Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

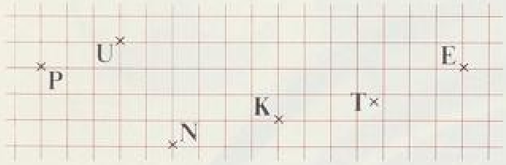
München, 2001

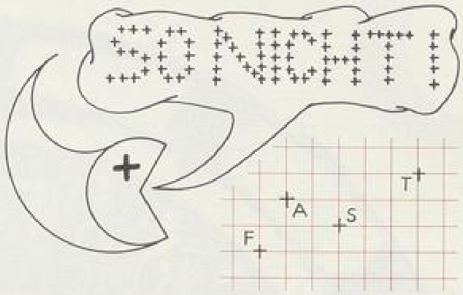
2. Kapitel: Geometrische Grundfiguren

2. Kapitel
Geometrische Grundfiguren

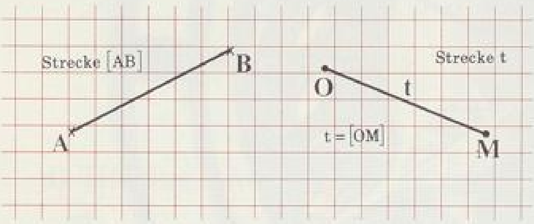
2.1 Punkt, Strecke, Gerade und Kreis

Jede Figur besteht aus Punkten, deswegen bezeichnet man sie manchmal auch als Punktmenge. Einzelne Punkte zeichnen wir als kleine Kreuze (×) oder als kleine Knödel (•). Als ihre Namen nehmen wir große lateinische Buchstaben, siehe Bild.

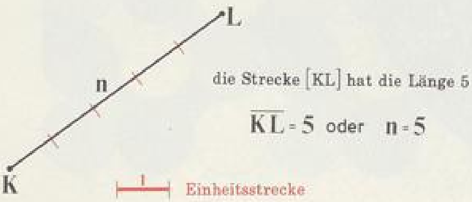




Die kürzeste Verbindung zweier Punkte nennt man **Strecke.** Heißen die beiden Punkte A und B, so bezeichnet man die Strecke mit [AB] oder auch kurz mit einem kleinen lateinischen Buchstaben. Die Strecke [AB] ist eine Menge unendlich vieler Punkte.

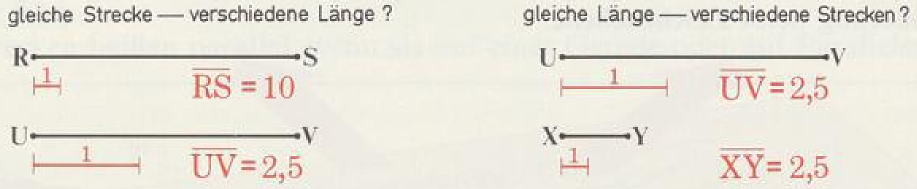


Dagegen ist die **Länge** der Strecke [AB] eine Zahl. Man bezeichnet sie mit $\overline{AB}$ oder auch mit kleinen lateinischen Buchstaben. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor: in »c = [AB]« bedeutet c eine Strecke, in »c = 7« bedeutet c eine Länge. Eine Strecke hat die Länge n, wenn sie n-mal so lang ist wie die Einheitsstrecke.

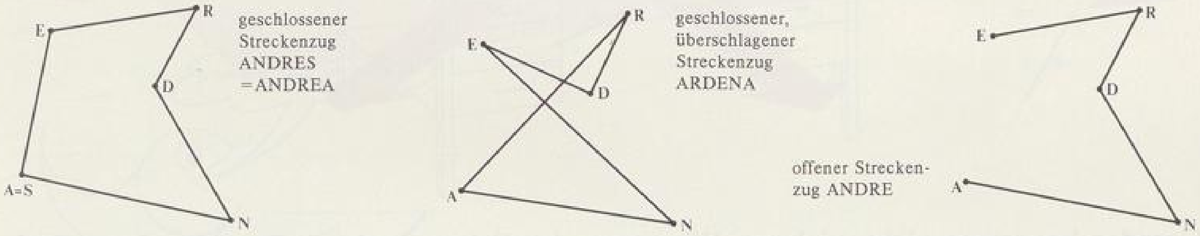


Beachte: In der Geometrie ist die Länge einer Strecke eine Zahl **ohne** Benennung. In der Wirklichkeit ist die Länge einer Strecke dagegen eine Zahl **mit** Benennung, zum Beispiel 5 cm.

Bei jeder Zeichnung muss die Einheitsstrecke genannt sein. Um Zeichnungen zu vergleichen, geben wir die Einheitsstrecke oft in Zentimetern an (Maßstab); so bedeutet zum Beispiel 1 ≙ 2 cm, dass die Einheitsstrecke 2 cm misst. Gewöhnlich ist im Heft 1 ≙ 1 cm und an der Tafel 1 ≙ 10 cm. Aus Bequemlichkeit lassen wir dann diesen Maßstab weg.

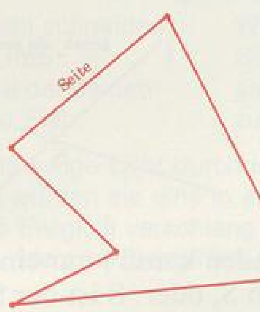


Aneinander stoßende Strecken, wie zum Beispiel [AN], [ND], [DR], [RE] und [ES], bilden den **Streckenzug** ANDRES. Der Streckenzug heißt **geschlossen,** wenn Anfangspunkt A und Endpunkt S zusammenfallen; sonst heißt er **offen.**

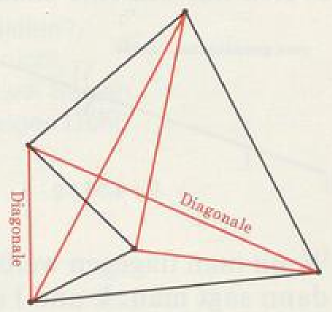


Geschlossene, nicht überschlagene Streckenzüge heißen **Vielecke** oder **Polygone;** wir nennen sie nach der Anzahl n ihrer Ecken **n-Ecke.** Da also n-Ecke immer geschlossen sind, wird jeder Eckpunkt nur einmal genannt. Wir durchlaufen die Eckpunkte der Reihe nach so, dass das Innere des Vielecks immer links liegt, z. B. von R über I nach A.

Die Strecken des geschlossenen Streckenzugs heißen **Seiten.** Jede Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, die keine Seite ist, nennt man **Diagonale** des Vielecks.

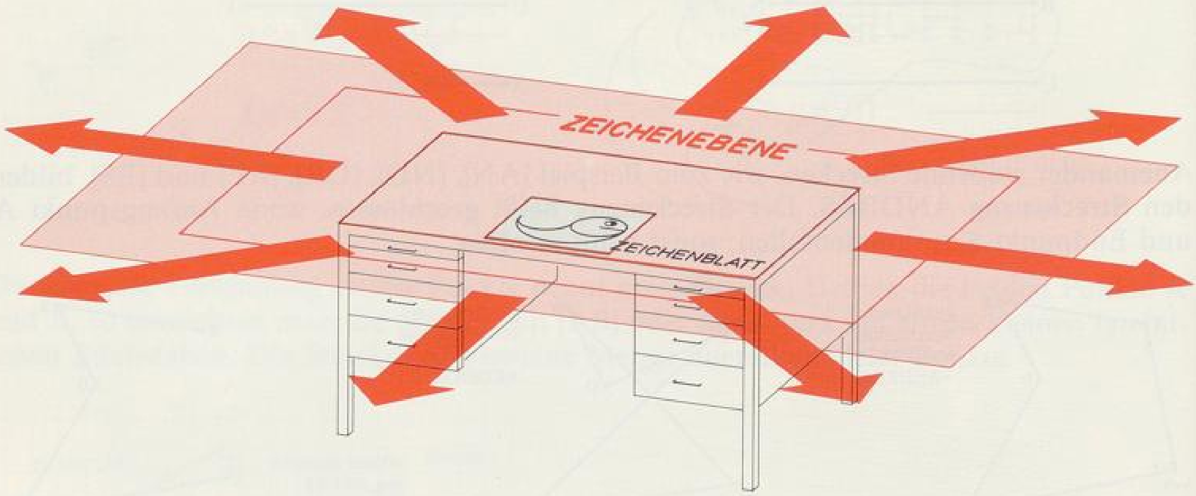


Seiten eines Fünfecks



Diagonalen eines Fünfecks

Mit dem Lineal lässt sich jede Strecke so verlängern, dass wieder eine Strecke entsteht. Denken wir uns diesen Vorgang nach beiden Seiten unbegrenzt ausgeführt, so entsteht eine **Gerade**. Geraden gibt es nur in unserer Vorstellung, nicht aber auf dem Zeichenblatt, auf dem wir ja nur über eine begrenzte Zeichenfläche verfügen. Um Geometrie zu treiben, um zum Beispiel Geraden unterzubringen, brauchen wir eine unbegrenzte Zeichenfläche. Wir denken sie uns so entstanden, dass die Zeichenblattfläche beliebig vergrößert ist; diese Vergrößerung heißt **Zeichenebene**.



Geraden kann man nicht zeichnen. Wir veranschaulichen sie durch Strecken, deren Endpunkte nicht gekennzeichnet sind. Geraden bezeichnet man auch mit kleinen lateinischen Buchstaben.

