Anschauliche Geometrie

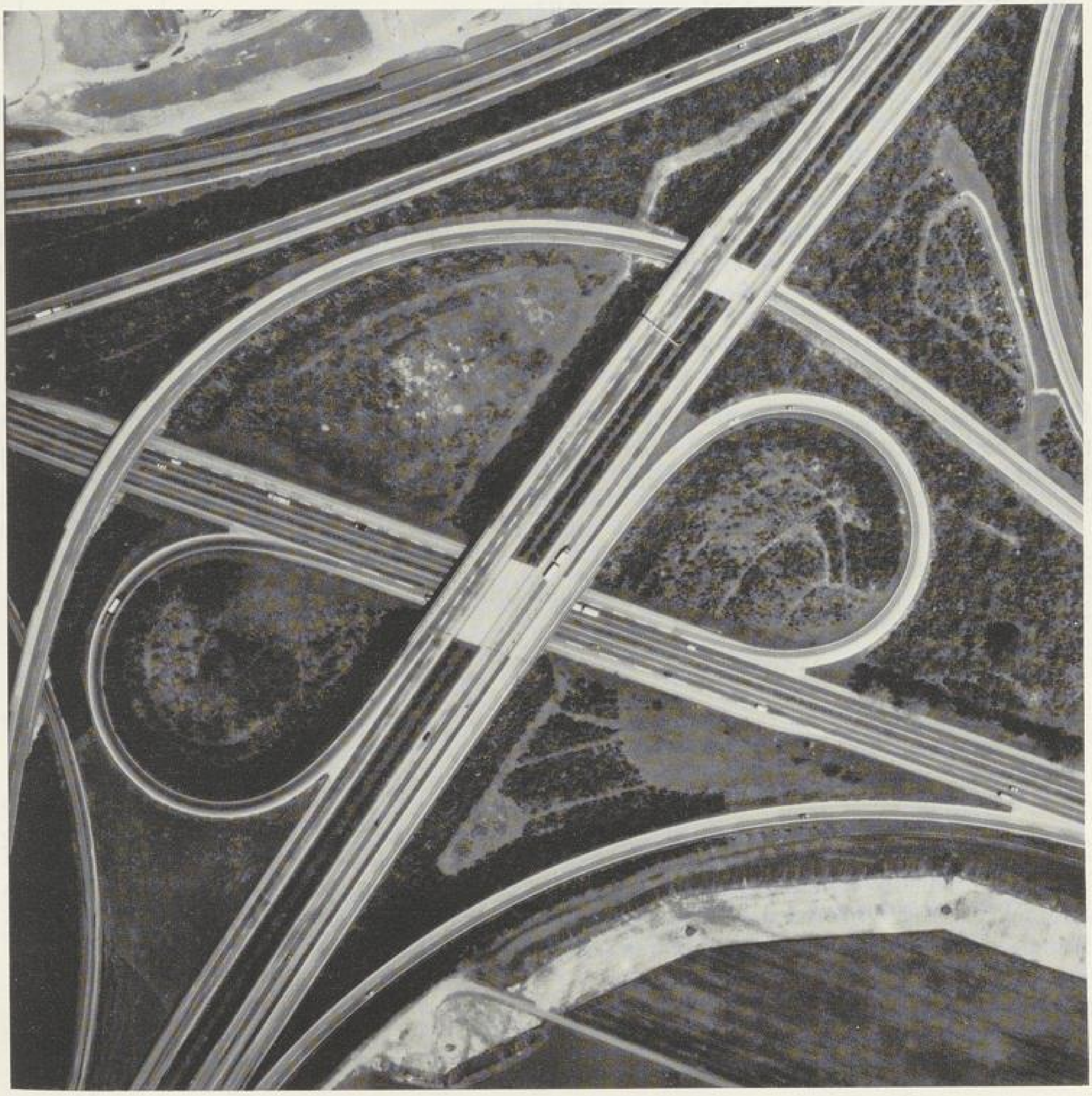
Barth, Friedrich

München, 2001

3. Kapitel: Sätze über Winkel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

3. Kapitel
Sätze über Winkel



3.1 Was ist ein Satz in der Mathematik?

Das Wort Satz hat vielerlei Bedeutungen:

Ein Text besteht aus Sätzen.
Eine Sinfonie hat vier Sätze.
Ein Tennismatch dauert höchstens fünf Sätze.
Zusammengehörige Briefmarken ergeben einen Satz.
Die Zukunft liest man aus dem Kaffeesatz.
Flöhe machen oft Riesensätze.

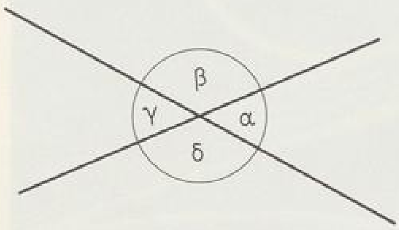
All das meint der Mathematiker nicht, wenn er von einem Satz spricht.

Der Mathematiker erkennt Zusammenhänge zwischen mathematischen Gebilden, wie zum Beispiel Geraden, Winkeln, Dreiecken ... Einen solchen Zusammenhang beschreibt er in einem (mathematischen) Satz, gelegentlich sagt man dazu auch Lehrsatz. Ein Beispiel aus dem Zahlenrechnen ist der Satz:

Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist,
dann ist auch die Zahl selber durch 3 teilbar.

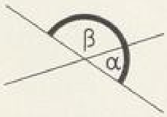
Das Kernstück jedes mathematischen Gebiets ist das Gerüst seiner Sätze. Immer wenn man eine Behauptung begründen will, muss man auf diese Sätze zurückgreifen. In diesem Kapitel suchen wir Sätze über Winkel.

3.2 Geradenkreuzung



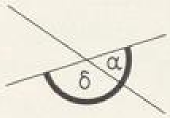
Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, nennt man eine **Geradenkreuzung.** Im Bild sehen wir die Winkel α, β, γ, δ. Zwei Winkel mit einem gemeinsamen Schenkel, deren andere Schenkel eine Gerade bilden, heißen **Nebenwinkel** (z. B. α und β). Die Summe von Nebenwinkeln ergibt einen gestreckten Winkel, also gilt der

Satz:
Nebenwinkel ergeben zusammen 180°.
Nebenwinkel sind Supplementwinkel.

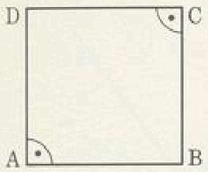

$\alpha + \beta = 180°$


$\gamma + \delta = 180°$

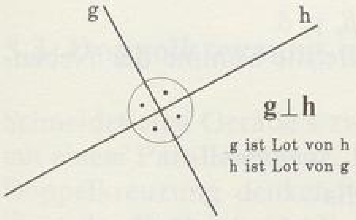

$\beta + \gamma = 180°$


$\delta + \alpha = 180°$

Umgekehrt stimmt's nicht:
Zwei Supplementwinkel müssen keine Nebenwinkel sein.
∢A und ∢C sind Supplementwinkel, aber keine Nebenwinkel.



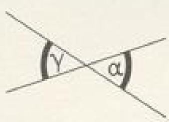
Sind alle vier Winkel einer Kreuzung gleich groß, also 90°, so stehen die Geraden aufeinander senkrecht, in Zeichen $g \perp h$. Man nennt g **Lot** der Gerade h bzw. h Lot der Gerade g.



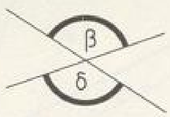
Winkel einer Geradenkreuzung, die nur den Scheitel gemeinsam haben, sich also gegenüberliegen, heißen **Scheitelwinkel.** Scheitelwinkel sind kleiner als 180°. α und γ sind Scheitelwinkel. β ist Nebenwinkel von beiden, deshalb ist

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha + \beta = 180° & \text{also} & \alpha = 180° - \beta \\ \gamma + \beta = 180° & \text{also} & \gamma = 180° - \beta \end{array}\right\} \quad \text{und damit } \alpha = \gamma.$$

$\alpha = \gamma$.



