreibweise breitet sich rasch über Europa aus und hat sich in Großbritannien und den USA bis ins 20. Jh. gehalten. Das 1557 von dem Engländer Robert RECORD(E) (1510(?)–1558) erfundene Gleichheitszeichen verwendet 1639 als erster auf dem Kontinent der Holländer Jan Jansse STAMPIOEN DE JONGHE (1610– nach 1685); für die Proportion schreibt er A,,B = C,,D. 1678/79 benützt Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) den Doppelpunkt sowohl als Divisionszeichen wie auch als Zeichen für das Verhältnis. 1684 verwendet er den Doppelpunkt als Divisionszeichen in einer Veröffentlichung, und 1693 lehnt er Sonderzeichen für die Proportion ab. Es genüge, so meint er, die Schreibweise $a : b = c : d$, die sich schnell im kontinentalen Europa durchsetzt.

Aufgaben

1. Oft gelingt es, ein Verhältnis großer Zahlen, das sehr unanschaulich ist, in ein Verhältnis kleinerer Zahlen umzuformen, nämlich dann, wenn man den Bruch kürzen kann. Dazu ein

Beispiel: $1029 : 1911 = \frac{1029}{1911} = \frac{7}{13} = 7 : 13.$

Gekürzt wurde mit 143.

Drücke ebenso folgende Verhältnisse durch Verhältnisse teilerfremder ganzer Zahlen aus:

a) $102 : 153$ **b)** $0{,}05 : 0{,}7$ **c)** $2{,}25 : 0{,}18$ **d)** $1\frac{2}{3} : 3{,}5$

e) $\frac{2}{3} : \frac{5}{12}$ **f)** $\frac{17}{64} : \frac{68}{256}$ **g)** $(-3) : 15{,}9$ **h)** $\frac{-7}{11} : (-2\frac{6}{11})$

2. Welchen Wert muss x in den folgenden Proportionen haben?

a) $x : 8 = 3 : 2$ **b)** $15 : (2x) = 2{,}4 : 5$

c) $25 : 45 = (4x + 3) : 27$ **d)** $7x^2 : 99 = 0 : 999$

e) $(5 - 7x) : (2x) = (-19) : 4$ **f)** $5 : (x + 1) = 1 : (1 - x)$

g) $0 : (x - 1) = (x + 1) : (x + 2)$ **h)** $(2x + 3) : (7 - x) = (3 - 2x) : (x + 7)$

3. Berechne diejenigen Zahlen, für die gilt:

a) $x : y = 2 : 3; \quad x + y = 45$

b) $x : y = 3 : 5; \quad x + y = -16$

c) $x : y = (-1) : 3; \quad x + y = 14$

d) $x : y = 1 : (-3); \quad x + y = -14$

e) $x : y = 11 : 5; \quad x - y = 6$

f) $x : y = 10 : 7; \quad x - y = 6$

4. Berechne zu a, b, c die so genannte **4. Proportionale**; das heißt, löse die Gleichung $a : b = c : x$.

a) $a = 8;\ b = 3;\ c = 24$ **b)** $a = -1;\ b = 5;\ c = 3$

c) $a = \frac{2}{3};\ b = 1\frac{3}{5};\ c = \frac{1}{2}$ **d)** $a = 0{,}27;\ b = 2{,}43;\ c = 16{,}2$

5. **Umformen von Proportionen**. Beweise für $a, b, c, d \neq 0$ die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

a) In einer Proportion dürfen die Innenglieder miteinander vertauscht werden, d. h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d}$; z. B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 7 : 35 = 5 : 25.$

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 16 und VII, Satz 13)

b) In einer Proportion dürfen die Außenglieder miteinander vertauscht werden, d. h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow d : b = c : a}$; z. B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 25 : 5 = 35 : 7.$

c) In einer Proportion dürfen die Innenglieder mit den Außengliedern vertauscht werden, d. h.,

$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow b : a = d : c}$; z. B.: $7 : 5 = 35 : 25 \Leftrightarrow 5 : 7 = 25 : 35.$

•6. **Korrespondenz-Umformungen***

a) Beweise die Richtigkeit folgender Behauptungen, vorausgesetzt, alle Nenner sind von null verschieden:

1) Korrespondierende Addition:

$$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a + b) : b = (c + d) : d}$$

(Euklid: *Elemente*, V, Satz 18)

2) Korrespondierende Subtraktion:

$$\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a - b) : b = (c - d) : d}$$

(Euklid: *Elemente*, V, Satz 17)

3) $\boldsymbol{a : b = c : d \Leftrightarrow (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)}$

b) Leichter lassen sich diese Umformungen merken, wenn man sie in Bruchform anschreibt. Mach's!

•7. Mit den Umformungen aus Aufgabe **5** und **6** lassen sich Proportionen vereinfachen, wenn man es geschickt anfängt.

Beispiel:

$(a - x) : (b - x) = (a + x) : x$	
$(a - b) : (b - x) = a : x$	korrespondierende Subtraktion
$(a - b) : a = (b - x) : x$	Vertauschung der Innenglieder
$(2a - b) : a = b : x$	korrespondierende Addition
$x : b = a : (2a - b)$	Vertauschung der Innen- und der Außenglieder und der beiden Seiten

Vereinfache auf entsprechende Art und Weise:

a) $(19 + x) : x = 4 : 3$ **b)** $(15 - a) : a = 2 : 3$

c) $(a - b) : b = (c - d) : d$ **d)** $(a + b) : b = (d + c) : d$

e) $(24 + 3a) : a = 63 : 5$ **f)** $(8 - 3a) : 2 = 3a : 9$

g) $(2a + 3b + x) : (2a + 3b - x) = 4a : (6b)$

8. In einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die beiden spitzen Winkel wie 7 : 11. Wie groß sind sie?

9. **a)** Zwei Zahlen verhalten sich wie 6 zu 7. Vermindert man die erste um 4 und vermehrt die andere um 2, so verhält sich die Differenz zu der Summe wie 2 zu 3. Wie heißen die Zahlen?

b) Vermehrt man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{16}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{5}{9}$. Wie heißen diese Zahlen?

c) Vermindert man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{33}{40}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{7}{8}$. Wie heißen diese Zahlen?

d) Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{119}{142}$ subtrahieren, damit der entstandene Bruch sich zu $\frac{5}{8}$ wie $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$ verhält?

* correspondēre (lat.) = miteinander in Einklang stehen

10. Im Kochbuch *Das gelingt* aus dem Ehrenwirth Verlag steht ein Rezept für »König Ludwigs Lieblingskuchen«: Für den Teig benötigt man 200 g Butter, 250 g Mehl, 80 g Zucker und 4 Esslöffel (EL) Weißwein. Der Belag entsteht aus 600 g Äpfeln, 1 EL Zucker, etwas Zitronenschale und $1\frac{1}{2}$ EL Wasser. Wie viel von den Zutaten muss man nehmen, wenn man nur 125 g Butter hat?