Wählt man auf einer Gerade zwei beliebige Punkte P und Q, dann liegt die Strecke [PQ] auf der Gerade. Andererseits geht durch zwei Punkte P und Q immer eine Gerade, aber auch nur eine. Dazu sagt der Mathematiker:

Zwei (verschiedene) Punkte legen genau eine Gerade fest.

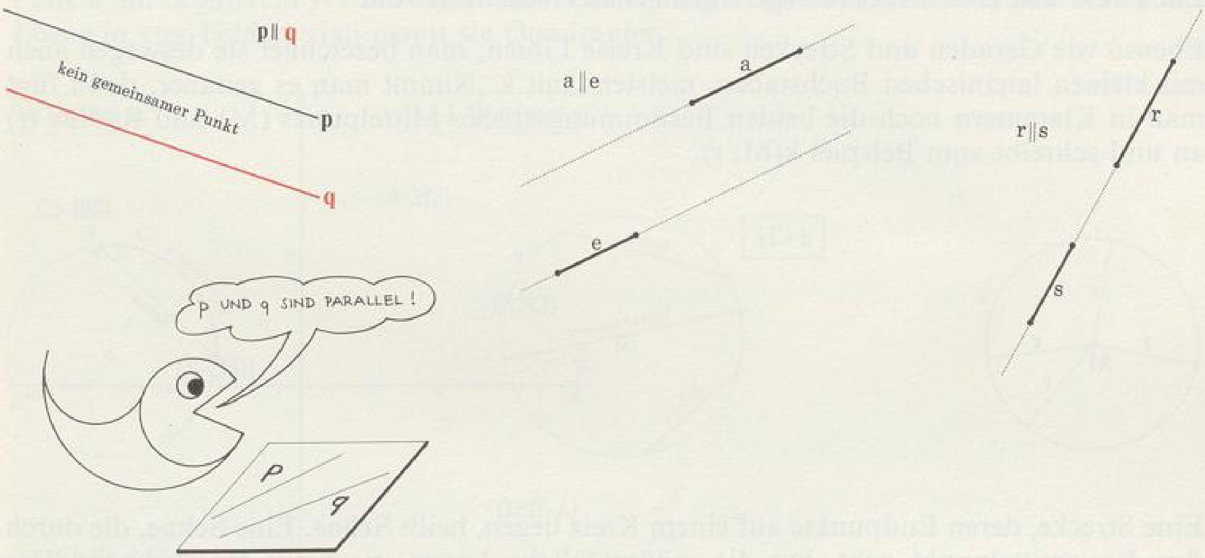
Deshalb genügt es, eine Gerade durch zwei ihrer Punkte zu kennzeichnen. Wenn man also weiß, dass zwei Geraden g und h zwei (oder mehr) Punkte gemeinsam haben, dann kann es sich nur um eine einzige Gerade handeln: g = h.

Wenn man dagegen weiß, dass zwei Geraden k und l nur einen Punkt S gemeinsam haben, dann sagt man: k und l schneiden sich in S, oder: S ist der Schnittpunkt von k und l. Dafür schreibt man auch: $k \cap l = \{S\}$.

In der Mathematik brauchen wir für bestimmte Sachverhalte eigene Fachwörter. Eine **Definition** erklärt die Bedeutung dieser Fachwörter.

Definition:

> Haben zwei Geraden p und q keinen Punkt gemeinsam, dann sagt man: p und q sind **parallel:** $p \parallel q$.
> Zwei Strecken heißen parallel, wenn sie auf einer Gerade oder auf Parallelen liegen.



Unser Geobold meint, dass sich zwei Geraden nur dann schneiden, wenn er den Schnittpunkt auf dem Zeichenblatt noch sieht. Um zu klären, ob sich p und q schneiden, könnte er weitere Zeichenblätter anstückeln und darauf die gezeichneten Strecken verlängern. Schneiden sich die Verlängerungen, dann irrt Geobold. Dieses Verfahren ist recht umständlich und lässt sich meistens nicht handhaben. Die Geometrie weiß einen Ausweg, wir werden ihn im nächsten Abschnitt zeigen.

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da ward's dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten's selber nicht, –
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

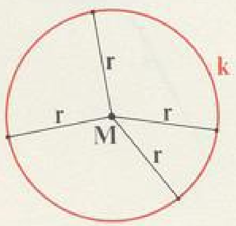
Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

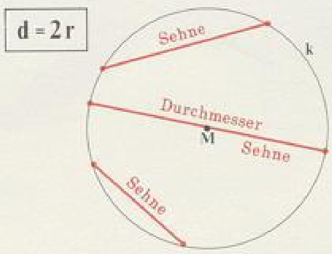
Christian Morgenstern (1871 bis 1914)

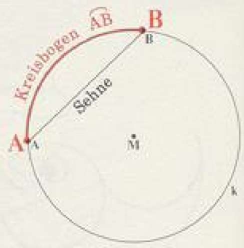
Wenn wir einen Zirkel fest eingestellt lassen, dann bestimmen Spitze und Mine eine Streckenlänge r. Mit einem solchen Zirkel ist es dann möglich, jede Strecke dieser Länge auf dem Zeichenblatt festzulegen. Deshalb nennen wir den Zirkel auch Streckenträger. Halten wir nun den einen Endpunkt fest, indem wir die Spitze im Punkt M einstechen, dann trägt die Mine die Strecke um die Spitze herum, sie zieht einen Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r. Dazu sagt man auch: »Die Spitze beschreibt einen Kreis um M mit Radius r.« Die mechanische Erzeugung der Kreislinie zeigt: Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Mittelpunkt M) gleiche Entfernung (Radius r) haben.

Ein Punkt und eine Streckenlänge legen genau einen Kreis fest.

Ebenso wie Geraden und Strecken sind Kreise Linien; man bezeichnet sie deswegen auch mit kleinen lateinischen Buchstaben, meistens mit k. Nimmt man es genauer, dann fügt man in Klammern noch die beiden Bestimmungsstücke Mittelpunkt (M) und Radius (r) an und schreibt zum Beispiel k(M; r).



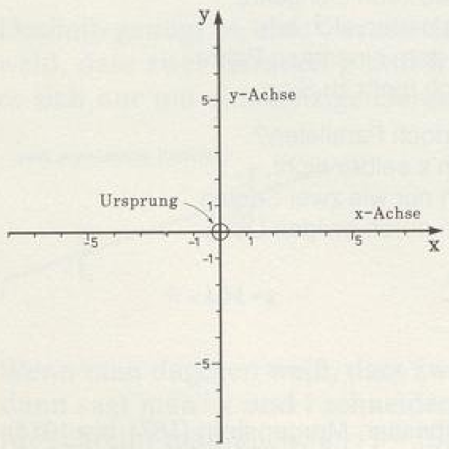




Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, heißt **Sehne.** Eine Sehne, die durch den Kreismittelpunkt geht, hat die größtmögliche Länge, sie heißt **Durchmesser.** Der Durchmesser d ist doppelt so lang wie der Radius r.
Eine Sehne zerschneidet den Kreis in zwei Kreisbögen. Einen Kreisbogen über der Sehne [AB] bezeichnen wir mit $\overset{\frown}{AB}$. Gewöhnlich meinen wir damit den kleineren der beiden Kreisbögen.

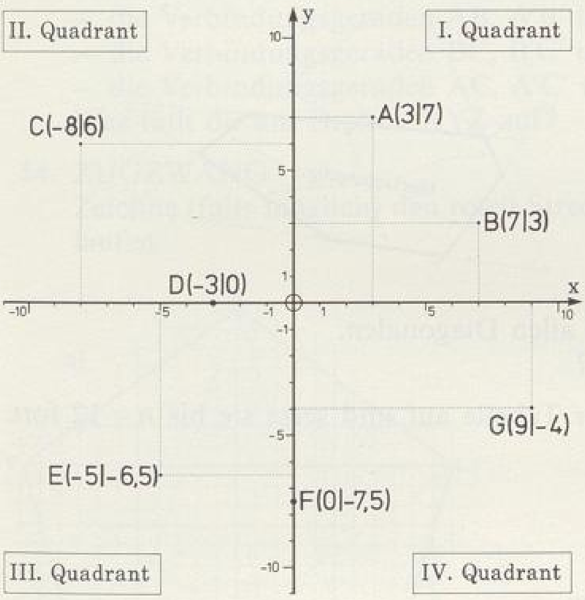
Koordinatensystem

Seit René Descartes (1596 bis 1650) beschreibt man die Lage von Punkten in der Zeichenebene mit zwei Zahlen, den »kartesischen Koordinaten«. Dazu zeichnet man zwei zu-



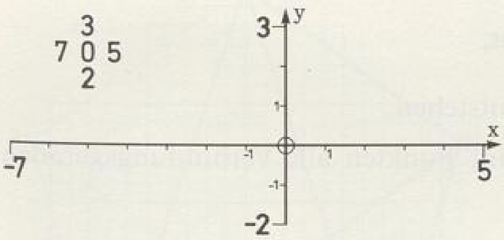
Kartesisches Koordinatensystem

einander senkrechte Zahlengeraden (Koordinatenachsen) mit gemeinsamem Nullpunkt (Ursprung); eine heißt x-Achse, die andere heißt y-Achse. Von einem Punkt der Zeichenebene fällt man die Lote auf die beiden Koordinatenachsen. Die Zahlen auf den Achsen, auf die die Lote treffen, heißen Koordinaten des Punkts. A(3 | 7) bedeutet: Der Punkt A hat die x-Koordinate 3, kurz den x-Wert 3, und die y-Koordinate 7, kurz den y-Wert 7.
Im Unterschied zum Koordinatensystem, das du in der 5. Klasse kennen gelernt hast, verlängern wir die Achsen über den Ursprung hinaus. Die Zahlen, die auf diesen Verlängerungen sitzen, unterscheidet man mit einem Minuszeichen von den bisherigen Zahlen. Sie heißen negative Zahlen. Punkte mit negativem x-Wert liegen links von der y-Achse, Punkte mit negativem y-Wert liegen unter der x-Achse. Das Koordinatensystem zerlegt die Ebene in vier Felder, man nennt sie Quadranten.