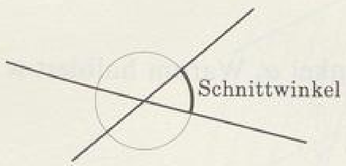
$\alpha = \gamma$



$\beta = \delta$

Satz:
Scheitelwinkel sind gleich groß.

Je zwei der vier Winkel einer Geradenkreuzung sind also gleich groß. Als **Schnittwinkel** der beiden Geraden nimmt man den Winkel, der kleiner oder gleich 90° ist.



Aufgaben zu 3.2

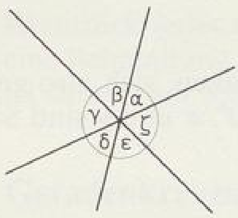
1. Ein Winkel α ist
   a) doppelt **b)** dreimal **c)** halb **d)** 17-mal
   so groß wie sein Nebenwinkel α^*.
   Wie groß sind α und α^*?

2. Ein Winkel α ist um
   a) 10° größer **b)** 10° kleiner **c)** 90° größer **d)** 1′ kleiner
   als sein Nebenwinkel α^*.
   Wie groß sind α und α^*?

3. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ.
   Verlängere jede Seite über die Ecken hinaus und konstruiere die Summe der drei Nebenwinkel α^*, β^* und γ^*.

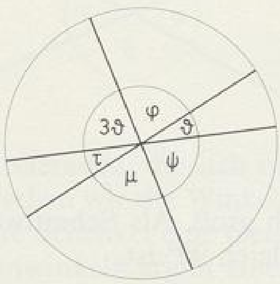
4. Zeichne ein konvexes Viereck ABCD mit den Winkeln α, β, γ, δ.
   Verlängere jede Seite über die Ecken hinaus und konstruiere die Summe der Nebenwinkel α^*, β^*, γ^* und δ^*.

5. GERADENBÜSCHEL

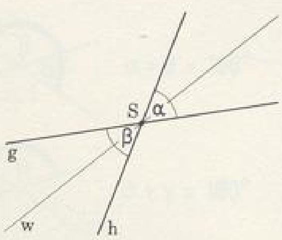


Berechne alle fehlenden Winkel, falls
a) $\alpha = 27°$, $\varepsilon = 130°$ **b)** $\alpha = 14{,}2°$, $\beta = 93{,}8°$
c) $\alpha + \beta = 170°$, $\gamma + \delta = 40°$ **d)** $\alpha + \delta = 58° = \gamma + \xi$.

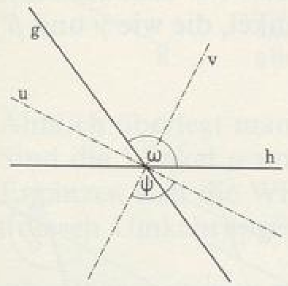
•6. TETATORTE
Gib φ, τ, μ, ψ in Abhängigkeit von ϑ an.



7. WINKELHALBIERUNG
g und h schneiden sich in S. Die Gerade w halbiert den Winkel α. Warum halbiert w auch den Winkel β?



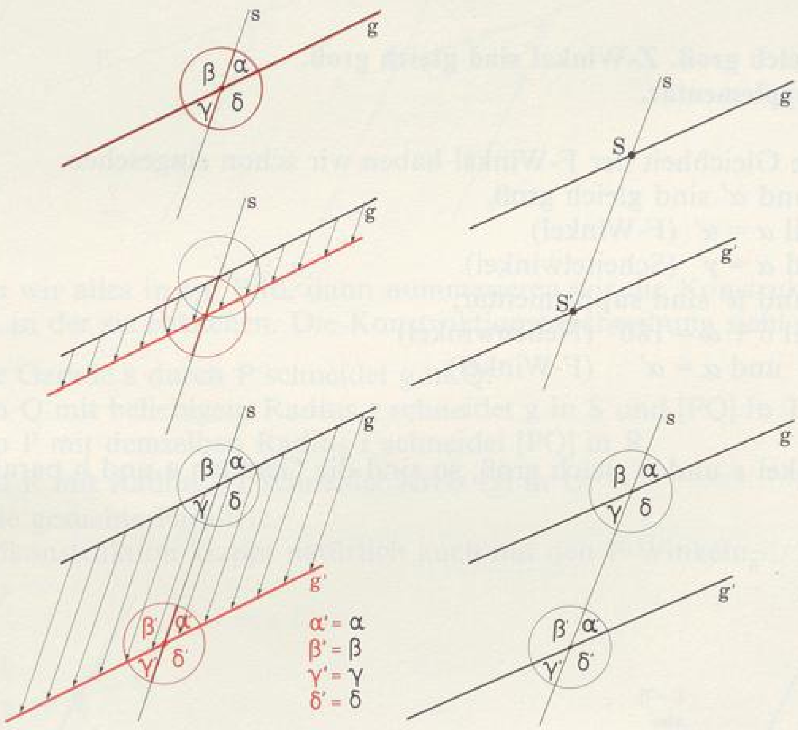
8. DIE WINKELHALBIERENDEN
Die Gerade v halbiert den Winkel ω, u halbiert den Nebenwinkel.
Wie groß ist der Winkel ψ zwischen u und v, falls
a) $\omega = 117°$ **b)** ω beliebig ist?



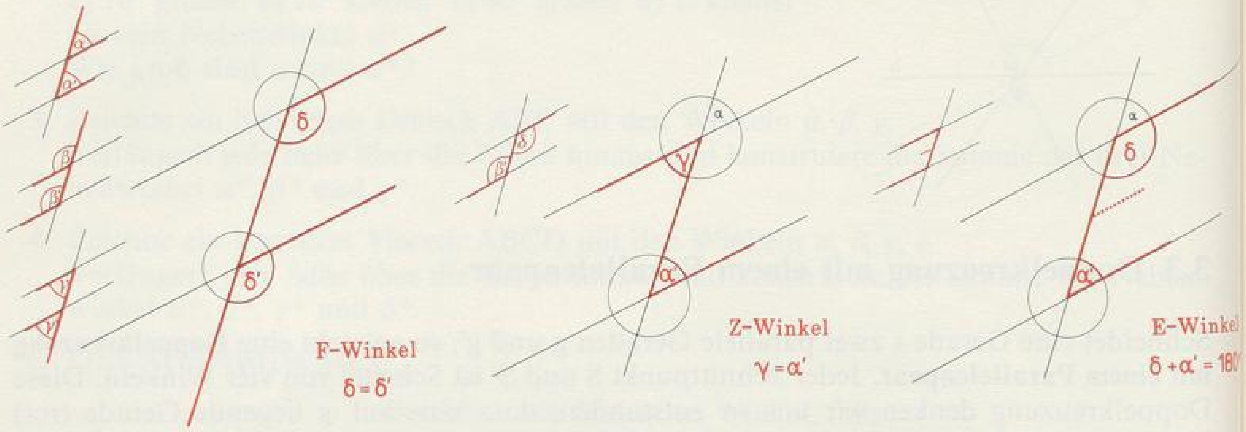
3.3 Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar

Schneidet eine Gerade s zwei parallele Geraden g und g', so entsteht eine **Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar.** Jeder Schnittpunkt S und S' ist Scheitel von vier Winkeln. Diese Doppelkreuzung denken wir uns so entstanden, dass eine auf g liegende Gerade (rot) längs der Gerade s verschoben wird. Weil sich die Gerade dabei nicht dreht, ändern sich auch die Winkel nicht. Deshalb gilt:

$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$
$\delta = \delta'$.