Falls nötig, kennzeichnen wir den Platzbedarf für ein Koordinatensystem symbolisch mit einem Zahlenkreuz.

3
Steht zum Beispiel da 7 0 5, dann muss das Koordinatensystem sein wie im Bild.
2



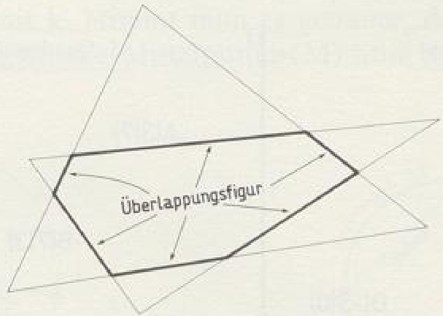
Aufgaben zu 2.1

1. Welche Vielecke können entstehen, wenn du von einem Viereck eine Ecke abschneidest?
Zeichne für jeden möglichen Fall eine Figur!

2. **a)** Zeichne ein Sechseck. Verbinde die Eckpunkte so, dass es in lauter Dreiecke zerlegt wird; die Eckpunkte der Dreiecke sollen auch Eckpunkte des Sechsecks sein.
Wie viele verschiedenartige Möglichkeiten findest du?
Wie viele Dreiecke entstehen dabei jeweils?

:b) Zeichne ein Sechseck, das sich von keiner Ecke aus in Dreiecke zerlegen lässt.

3. Wenn man zwei Dreiecke geeignet übereinander legt, so entsteht als Überlappungsfigur ein Sechseck.
Lege Dreiecke so übereinander, dass als Überlappungsfigur ein anderes Vieleck entsteht.
Wie viele Möglichkeiten fallen dir ein?



4. **a)** Zeichne ein n-Eck (n = 4, 5, 6, 7) mit allen Diagonalen.
Wie viele Diagonalen gibt es jeweils?

•b) Führe die Ergebnisse von **a)** in einer Tabelle auf und setze sie bis n = 12 fort. (Zeichnung nicht nötig!)

5. Zeichne vier Geraden, sodass sie sich
a) in keinem Punkt,
b) in genau einem Punkt,
c) in möglichst vielen Punkten schneiden.

:6. In wie viel Punkten können sich vier Geraden schneiden?
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

:7. In wie viel Punkten können sich fünf Geraden schneiden?
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

8. Durch vier Punkte sollen alle Verbindungsgeraden gezeichnet werden.
Wähle die Punkte so,
a) dass genau eine Verbindungsgerade entsteht,
b) dass vier Verbindungsgeraden entstehen,
c) dass möglichst viele Verbindungsgeraden entstehen.

•9. Wie viele Geraden entstehen, wenn du bei fünf Punkten alle Verbindungsgeraden zeichnest?
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

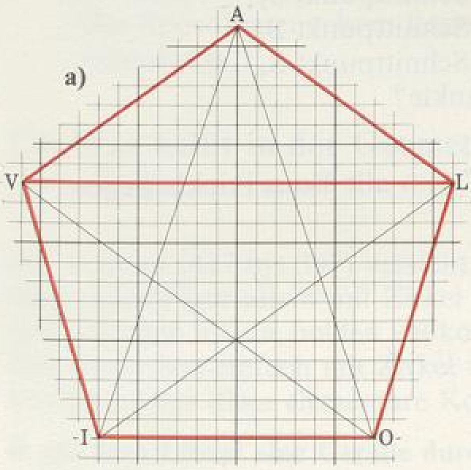
10. Drei Strecken mit den Längen 2, 3 und 5 hängen in dieser Reihenfolge aneinander.
Zeichne alle Möglichkeiten, bei denen der Streckenzug auf einer Gerade liegt.
Wie weit sind Anfangs- und Endpunkt des Streckenzugs jeweils voneinander entfernt?

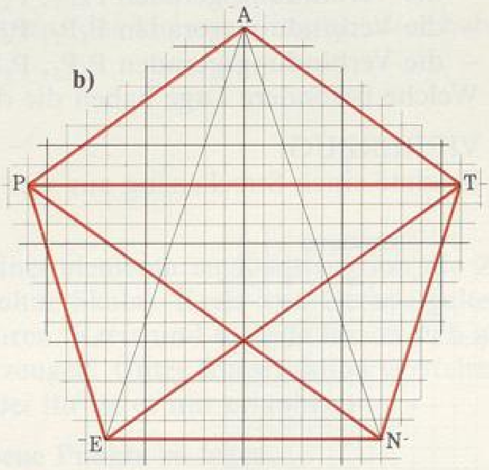
11. Gegeben sind die vier Punkte R, O, M und A, von denen keine drei auf einer Gerade liegen.
Wie viel offene Streckenzüge gibt es, in denen jeder Punkt genau einmal als Ecke vorkommt?
Zeichne fünf solcher Streckenzüge.

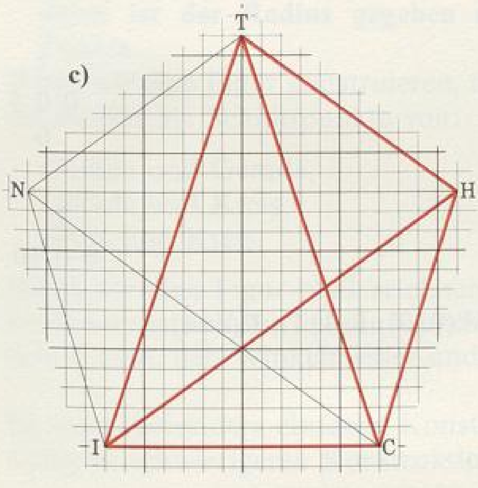
•12. Fünf geradlinige Schnitte (Sehnen) zerteilen eine kreisförmige Pizza.
Zeichne drei Fälle, in denen verschieden viele Stücke entstehen. Wie viele Pizzastücke ergeben sich mindestens – wie viele höchstens?

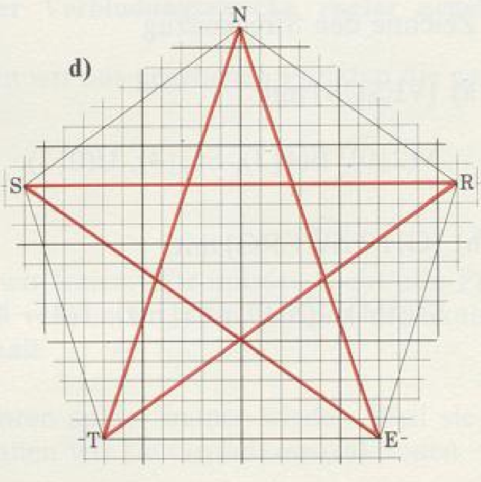
13. Zeichne drei Geraden a, b und c, die durch den Punkt S gehen. Wähle auf a die Punkte A und A′, auf b die Punkte B und B′ und auf c die Punkte C und C′.
Zeichne nun jeweils mit andrer Farbe
– die Verbindungsgeraden AB, A′B′ und ihren Schnittpunkt X,
– die Verbindungsgeraden BC, B′C′ und ihren Schnittpunkt Y,
– die Verbindungsgeraden AC, A′C′ und ihren Schnittpunkt Z.
Was fällt dir am Dreieck XYZ auf?

14. ZUGZWANG
Zeichne (falls möglich) den roten Streckenzug, ohne eine Strecke zweimal zu durchlaufen.

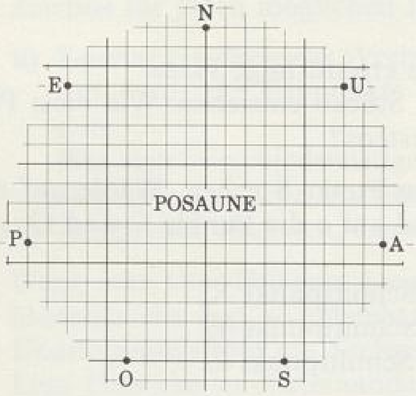
a)


b)


c)


d)


15. POSAUNE
Zeichne einen Streckenzug, der jeden der Punkte P, O, S, A, U, N, E mit jedem verbindet, ohne eine Strecke zweimal zu durchlaufen.



16. Zeichne auf einen Kreis (r = 5) sechs beliebige Punkte und bezeichne sie durcheinander mit P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5.
Zeichne nun jeweils mit andrer Farbe
– die Verbindungsgeraden P_0P_1, P_3P_4 und ihren Schnittpunkt S_2,
– die Verbindungsgeraden P_1P_2, P_4P_5 und ihren Schnittpunkt S_3,
– die Verbindungsgeraden P_2P_3, P_5P_0 und ihren Schnittpunkt S_4.
Welche besondere Lage haben die drei Schnittpunkte?

•17. VIERERZUG
Zeichne einen Streckenzug aus vier Strecken, auf dem alle neun Punkte liegen.

18. Zeichne den Streckenzug

a) [VESUV] mit

V(2 | 0), E(4 | 3), S(2 | 4), U(0 | 3).

5
0 0 5
0

b) [GIFTZWERG] mit

G(5 | 1), I(8 | 0), F(5 | −1), T(4 | −4), Z(3 | −1), W(0 | 0), E(3 | 1), R(4 | 4).

5
0 0 10
5

4
c) [GOLDABWERTUNG] mit 9 0 5
11

G(−2 | 3,5), L(4 | 0), D(2 | −3,5), A(4 | −7), B(0 | −7), W(−2 | −10,5), E(−4 | −7), R(−8 | −7), T(−6 | −3,5), U(−8 | 0), N(−4 | 0).

7
d) [ECKSPIRALUNG] mit 7 0 7
7

E(0 | 0), C(1 | 0), K(1 | −2), S(−2 | −2), P(−2 | 2), I(3 | 2), R(3 | −4), A(−4 | −4), L(−4 | 4), U(5 | 4), N(5 | −6), G(−6 | −6).
Wie geht's wohl weiter: X(? | ?), Y(? | ?)
Wie lang ist [ECKSPIRALUNG]?

7
e) [NAMENRASERMSN] mit 13 0 1
8

M(0 | 0), A(−4 | −2), S(−6 | 6), E(−8 | 1), R(−6 | −7), N(−12 | −1).

19. Gib die Koordinaten der Punkte P, O, S, A, U, N, E in Aufgabe **15.** an,
a) wenn der Ursprung in O liegt,
b) wenn der Ursprung in U liegt.
Die Koordinatenachsen liegen auf Gitterlinien; das kleinste Gitterquadrat habe die Seitenlänge 1.

2.2 Was heißt in der Geometrie »Konstruieren«?

Seit PLATON (427 bis 347) versteht man unter einer elementaren Konstruktion die Zeichnung einer Figur allein mit Zirkel und Lineal (ohne Skala). Kreis und Gerade galten bei den Griechen als die beiden vollkommenen Figuren. Kreis und Gerade lassen sich außerdem besonders einfach mit Zirkel und Lineal erzeugen. Unter **Konstruktion** verstehen wir künftig immer diese elementare Konstruktion. Bei ihr ist es nur erlaubt:

- **mit dem Lineal eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zu legen,**
- **mit dem Zirkel einen Kreis um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius zu ziehen; dabei ist der Radius gegeben als Länge der Verbindungsstrecke zweier gegebener Punkte.**

Wenn wir eine Figur konstruieren, dann gewinnen wir aus gegebenen Punkten die gesuchten Punkte als Schnittpunkte von:

Gerade und Gerade,
Gerade und Kreis,
Kreis und Kreis.

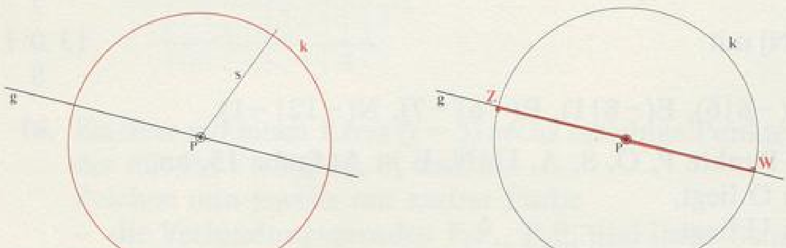
Wenn wir eine Figur bloß zeichnen, dann sind wir freier: Wir müssen nicht alle Punkte konstruieren und dürfen auch andere Hilfsmittel verwenden, zum Beispiel die Skala auf dem Lineal, den Winkelmesser und das Augenmaß.

Gewisse, besonders einfache Konstruktionen kehren später immer wieder. Weil sie Bausteine in schwierigeren Konstruktionen sind, nennen wir sie Grundkonstruktionen.

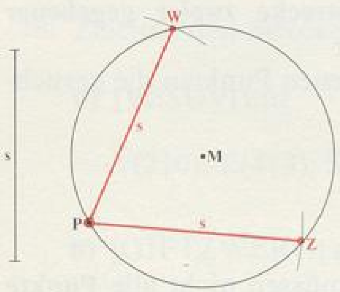
1. Grundkonstruktion: Streckenabtragen

Gegeben sind eine Strecke s, eine Gerade g und ein Punkt P auf der Gerade. s soll so auf g abgetragen werden, dass P ein Endpunkt ist.

Lösung: 1. Zeichne die gegebenen Stücke.
2. Zeichne den Kreis k um P mit Radius s.
3. Der gesuchte Streckenpunkt ist Schnittpunkt von k und g. k schneidet g zweimal, in Z und in W; also gibt es zwei Lösungen, [ZP] und [PW].

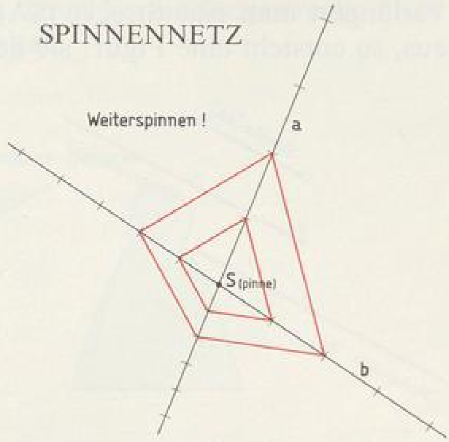


Beim praktischen Zeichnen genügen tatsächlich kurze Kreisbögen da, wo die Schnittpunkte entstehen.



Ebenso kann man eine Strecke als Sehne in einen Kreis k von einem Kreispunkt P aus hineinkonstruieren. Man sticht mit dem Zirkel in P ein und zeichnet einen Kreisbogen mit dem Radius s. Dort, wo er den Kreis k schneidet, liegen die gesuchten Punkte. Auch hier gibt es zwei Lösungen [PZ] und [PW].

Aufgaben zu 2.2



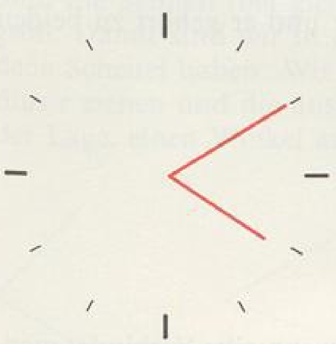
1. SPINNENNETZ
Zeichne zwei sich schneidende Geraden a und b und ihren Schnittpunkt S. Trage von S aus jeweils fünfmal hintereinander eine Strecke ab
auf a mit der Länge 1 und in Gegenrichtung der Länge 2,5;
auf b mit der Länge 1,5 und in Gegenrichtung der Länge 2.
Verbinde die Streckenendpunkte, wie im Bild zum Teil schon geschehen.

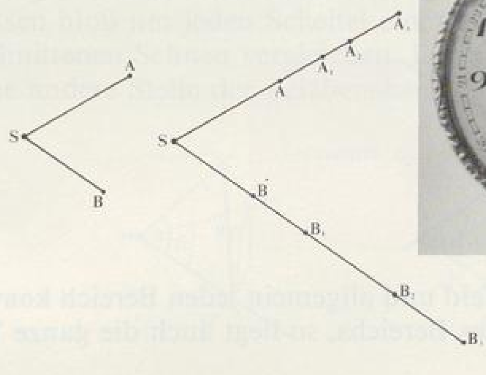
2. SEHNENSUCHT
Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere in ihn mindestens 17 Sehnen der Länge 8 so, dass der Endpunkt der einen Sehne immer Anfangspunkt der nächsten Sehne ist.
Wie wird vermutlich das Loch ausschauen, wenn du immer weiterzeichnest?

3. Von einem Kreispunkt P aus soll eine Strecke der Länge s als Sehne abgetragen werden.
Für welche Streckenlängen s gibt es zwei Lösungen, eine Lösung, keine Lösung?

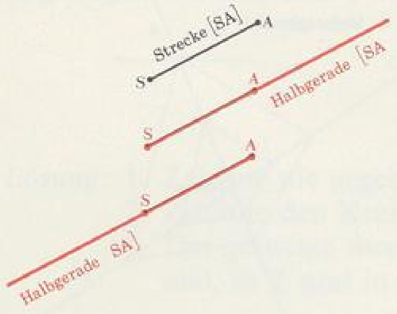
2.3 Geometrischer Winkel

Zur selben Uhrzeit haben die Zeiger aller genau gehenden Uhren dieselbe Stellung. Für die Zeitangabe spielt die Größe der Uhr keine Rolle, wohl aber der Winkel, den die Zeiger bilden. Geometrisch gesehen besteht dieser Winkel aus zwei Strecken [SA] und [SB] mit gemeinsamem Anfangspunkt S. Verlängert man die Strecken über A bzw. B hinaus, so ändert sich der Winkel nicht.





Verlängert man eine Strecke [SA] unbegrenzt über einen Endpunkt, zum Beispiel A, hinaus, so entsteht eine Figur: sie heißt **Halbgerade**: Man bezeichnet sie mit [SA.

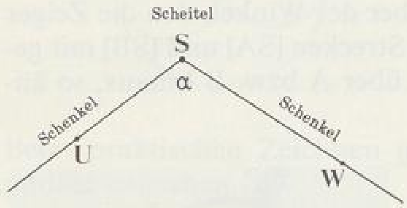


Mit diesem Begriff können wir nun definieren, was man in der Geometrie unter einem Winkel versteht.