Je zwei dieser gleich liegenden und gleich großen Winkel heißen **F-Winkel** oder auch **Stufenwinkel.**
Die Winkel γ und α' erinnern an den Buchstaben Z. Sie heißen deshalb **Z-Winkel** oder auch **Wechselwinkel.** Auch die Winkel, die wie δ und β' liegen, nennen wir Z-Winkel.
Die Winkel δ und α' erinnern an ein E (wenn wir uns den Mittelstrich dazudenken). Sie heißen deshalb **E-Winkel** oder auch **Nachbarwinkel.** Auch die Winkel, die wie γ und β' liegen, nennen wir E-Winkel.

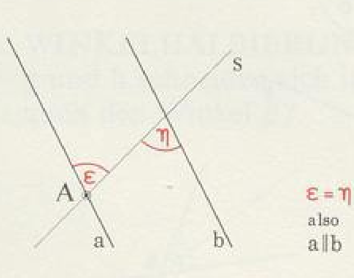


Bei einer Doppelkreuzung mit parallelen Geraden gilt der

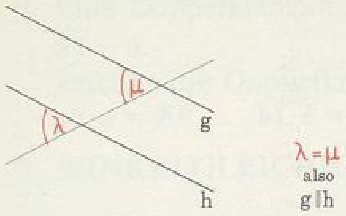
Satz:
F-Winkel sind gleich groß. Z-Winkel sind gleich groß.
E-Winkel sind supplementär.

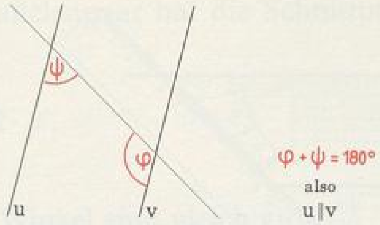
Begründung: Die Gleichheit der F-Winkel haben wir schon eingesehen.
γ und α' sind gleich groß,
weil $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel)
und $\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel).
δ und α' sind supplementär,
weil $\delta + \alpha = 180°$ (Nebenwinkel)
und $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel).

Umgekehrt gilt:
1. Sind alle Winkel ε und η gleich groß, so sind die Geraden a und b parallel.



Begründung: Denkt man sich durch A die Parallele zu b, so schließt sie mit der Gerade s einen Winkel der Größe $\eta (= \varepsilon)$ ein, weil der Z-Winkel-Satz gilt. Die Gerade a tut dasselbe, also ist a parallel zu b.





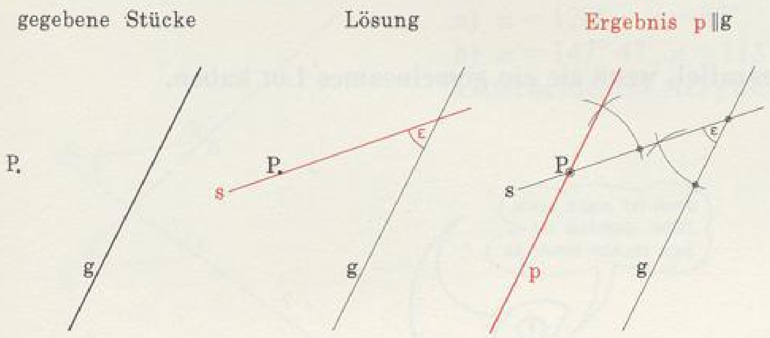
Ähnlich überlegt man sich:

2. Sind die Winkel μ und λ gleich groß, so sind die Geraden g und h parallel.
3. Ergänzen sich die Winkel φ und ψ zu 180°, so sind die Geraden u und v parallel.
Mit diesen Umkehrungen ist es möglich, Parallelen zu konstruieren.

3. Grundkonstruktion: Parallele durch einen Punkt

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Durch P soll die Parallele p zu g konstruiert werden. Die gegebenen Stücke sind gezeichnet.

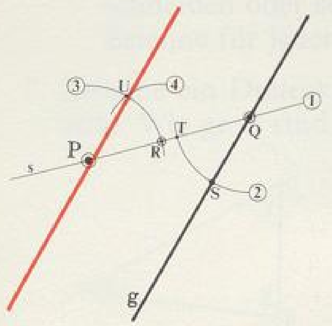
Lösung: 1. Zeichne durch P irgendeine Gerade s, die g schneidet.
2. Konstruiere in P den Z-Winkel zu ε.

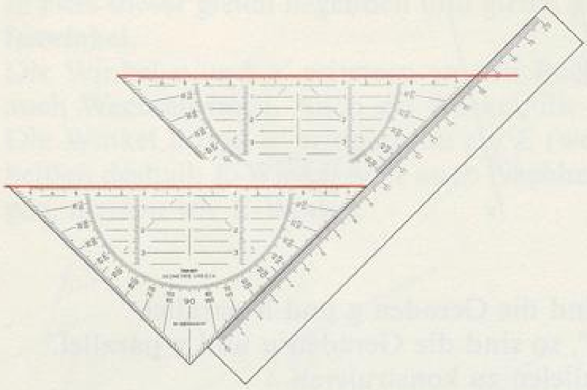


Konstruieren wir alles in ein Bild, dann nummerieren wir die Konstruktionslinien in der Reihenfolge, in der sie entstehen. Die Konstruktionsbeschreibung sieht so aus:

① Beliebige Gerade s durch P schneidet g in Q.
② Kreis um Q mit beliebigem Radius r schneidet g in S und [PQ] in T.
③ Kreis um P mit demselben Radius r schneidet [PQ] in R.
④ Kreis um R mit Radius $\overline{ST}$ schneidet Kreis ③ in U.
⑤ PU ist die gesuchte Parallele.

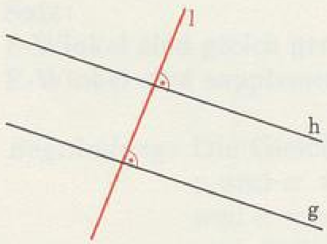
Diese Grundkonstruktion klappt natürlich auch mit den F-Winkeln.





Zum schnellen Zeichnen gehen wir so vor: Mit dem Geodreieck und einem festgehaltenen Lineal verschieben wir einen F-Winkel und zeichnen damit eine Parallele zu einer gegebenen Gerade. Streng genommen ist dies keine Konstruktion, sondern nur ein Behelf, weil wir dabei einen starren Winkel verschieben. Trotzdem werden wir künftig Parallelen meistens so zeichnen, es geht schneller und ist genauso genau.
Der Sonderfall, dass die Schnittgerade s senkrecht auf den Parallelen steht, enthält ein wichtiges Kennzeichen für Parallelen:

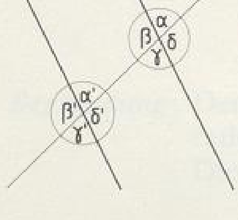
Satz:
Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot haben.



$g \perp l$ und $h \perp l$ also $g \parallel h$

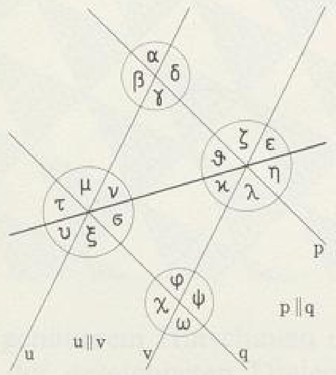
Aufgaben zu 3.3

1. Bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelpaar ist bekannt:
a) $\alpha = 35°$ **b)** $\beta = 135°$ **c)** $\gamma' = 87{,}7°$ **d)** $\delta = 123° \, 45'$
Berechne alle übrigen Winkel.