Definition

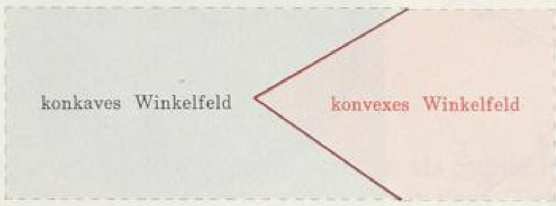
> Der **Winkel** ist eine geometrische Figur.
> Er besteht aus zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfangspunkt.
> Die beiden Halbgeraden heißen **Schenkel,**
> der gemeinsame Anfangspunkt heißt **Scheitel** des Winkels.

Bezeichnungen:
Einen Winkel mit den Schenkeln [SU und [SW bezeichnet man mit $\sphericalangle USW$ oder mit $\sphericalangle WSU$. Wenn es keine Mißverständnisse gibt, schreibt man auch kurz $\sphericalangle S$, oder man bezeichnet den Winkel mit einem kleinen griechischen Buchstaben, wie α, β, γ, ...



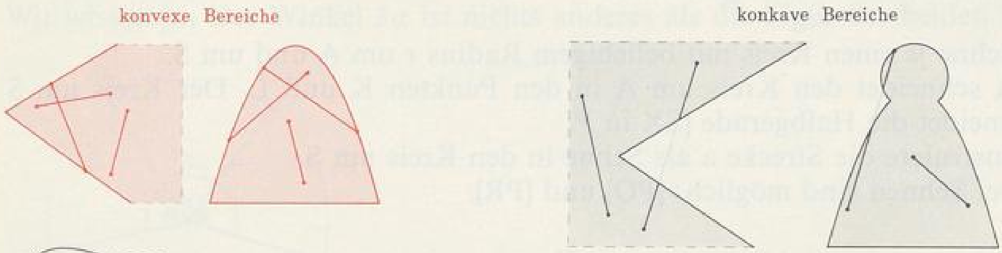
$\sphericalangle USW = \sphericalangle WSU = \sphericalangle S = \alpha$

Im Allgemeinen zerlegt ein Winkel die Zeichenebene in zwei **Winkelfelder,** in ein **konvexes** und ein **konkaves** Winkelfeld, er trennt die beiden Winkelfelder und er gehört zu beiden Winkelfeldern.



Wir nennen ein Winkelfeld und allgemein jeden Bereich **konvex,** wenn gilt: Verbindet man zwei beliebige Punkte des Bereichs, so liegt auch die ganze Verbindungsstrecke in diesem

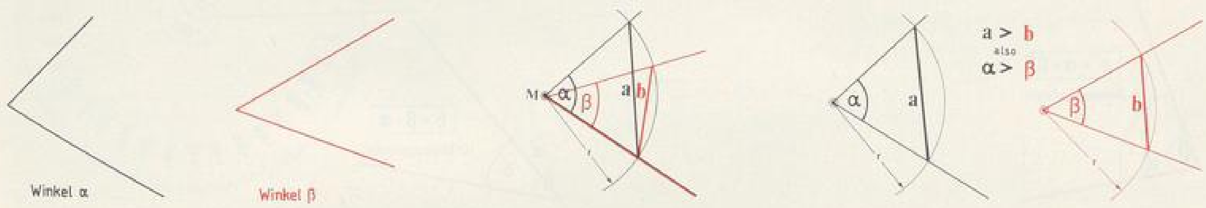
Bereich. Gibt es dagegen in einem Bereich zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke nicht ganz in diesem Bereich liegt, dann heißt der Bereich **konkav.**



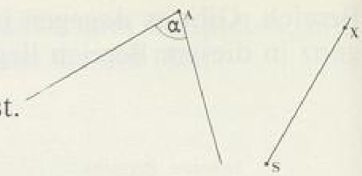
Es gibt zwei Winkel, die nur konvexe Winkelfelder haben:
Der eine heißt **Nullwinkel,** bei ihm fallen die Schenkel zusammen.
Der andere heißt **gestreckter** Winkel, bei ihm ist der eine Schenkel die Verlängerung des andern.

Vergleich von Winkeln

Um zu entscheiden, welcher Winkel größer ist, müssen wir uns zuerst darüber im Klaren sein, welche Winkelfelder wir vergleichen wollen: Vergleichen wir die beiden konvexen oder die beiden konkaven Winkelfelder? Von nun an kennzeichnen wir das Winkelfeld, von dem wir reden, mit einem kleinen Kreisbogen – und wenn es nicht ausdrücklich vermerkt ist, dann meinen wir künftig immer das konvexe Winkelfeld. Wir stellen uns die beiden Winkel so vor, dass sie einen gemeinsamen Schenkel (und damit auch einen gemeinsamen Scheitel haben. Um den gemeinsamen Scheitel M zeichnen wir einen Kreis mit beliebigem Radius r. Die Winkel α und β schneiden aus diesem Kreis die Sehnen a und b aus. Wir nennen den Winkel α größer als β, wenn die Sehne a länger ist als die Sehne b. Sind die Sehnen (bei gleichem Radius) gleich lang, dann nennen wir die Winkel gleich groß. Damit sind wir in der Lage, Winkel auch dann zu vergleichen, wenn sie verschiedene Scheitel haben: Wir müssen bloß um jeden Scheitel einen Kreis mit demselben Radius r ziehen und die ausgeschnittenen Sehnen vergleichen. Damit sind wir aber auch in der Lage, einen Winkel an eine andere Stelle der Zeichenebene zu übertragen.

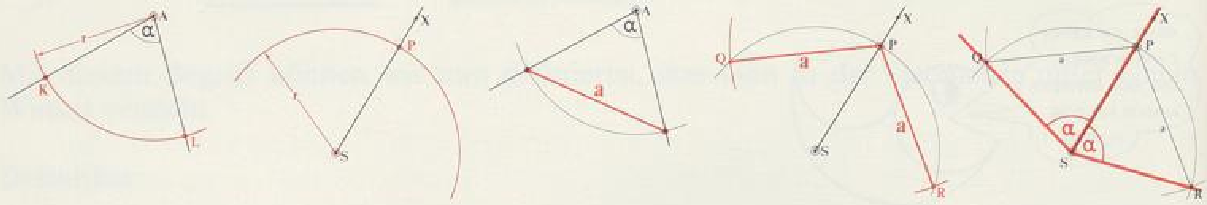


2. Grundkonstruktion: Winkelübertragen



Gegeben ist ein Winkel α und eine Halbgerade [SX.
α soll so übertragen werden, dass [SX einer seiner Schenkel ist.
Die gegebenen Stücke sind schon gezeichnet.

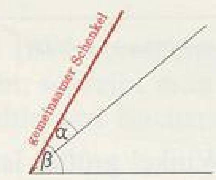
Lösung: 1. Zeichne je einen Kreis mit beliebigem Radius r um A und um S.
$\sphericalangle$A schneidet den Kreis um A in den Punkten K und L. Der Kreis um S schneidet die Halbgerade [SX in P.
2. Konstruiere die Strecke a als Sehne in den Kreis um S.
Zwei Sehnen sind möglich: [PQ] und [PR].



Ergebnis: $\sphericalangle$PSR und $\sphericalangle$PSQ sind die beiden Ergebnisse.

Addieren von Winkeln

Legen wir zwei Winkel α und β so aneinander, dass sie einen Schenkel gemeinsam haben, dann gibt es zwei Möglichkeiten:



1. Der gemeinsame Schenkel liegt zwischen den beiden Winkelbögen, die beiden andern Schenkel bilden den Winkel σ. Wir nennen ihn den Summenwinkel von α und β, kurz

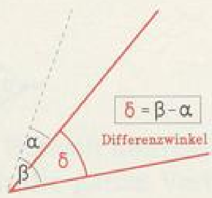
$$\sigma = \alpha + \beta$$

2. Die beiden Winkelbögen liegen auf derselben Seite des gemeinsamen Schenkels. Die beiden andern Schenkel bilden den Winkel δ. Wir nennen ihn den Differenzwinkel von α und β, kurz:

$$\delta = \alpha - \beta$$

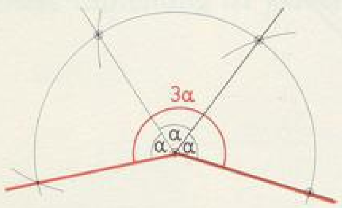
Ist β der größere Winkel, dann ist

$$\delta = \beta - \alpha.$$



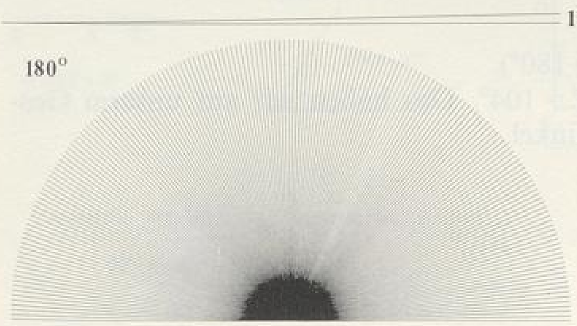
Wir konstruieren Vielfache eines Winkels, indem wir einen Winkel entsprechend oft zu sich selber addieren. Beispiel: Verdreifachung eines Winkels.

Um anzudeuten, wie der Winkel 3α entsteht, kennzeichnet ein Bogen das konkave Winkelfeld. Ebenso gut können wir auch das konvexe Winkelfeld mit einem Bogen markieren. Wir wissen ja: Der Winkel 3α ist nichts anderes als die Figur der beiden Schenkel.

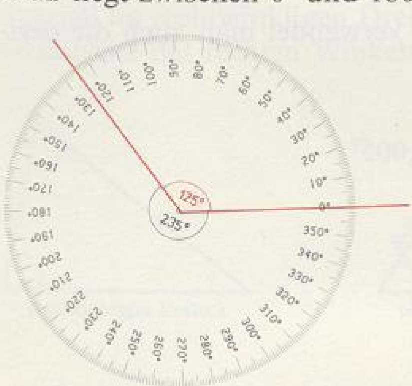


Messen von Winkeln

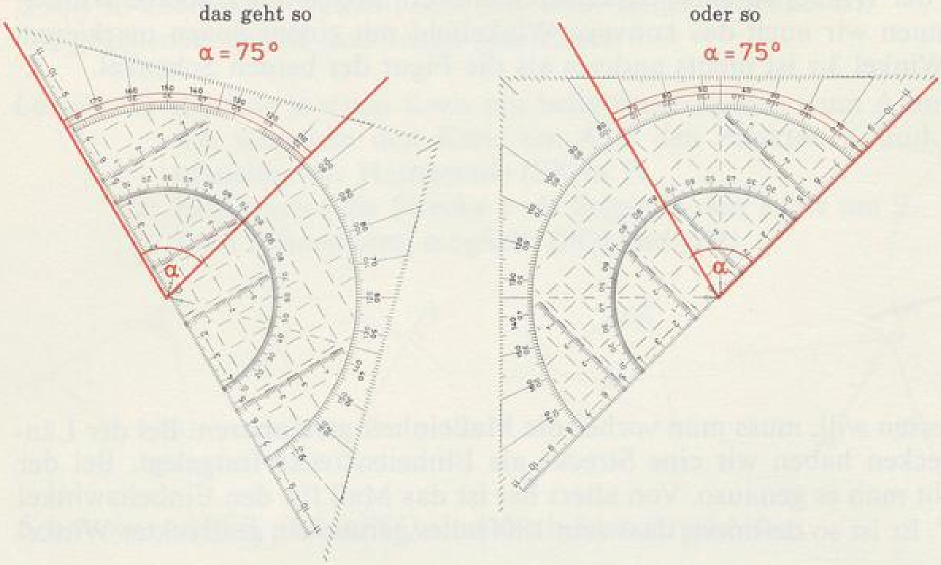
Immer wenn man messen will, muss man vorher die Maßeinheit vereinbaren. Bei der Längenmessung von Strecken haben wir eine Strecke als Einheitsstrecke festgelegt. Bei der Winkelmessung macht man es genauso. Von alters her ist das Maß für den Einheitswinkel 1 Grad, in Zeichen 1°. Er ist so definiert, dass sein 180faches gerade ein gestreckter Winkel ist.



In der Bezeichnung unterscheiden wir nicht, ob wir den Winkel als Figur oder sein Maß meinen, weil der Zusammenhang immer klar macht, was gemeint ist.
Jeder Winkel hat zwei Winkelmaße, je nachdem, ob man das konvexe oder konkave Winkelfeld betrachtet. Die beiden Winkelmaße ergeben zusammen 360°. Es reicht also, nur eines der beiden Maße anzugeben. Weil wir gewöhnlich das konvexe Winkelfeld meinen, geben wir dann auch das kleinere Maß an und nennen es das konvexe Maß. Das konvexe Maß liegt zwischen 0° und 180°, das konkave zwischen 180° und 360°.

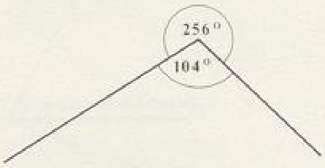


Winkel zeichnen und messen wir mit dem Winkelmesser. Dazu verwenden wir das Geodreieck; auf ihm gibt es nur konvexe Winkelmaße, also von 0° bis 180°:



Beispiel: Zeichne einen Winkel von 256°.

Überlegung: 256° ist das konkave Maß ($256° > 180°$).
Das konvexe Maß ist $360° - 256° = 104°$. Das haben wir auf unserm Geodreieck. Jetzt zeichnen wir den Winkel.



Manchmal braucht man eine kleinere Winkeleinheit.

$\frac{1}{60}°$ heißt eine (Winkel-)**Minute,** kurz $1'$.
$\frac{1}{60}'$ heißt eine (Winkel-)**Sekunde,** kurz $1''$.

$$\boxed{1° = 60' = 3600''}$$

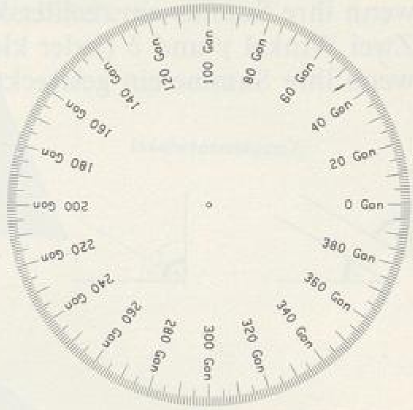
Diese Unterteilung geht auf die Babylonier zurück. Heute verwendet man auch die dezimale Unterteilung.

Beispiele: $23°\,11' = 23° + \frac{11}{60}° = 23\frac{11}{60}° = 23{,}183\ldots°$
$113°\,21'\,18'' = 113° + \frac{21}{60}° + \frac{18}{3600}° = 113° + 0{,}35° + 0{,}005°$
$= 113{,}355°$
und umgekehrt:
$2{,}7° = 2° + 0{,}7 \cdot 60' = 2°\,42'$
$271{,}18° = 271° + 0{,}18 \cdot 60' = 271°\,10{,}8'$
$= 271°\,10' + 0{,}8 \cdot 60'' = 271°\,10'\,48''$

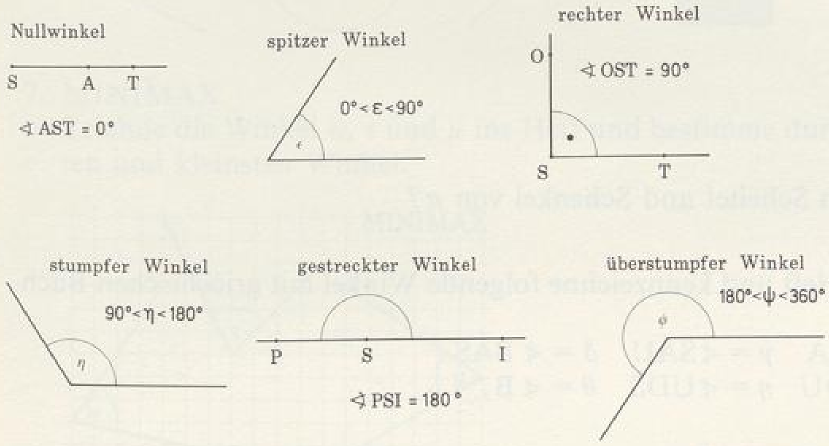
Neben der babylonischen Gradeinteilung ist auch die Einteilung des gestreckten Winkels in 200 gleiche Teile in Gebrauch. Ein solcher Winkelteil heißt **1 Neugrad** oder **1 Gon,** kurz 1^g.

$\boxed{90° = 100^g}$

Diese Einteilung ist jedoch weniger gebräuchlich.



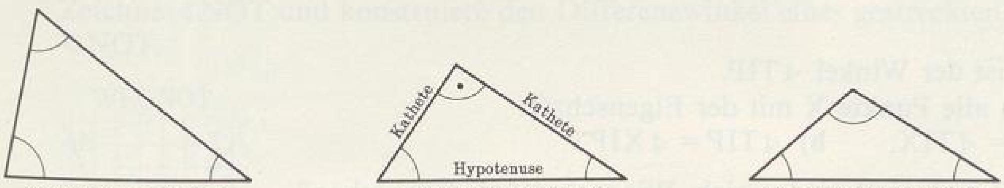
Wir unterscheiden folgende Winkeltypen: Zum 90°-Winkel sagt man **rechter Winkel.** Von allen Winkeln ist er der Wichtigste. Deshalb kennzeichnet man ihn mit einem eigenen Symbol: ⊾



Nach den Winkeltypen unterscheiden wir auch drei Typen von Dreiecken:

1. Ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln heißt **spitzwinklig.**
2. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinklig.**
3. **Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt stumpfwinklig.**

Speziell im rechtwinkligen Dreieck heißen die Schenkel des rechten Winkels **Katheten;** die Gegenseite des rechten Winkels heißt **Hypotenuse.**



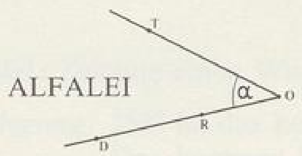
spitzwinkliges Dreieck — rechtwinkliges Dreieck — stumpfwinkliges Dreieck

Besondere Winkelpaare:

Zwei spitze Winkel α und β heißen **komplementär,** wenn ihre Summe ein rechter Winkel ist: $\alpha + \beta = 90°$.
Zwei Winkel γ und δ (jeder kleiner als 180°) heißen **supplementär,** wenn ihre Summe ein gestreckter Winkel ist: $\gamma + \delta = 180°$.