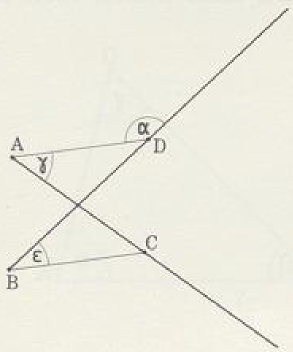
2. Eine Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar hat die Schnittpunkte S und T mit $\overline{ST} = 6$.
Zeichne die Doppelkreuzung, falls
a) $\alpha = 90°$ **b)** $\delta = 32°$ **c)** $\alpha = 2 \cdot \beta'$.

3. WINKELGLEICHHEIT



Welche Winkel sind gleich groß?

4. Im Bild ZWICKZANGE sind folgende Winkel bekannt:

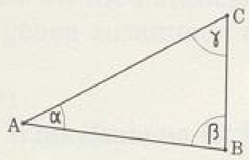


a) $\alpha = 128°$, $\varepsilon = 52°$, $\gamma = 42°$
b) $\alpha = 147°\,47'$, $\varepsilon = 113°\,53'$, $\gamma = 32°\,13'$.
Entscheide, ob $AD \parallel BC$.

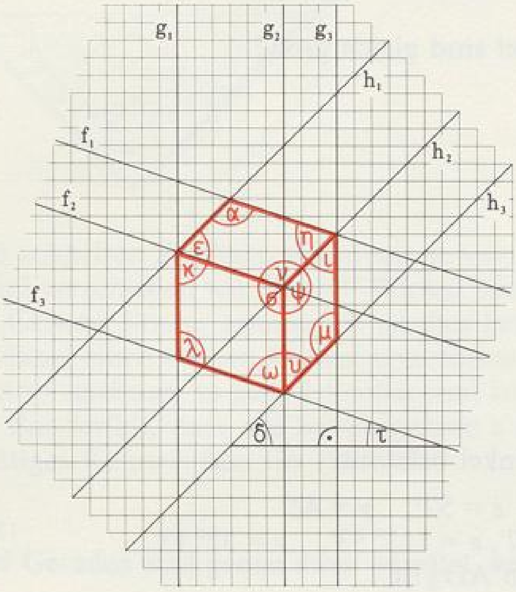
5. Was folgt für die Geraden g und h, wenn man von der Geraden u weiß
a) $g \parallel u$ und $u \parallel h$ **b)** $g \perp u$ und $u \perp h$
c) $g \parallel u$ und $u \perp h$ **d)** $g \perp u$ und $u \parallel h$?

6. a und b sind zwei Strecken, l_a und l_b sind die Lote durch die Mittelpunkte dieser Strecken.
a) Was kann man über die Strecken sagen, wenn sich die Lote schneiden bzw. nicht schneiden?
b) Was kann man über die Lote sagen, wenn sich die Strecken schneiden bzw. nicht schneiden oder sogar parallel sind?
Zeichne für jeden Fall ein Bild.

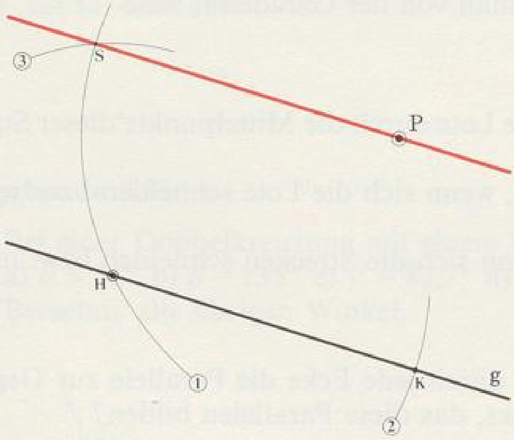
7. Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere durch jede Ecke die Parallele zur Gegenseite. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks, das diese Parallelen bilden?



8. PARALLELENTRIOS
Je drei Parallelen kreuzen sich und erzeugen die rote Figur.
Berechne die roten Winkel
a) für $\tau = 18°$, $\delta = 45°$ **•b)** allgemein aus δ und τ.

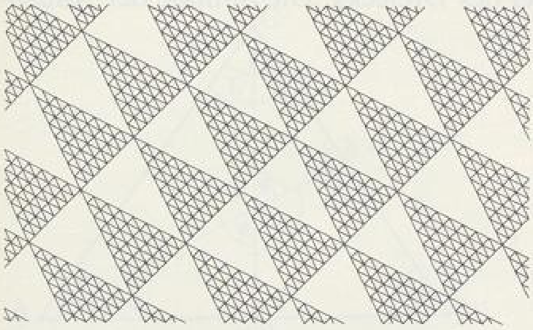


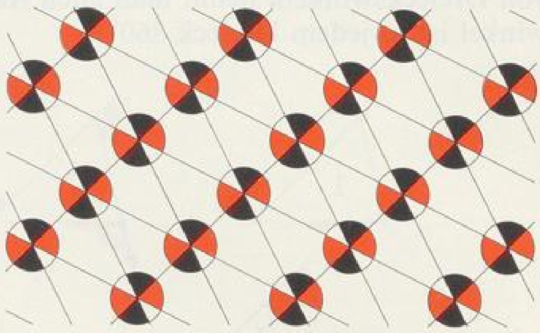
•9. Konstruiere durch P die Parallele g nach dem Plan:
① Kreis um P mit beliebigem Radius r schneidet g in H.
② Kreis um H mit demselben Radius r schneidet g in K.
③ Kreis um H mit Radius $\overline{PK}$ schneidet Kreis ① in S.
④ PS ist die gesuchte Parallele.
Warum ist die so konstruierte Gerade PS parallel zu g?



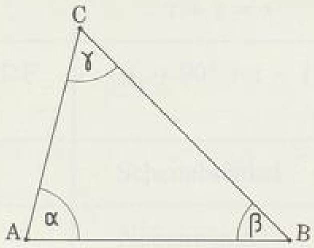
3.4 Winkelsumme im Dreieck

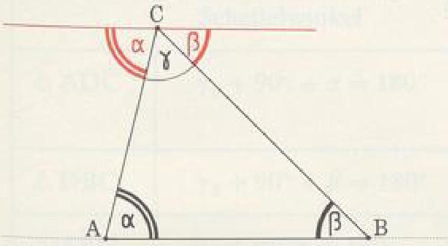
Im Bild sehen wir lauter gleiche Dreiecke, sie fügen sich lückenlos zu einem Parkett. Eignet sich jedes Dreieck zum Auslegen einer Fläche?





Bei genauerem Hinschauen merkt man, dass die drei Winkel (weiß, rot und schwarz) jedes der gezeichneten Dreiecke zusammen einen gestreckten Winkel ergeben. Offenbar taugt zum Parkettieren der Ebene jedes Dreieck, bei dem gilt: Summe der Winkel = 180°. Man sieht leicht, dass jedes Dreieck diese Eigenschaft hat:





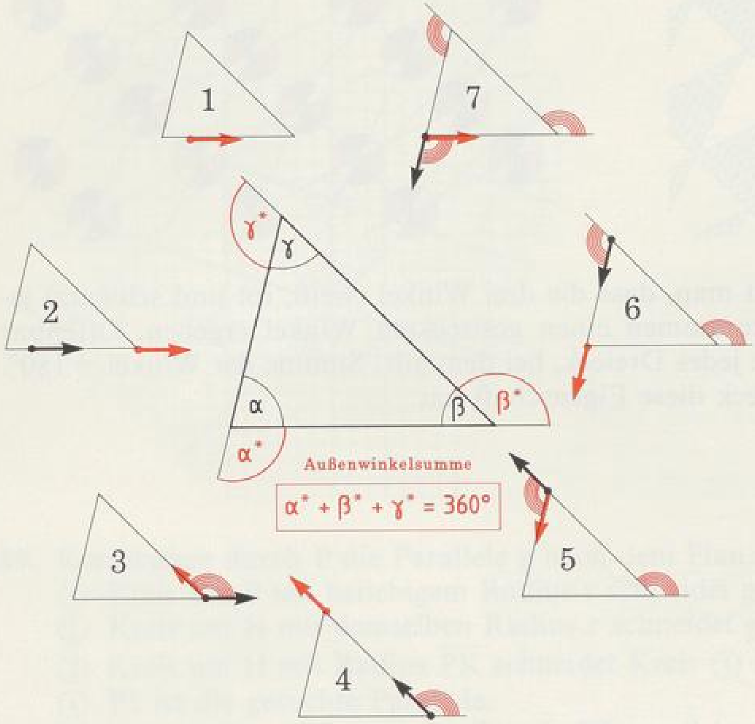
Winkelsumme

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β und γ. Durch C zeichnen wir die Parallele zu AB. Dabei entstehen bei C die Winkel α und β als Z-Winkel, sie ergeben zusammen mit γ dort einen gestreckten Winkel.