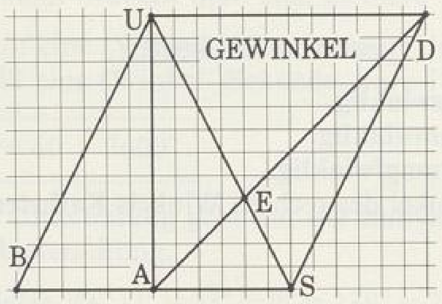
Aufgaben zu 2.3

1. ALFALEI
Gib für α fünf verschiedene Bezeichnungen an.



2. $\alpha = \sphericalangle BAD$, wie heißen Scheitel und Schenkel von α?

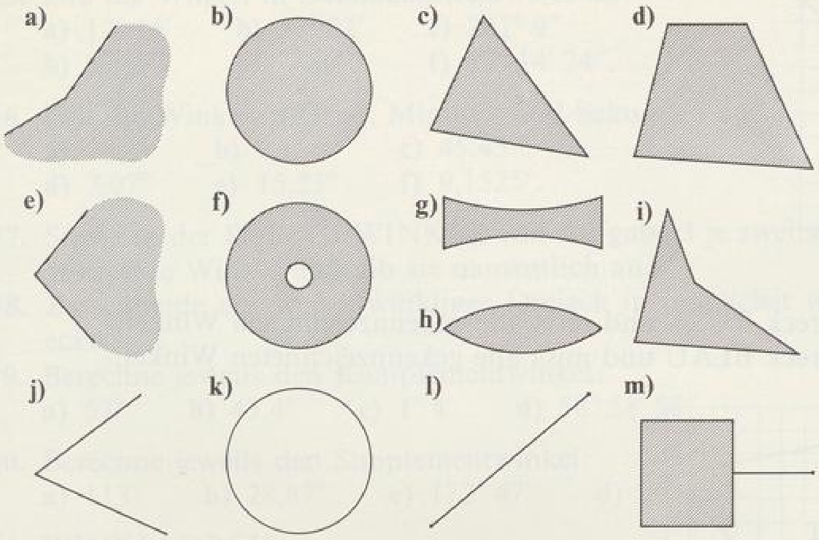
3. GEWINKEL
Zeichne die Figur ins Heft und kennzeichne folgende Winkel mit griechischen Buchstaben und Bögen:
$\alpha = \sphericalangle BAU$ $\quad \beta = \sphericalangle USA$ $\quad \gamma = \sphericalangle SAU$ $\quad \delta = \sphericalangle BAS$
$\varepsilon = \sphericalangle SEA$ $\quad \xi = \sphericalangle EDU$ $\quad \eta = \sphericalangle UDS$ $\quad \vartheta = \sphericalangle B$.



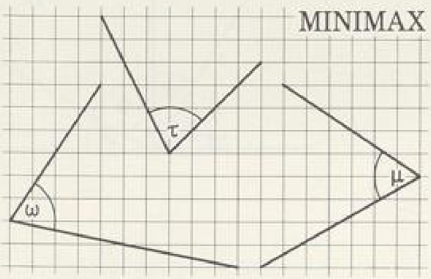
4. Gegeben ist der Winkel $\sphericalangle TIP$.
Wo liegen alle Punkte X mit der Eigenschaft:
a) $\sphericalangle TIP = \sphericalangle TIX$, **b)** $\sphericalangle TIP = \sphericalangle XIP$?

•5. **a)** Zwei Geraden schneiden sich. Wie viele Winkel entstehen?
b) Drei Geraden schneiden sich in einem Punkt S.
Wie viele Winkel entstehen?

6. KONVEX – KONKAV
Welche der folgenden Figuren sind konvex bzw. konkav?
(Zur Figur gehört immer der Rand und die schraffierte Fläche.)

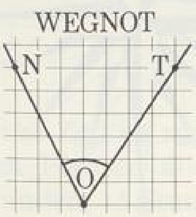


7. MINIMAX
Zeichne die Winkel ω, τ und μ ins Heft und bestimme durch Konstruktion den größten und kleinsten Winkel.

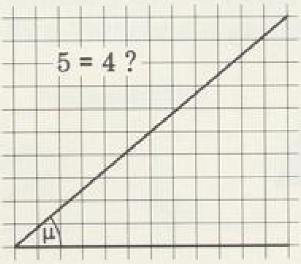


8. Zeichne ein Dreieck ABC und eine Strecke [SX].
a) Übertrage $\sphericalangle$ A so, dass [SX einer seiner Schenkel ist.
b) Übertrage $\sphericalangle$ A so, dass [XS einer seiner Schenkel ist.
c) Konstruiere den Summenwinkel $\sphericalangle A + \sphericalangle B$.
d) Konstruiere den Summenwinkel $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C$.

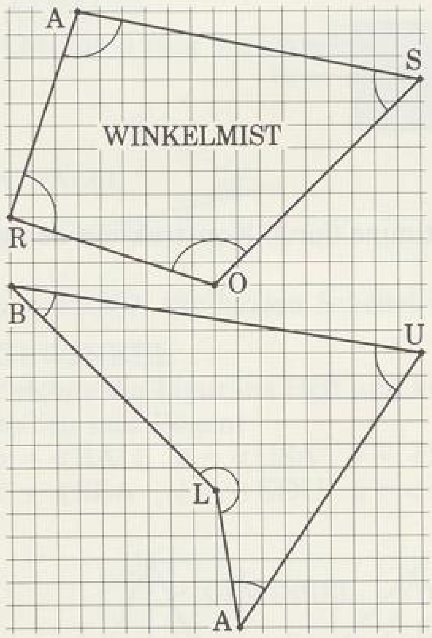
9. WEGNOT
Zeichne $\sphericalangle$NOT und konstruiere den Differenzwinkel eines gestreckten Winkels und $\sphericalangle$NOT.



10. $5 = 4$?
Zeichne den Winkel μ ins Heft.
Konstruiere die Winkel 4μ und 5μ. Was fällt auf?

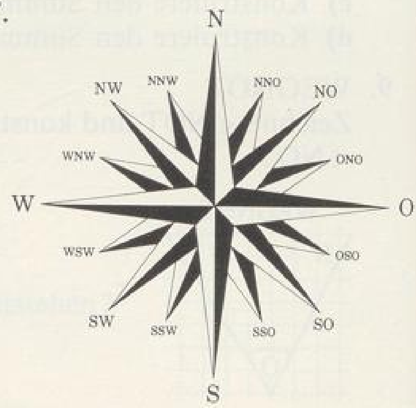


11. WINKELMIST
a) Zeichne das Viereck ROSA und miss alle gekennzeichneten Winkel.
b) Zeichne das Viereck BLAU und miss alle gekennzeichneten Winkel.



12. Zeichne die Winkel:
$\sphericalangle BAD = 30°$, $\sphericalangle LEO = 77°$, $\sphericalangle RAD = 111°$,
$\sphericalangle URI = 175°$, $\sphericalangle OHR = 218°$, $\sphericalangle AUS = 315°$.

13. WINDROSE
Wie groß ist der Winkel zwischen den Himmelsrichtungen
a) N und NO,
b) SO und SW,
c) NNO und O,
d) SSW und NNW?



14. Wie groß ist der Winkel, den Stunden- und Minutenzeiger bilden um
a) 13.00 Uhr, **b)** 19.00 Uhr, **c)** 9.30 Uhr,
d) 8.45 Uhr, **e)** 16.10 Uhr, **f)** 11.11 Uhr?

15. Gib die Winkel in Dezimalschreibweise an:
a) $12°\,15'$ **b)** $37°\,21'$ **c)** $241°\,9''$
b) $57°\,57'$ **e)** $7'\,30''$ **f)** $17°\,14'\,24''$.

16. Gib die Winkel in Grad, Minuten und Sekunden an:
a) $18{,}5°$ **b)** $0{,}1°$ **c)** $45{,}45°$
d) $7{,}07°$ **e)** $15{,}23°$ **f)** $9{,}1525°$.

17. Suche in der Figur GEWINKEL von Aufgabe **3** je zwei spitze, rechte, stumpfe und gestreckte Winkel und gib sie namentlich an.

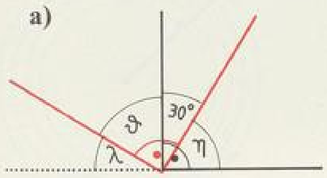
:18. Zerschneide ein stumpfwinkliges Dreieck in möglichst wenige spitzwinklige Dreiecke.

19. Berechne jeweils den Komplementwinkel:
a) $57°$ **b)** $43{,}4°$ **c)** $1°\,4'$ **d)** $58°\,58'\,58''$.

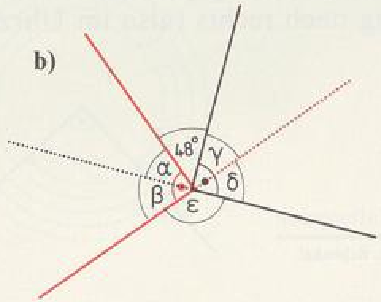
20. Berechne jeweils den Supplementwinkel:
a) $113°$ **b)** $28{,}87°$ **c)** $172°\,47'$ **d)** $79°\,49''$.