Satz:
Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck 180°.

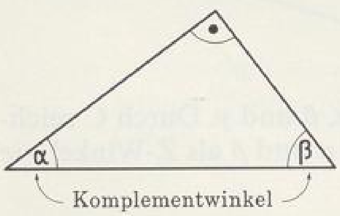
Diesen Satz kann man auch noch anders einsehen:
Ein Pfeil wandert um ein Dreieck. An jeder Ecke dreht er sich nach links um den Nebenwinkel des jeweiligen Dreieckswinkels. Schließlich erreicht er wieder die Ausgangslage, nachdem er eine volle Drehung ausgeführt hat. Diese Drehung setzt sich zusammen aus den drei Drehungen um α^*, β^* und γ^*, das heißt $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 360°$. Die Nebenwinkel von Dreieckswinkeln nennt man auch **Außenwinkel** des Dreiecks. Die Summe der Außenwinkel ist in jedem Dreieck 360°.



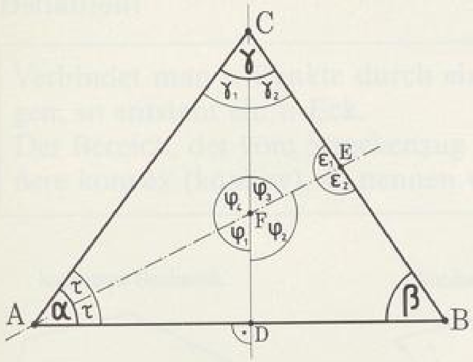
Diese Außenwinkelsumme hilft uns nun weiter:

$$\begin{aligned}
(\alpha + \alpha^*) + (\beta + \beta^*) + (\gamma + \gamma^*) &= 180° + 180° + 180° \\
\alpha + \beta + \gamma + \underbrace{\alpha^* + \beta^* + \gamma^*} &= 180° + 360° \\
\alpha + \beta + \gamma + \quad 360° \quad &= 180° + 360° \\
\alpha + \beta + \gamma &= 180°.
\end{aligned}$$

Sonderfall: Rechtwinkliges Dreieck.
Ist zum Beispiel $\gamma = 90°$, so sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.



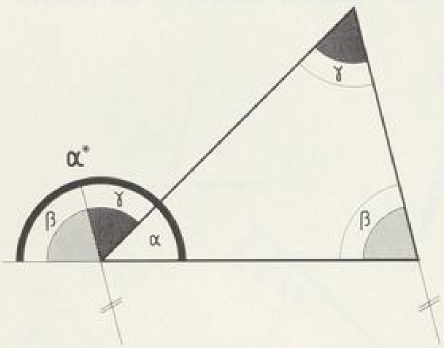
In einem Beispiel wenden wir den Winkelsummensatz an:
Im Dreieck ABC sind β und γ bekannt. Drücke alle andern Winkel mit β und γ aus.
Wir gehen immer so vor: Wir suchen Dreiecke, von denen wir zwei Winkel kennen, und berechnen den dritten.



Dreieck	Idee	Rechnung	Ergebnis
△ ABC	$\alpha+\beta+\gamma=180°$ $\tau+\tau=\alpha$	$\tau=\frac{1}{2}\alpha$	$\alpha=180°-\beta-\gamma$ $\tau=90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
△ ADF	$\varphi_1+90°+\tau=180°$	$\varphi_1=180°-90°-\tau=$ $=90°-(90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varphi_1=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_3=\varphi_1$	$\varphi_3=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varphi_2+\varphi_1=180°$ $\varphi_2=180°-\varphi_1$	$\varphi_2=180°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_4=\varphi_2$	$\varphi_4=180°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
△ ADC	$\gamma_1+90°+\alpha=180°$	$\gamma_1=180°-90°-\alpha=$ $=90°-(180°-\beta-\gamma)$	$\gamma_1=\beta+\gamma-90°$
△ DBC	$\gamma_2+90°+\beta=180°$	$\gamma_2=180°-90°-\beta$	$\gamma_2=90°-\beta$
△ AEC	$\varepsilon_1+\gamma+\tau=180°$	$\varepsilon_1=180°-\gamma-\tau=$ $=180°-\gamma-(90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_1=90°+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varepsilon_1+\varepsilon_2=180°$ $\varepsilon_2=180°-\varepsilon_1=$ $=180°-(90°+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_2=90°-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$

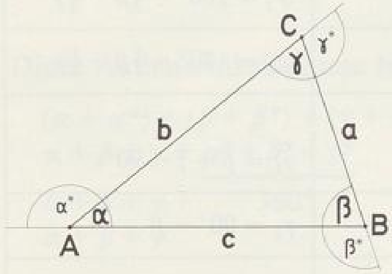
Zwischen Innen- und Außenwinkeln eines Dreiecks besteht ein weiterer einfacher Zusammenhang:

Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Außenwinkel: $\alpha + \alpha^* = 180°$
$\alpha^* = \beta + \gamma.$



Satz:
Ein Außenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Übliche Bezeichnungen am Dreieck:
Die Ecken heißen A, B, C. Sie sind so angeordnet, dass man beim Wandern von A über B nach C das Innere des Dreiecks links liegen lässt.
Die Innenwinkel bei A, B und C heißen α, β und γ, zugehörige Außenwinkel heißen α^*, β^* und γ^*.
Nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt nennt man die Seiten a, b und c.



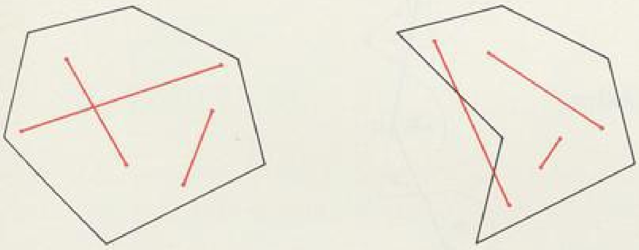
3.5 Winkelsumme in Vielecken

Vielecke heißen nach der Anzahl ihrer Ecken Dreieck, Viereck, Fünfeck, ..., n-Eck.
Allgemein definieren wir:

Definition:

> Verbindet man n Punkte durch einen geschlossenen Streckenzug ohne Überschneidungen, so entsteht ein n-Eck.
> Der Bereich, der vom Streckenzug umschlossen ist, heißt Inneres des n-Ecks. Ist das Innere konvex (konkav), so nennen wir auch das n-Eck konvex (konkav).

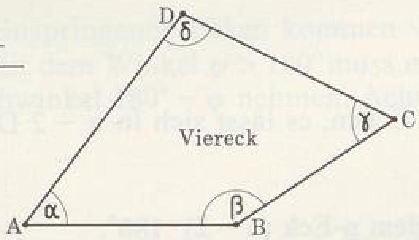
konvexes Sechseck   konkaves Sechseck

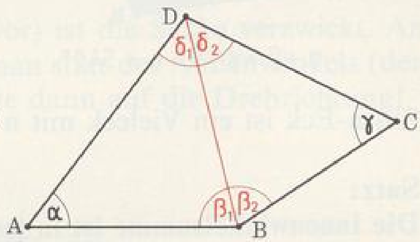


Unter der Winkelsumme in einem Vieleck versteht man die Summe der Winkelmaße. Sie errechnet sich aus der Winkelsumme im Dreieck, wenn man das Vieleck geeignet in Teildreiecke zerlegt.

Beim Viereck schaut das so aus:

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta_1 + \qquad \delta_1 = 180^\circ \\ \qquad \beta_2 + \gamma + \delta_2 = 180^\circ \quad + \\ \hline \alpha + \beta \;+ \gamma + \delta \;= 360^\circ. \end{array}$$

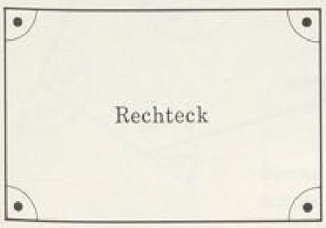




$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

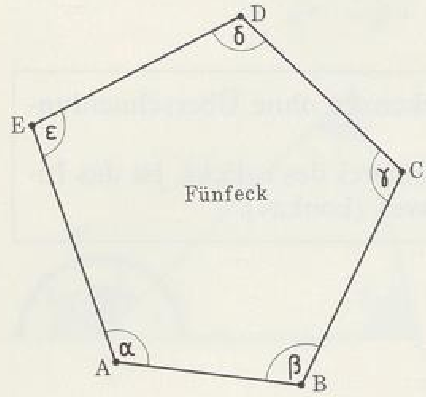
Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem Viereck 360°.

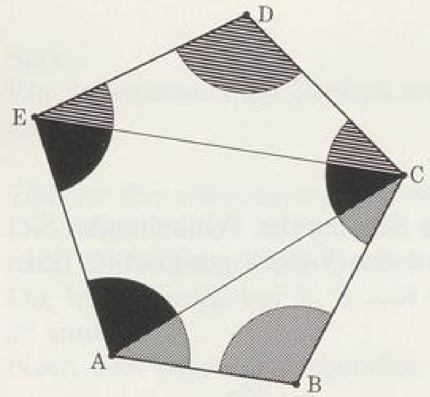
Sonderfall: Ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln, also mit vier rechten Winkeln, heißt **Rechteck.**



Jedes Fünfeck lässt sich in drei Dreiecke zerlegen; deshalb gilt der

Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem Fünfeck $3 \cdot 180° = 540°$.

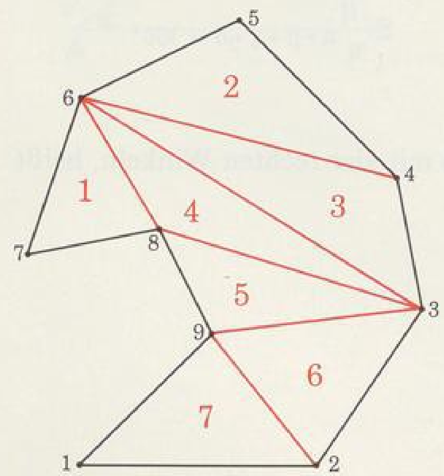




$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$

Ein n-Eck ist ein Vieleck mit n Ecken, es lässt sich in $n - 2$ Dreiecke zerlegen. Also gilt:

Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem n-Eck $(n - 2) \cdot 180°$.

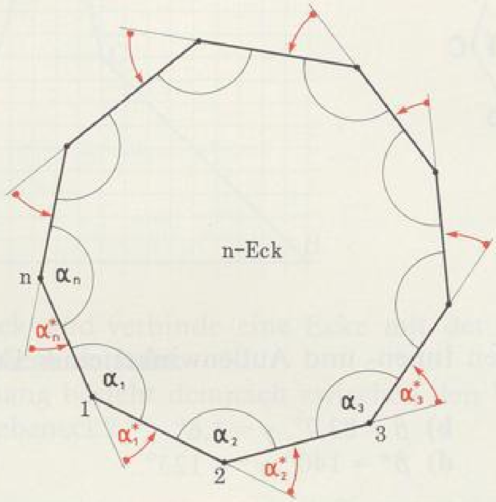


Lassen wir einen Pfeil linksrum um ein konvexes n-Eck wandern, dann dreht er sich insgesamt um 360°. Weil er sich dabei an jeder Ecke um den Außenwinkel dreht, ist wie im Dreieck die Summe der Außenwinkel 360°. Auch aus diesem Außenwinkelsummensatz folgt der Satz über die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks:

$$(\alpha_1 + \alpha_1^*) + (\alpha_2 + \alpha_2^*) + \ldots + (\alpha_n + \alpha_n^*) = n \cdot 180°$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \underbrace{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_n^*}_{360°} = (n-2) \cdot 180° + 2 \cdot 180°$$

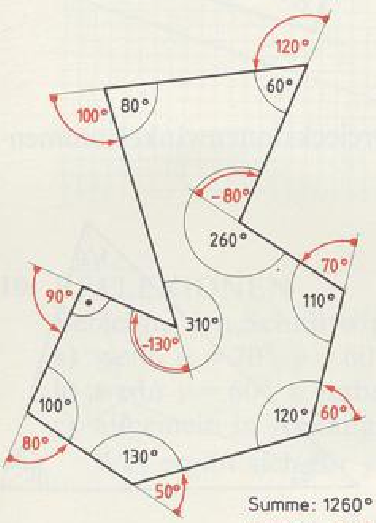
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2) \cdot 180°$$



Innenwinkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 180°(n-2)$

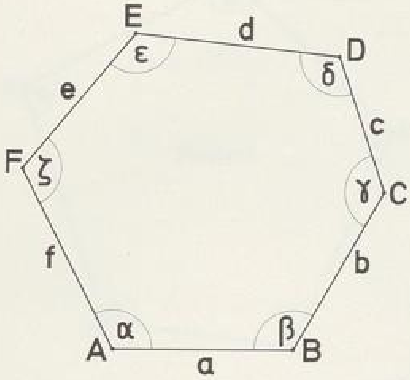
Außenwinkelsumme $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* + \ldots + \alpha_n^* = 360°$

Bei konkaven Vielecken (einspringende Ecken kommen vor) ist die Sache verzwickt. An der einspringenden Ecke mit dem Winkel $\varphi > 180°$ muss man statt des Außenwinkels (den es dort nicht gibt) als Drehwinkel $180° - \varphi$ nehmen. Achte dann auf die Drehrichtung!



Summe: 1260°
Summe: 360°

Übliche Bezeichnungen am Vieleck:
Die Eckpunkte bezeichnet man meist in alphabetischer Reihenfolge mit A, B, C …, sodass beim Wandern von A nach B usw. das Innere des Vielecks immer links liegt. Die Innenwinkel heißen bei A beginnend der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Anders als beim Dreieck nennt man die Seiten bei A beginnend a, b, c, …



Aufgaben zu 3.4 und 3.5

1. Berechne die restlichen Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks, von dem bekannt ist:
a) $\alpha = 35°, \beta = 135°$ **b)** $\beta = 83{,}7°, \gamma = 1{,}6°$
c) $\alpha = 24°, \beta^* = 42°$ **d)** $\beta^* = 140°, \gamma^* = 123°$.

•2. Gibt es ein Dreieck mit
a) $\alpha = 90°, \beta^* = 90°$ **b)** $\alpha + \beta = 95°, \beta + \gamma = 85°$
c) $\alpha^* = 90°, \alpha + \beta = 170°$ **d)** $\alpha^* = \beta^* = 60°$?

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist
a) $\alpha = 53°$ **b)** $\alpha = \beta$ **c)** $\alpha = 199\beta$ **d)** $\alpha^* = 90°$ **e)** $\alpha = 2\beta$.
Wie groß ist β?