21. WINKELDREH
a) Berechne η, ϑ und λ.
b) Berechne α, β, γ, δ und ε.

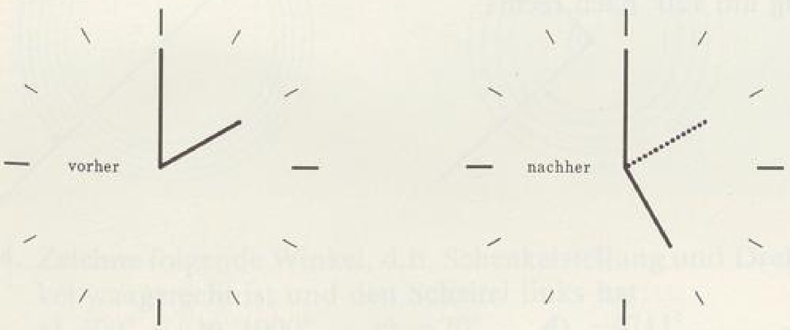
a)



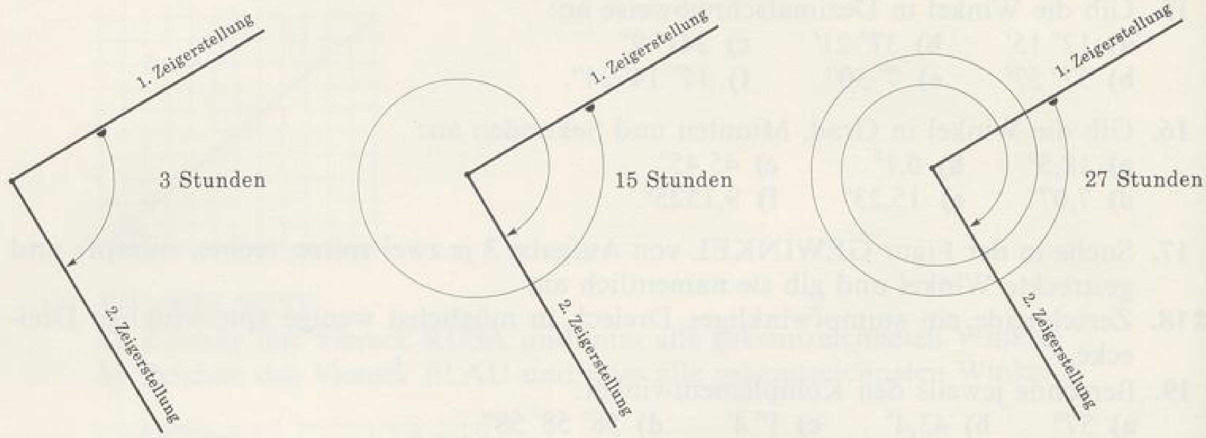
b)



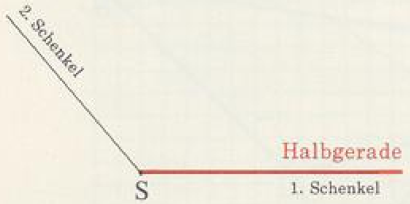
2.4 Drehwinkel



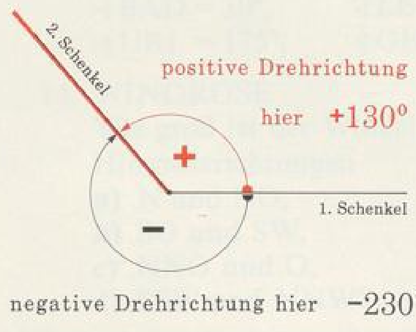
Welche Zeit ist zwischen den beiden Zeigerstellungen der Uhr verstrichen? Die geometrischen Figuren allein genügen nicht, um die Antwort eindeutig zu geben: Es können 3 Stunden, 15 Stunden, 27 Stunden usw. vergangen sein. Für eine eindeutige Antwort müssen wir wissen, wie viel ganze Drehungen der Stundenzeiger gemacht hat. Zur Klärung solcher Fragen verwendet man in der Geometrie den Drehwinkel. Der Drehwinkel unterscheidet sich vom geometrischen Winkel in drei Dingen:



1. Es gibt einen **ersten** und einen **zweiten** Schenkel.
2. Wir stellen uns vor: Eine Halbgerade deckt sich zunächst mit dem ersten Schenkel. Dann dreht sie sich so um den Scheitel S, dass sie mit dem zweiten Schenkel zusammenfällt. Es gibt zwei Drehrichtungen:
   Die Drehung nach links (also gegen den Uhrzeigersinn) zählt man in der Mathematik positiv, die Drehung nach rechts (also im Uhrzeigersinn) negativ.

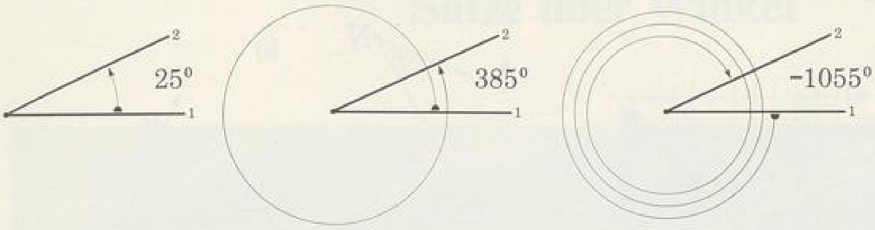


   Die Einheit des Drehwinkelmaßes ist 1°, genauso wie beim geometrischen Winkel. Das Vorzeichen gibt die Drehrichtung an:
   $\varphi = \quad 70°$ bedeutet Drehung um 70° nach links.
   $\psi = -120°$ bedeutet Drehung um 120° nach rechts.



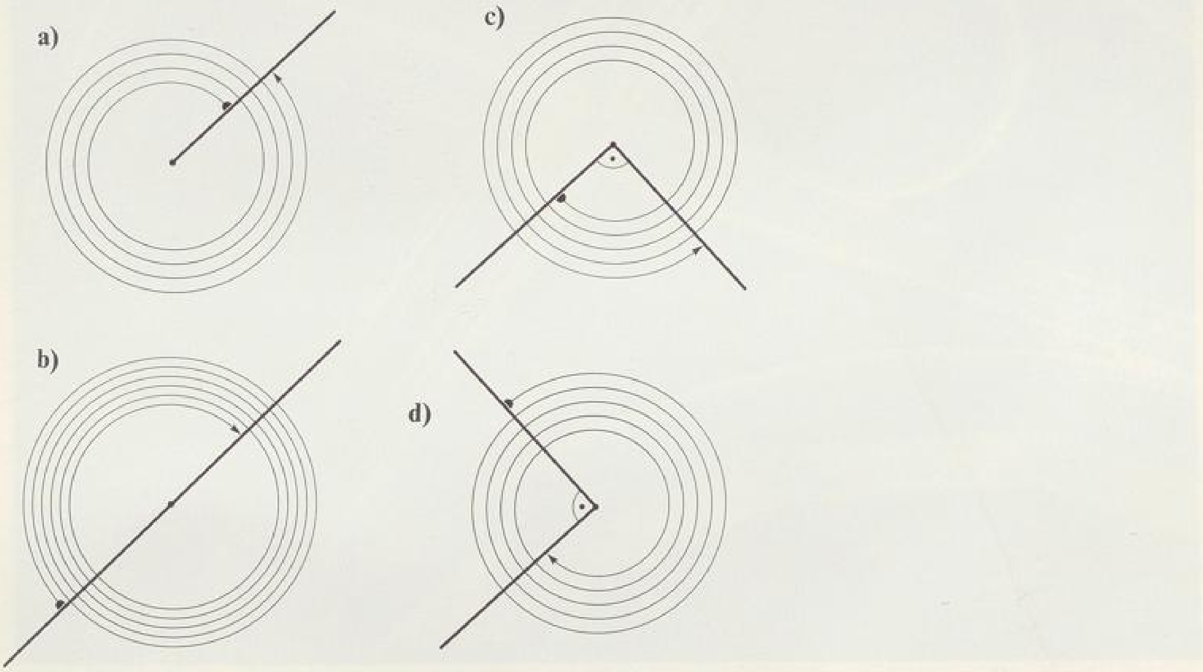
3. Beim Drehwinkel sind auch Winkelgrößen über 360° sinnvoll. Jede Volldrehung nach links vergrößert den Drehwinkel um 360°, jede Volldrehung nach rechts vermindert ihn

um 360°. Die geometrische Figur ändert sich bei Volldrehungen nicht. In der Zeichnung kennzeichnen wir den Drehwinkel mit Pfeil und Bogen.



Aufgaben zu 2.4

1. Zeichne einen geometrischen Winkel von 47°.
   Gib drei positive und drei negative Drehwinkel an, die diese Schenkelstellung liefern.
2. Welchen Drehwinkel überstreicht
   a) der kleine Zeiger **b)** der große Zeiger
   einer Uhr in 7,5 Stunden?
3. DREHWURM
   Wie groß ist jeweils der Drehwinkel?



4. Zeichne folgende Winkel, d.h. Schenkelstellung und Drehspirale, wenn der erste Schenkel waagerecht ist und den Scheitel links hat:
   a) 400° **b)** 1000° **c)** −70° **d)** −4711°.
5. Eine Langspielplatte dreht sich in drei Minuten 100-mal.
   Um welchen Winkel dreht sie sich während des Beatles-Songs »Let it be« (Spieldauer vier Minuten)?

6. RADLERMASS

Ein Mexikaner radelt von A nach B. Addiere alle Winkel, um die er sich dabei dreht. Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?