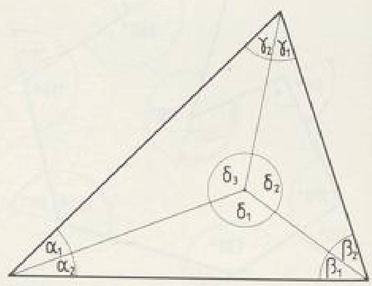
4. In einem Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist
a) $\gamma = 40°$ **b)** $\gamma = 3\alpha$ **c)** $\beta + \gamma = 140°$ **d)** $\alpha = \gamma$.
Wie groß ist α?

⁝5. TRUGSCHLUSS
Geobold hat einen scha(r)fsinnigen Beweis für den Dreiecksinnenwinkelsummensatz.
Σ = Winkelsumme im Dreieck

$$\underbrace{\alpha_2+\beta_1+\delta_1}_{\Sigma} + \underbrace{\beta_2+\gamma_1+\delta_2}_{\Sigma} + \underbrace{\gamma_2+\alpha_1+\delta_3}_{\Sigma} = 3\Sigma$$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1+\alpha_2}_{\alpha} + \underbrace{\beta_1+\beta_2}_{\beta} + \underbrace{\gamma_1+\gamma_2}_{\gamma}}_{\Sigma} + \underbrace{\delta_1+\delta_2+\delta_3}_{360°} = 3\Sigma$$

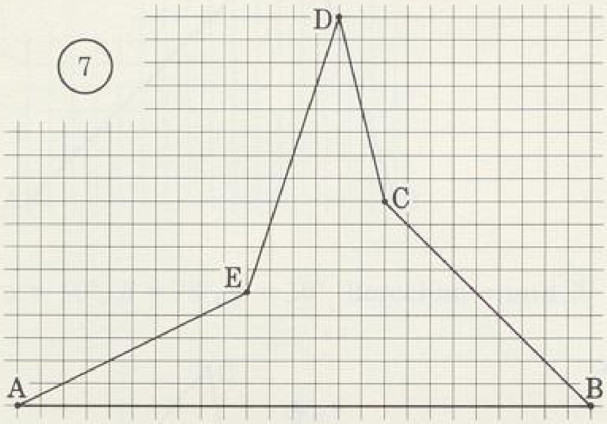
$$\begin{aligned} \Sigma + 360° &= 3\Sigma \\ 360° &= 2\Sigma \\ 180° &= \Sigma \end{aligned}$$



Was ist faul? – Was hat er wirklich bewiesen?

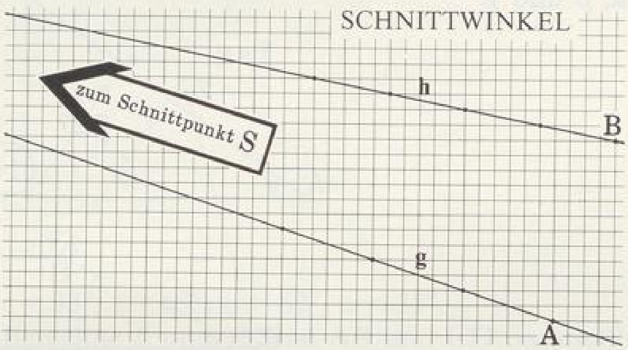
6. Berechne den bzw. die unbekannten Winkel eines Vierecks, von dem bekannt ist:
a) $\alpha = 40°, \beta = 80°, \gamma = 173°$ **b)** $\alpha = \beta = \gamma, \delta = 84°$
c) $\alpha = 2\beta = 3\gamma = 4\delta$ **d)** $\alpha = \beta, \gamma = \delta = 60°$.

7. Zeichne das Fünfeck ABCDE, miss seine Innenwinkel und berechne ihre Summe.

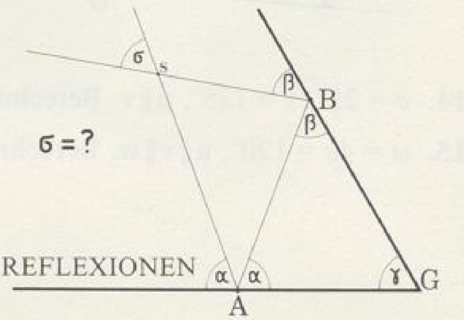


8. Zeichne ein Siebeneck und verbinde eine Ecke mit der übernächsten so, dass ein Dreieck und ein Sechseck entsteht.
Welcher Zusammenhang besteht demnach zwischen den Winkelsummen von Dreieck, Sechseck und Siebeneck?

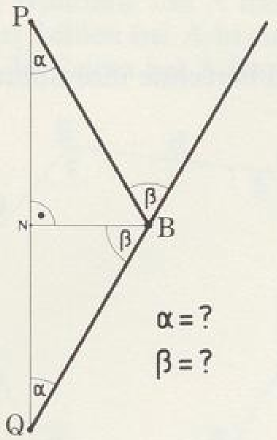
9. SCHNITTWINKEL
Zeichne die Geraden g und h und ermittle ihren Schnittwinkel
a) mit dem Winkelsummensatz fürs Dreieck ABS
b) mittels geeigneter Parallelverschiebung der Gerade g.



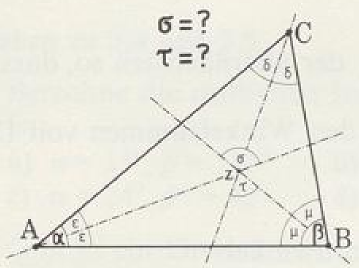
10. REFLEXIONEN
Berechne den Schnittwinkel σ
a) wenn $\alpha = 70°, \gamma = 60°$
b) wenn $\gamma = 60°$, α unbekannt
c) allgemein in Abhängigkeit von γ.
Was ergibt sich für $\gamma = 45°$ bzw. $\gamma = 90°$?



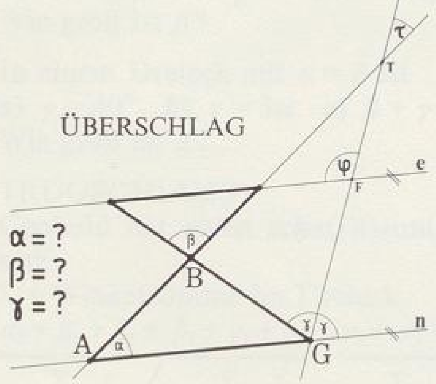
11. YPSILON Berechne α und β.

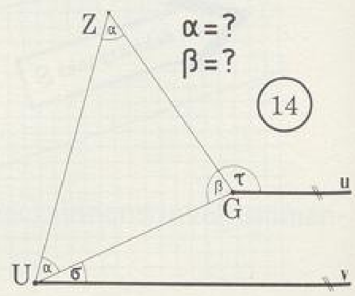


12. $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$. Berechne σ und τ.



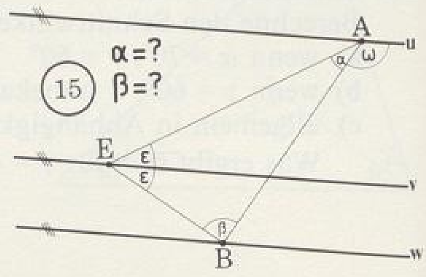
13. ÜBERSCHLAG
$\varphi = 110°$, $\tau = 30$, $e \parallel n$. Berechne α, β und γ.



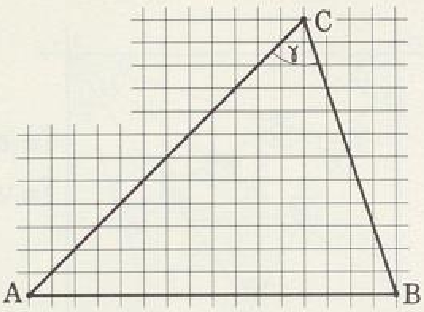


14. $\sigma = 25°$, $\tau = 125°$, $u \parallel v$. Berechne α und β.

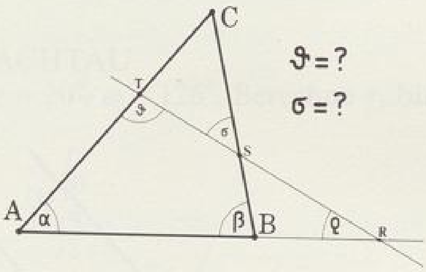
15. $\omega = 4\varepsilon = 120°$, $u \parallel v \parallel w$. Berechne α und β.



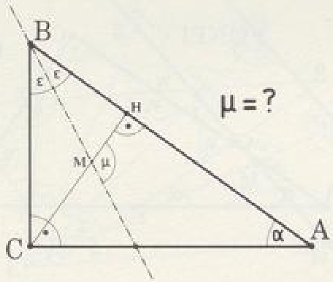
16. Zeichne das Dreieck ABC. Konstruiere durch C eine Gerade, die AB unter dem Winkel γ schneidet.



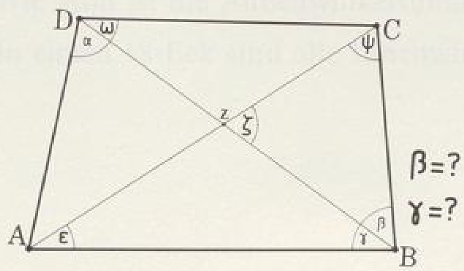
17. $\alpha = 50°$, $\beta = 78°$, $\varrho = 30°$. Berechne σ und ϑ.



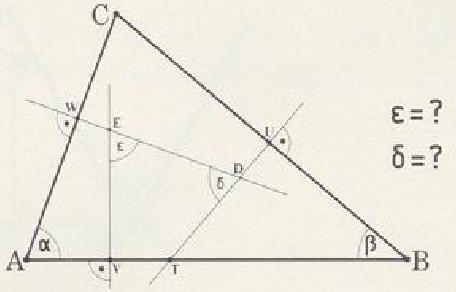
18. $\alpha = 36°$. Berechne μ.



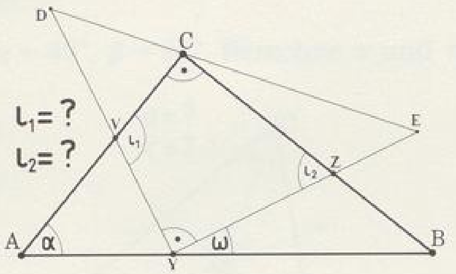
19. $\varepsilon = 33°$, $\xi = 69°$, $\varphi = 62°$, $\omega = 35°$.
Berechne β und γ. Sind AB und CD parallel?



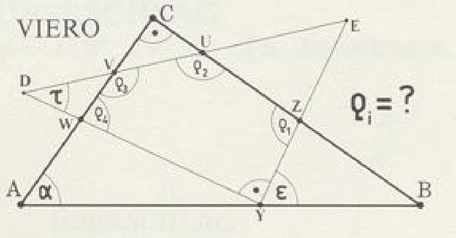
20. $\alpha = 70°$, $\beta = 40°$. Berechne ε und δ.

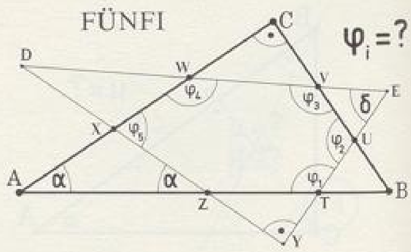


21. ZWEIOTA
$\alpha = 51°$, $\omega = 26°$. Berechne ι_1 und ι_2.



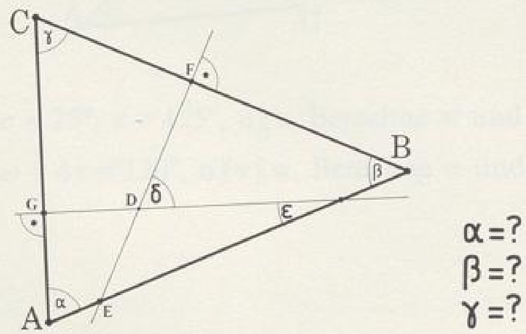
22. VIERO
$\alpha = 55°$, $\varepsilon = 65°$, $\tau = 38°$. Berechne ϱ_1 bis ϱ_4.



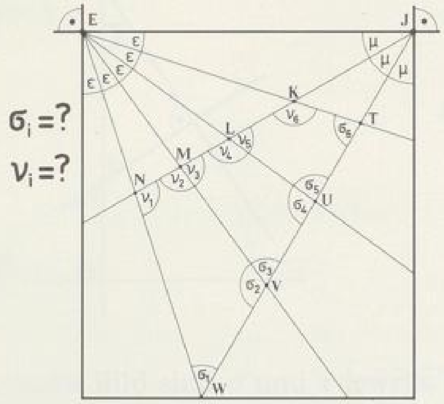


23. FÜNFI
$\alpha = 34°$, $\delta = 60°$. Berechne φ_1 bis φ_5.

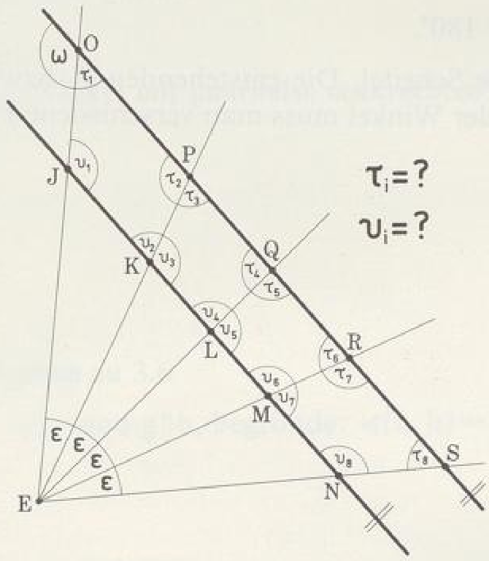
24. $\delta = 65°$, $\varepsilon = 20°$. Berechne α, β und γ.



25. SECHSIG
Berechne σ_1 bis σ_6 und ν_1 bis ν_6.



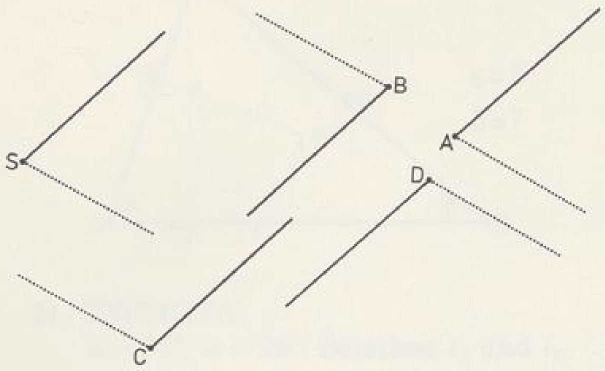
26. ACHTAU
$\varepsilon = 20°$, $\omega = 126°$. Berechne τ_1 bis τ_8 und υ_1 bis υ_8.



27. Wie groß ist die Innenwinkelsumme in einem konvexen Zehneck?
Wie groß ist die Außenwinkelsumme?

28. In einem 18-Eck sind alle Innenwinkel gleich groß. Wie groß ist einer?

3.6 Paarweise parallele, paarweise senkrechte Schenkel

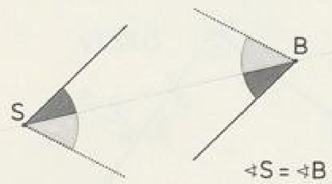


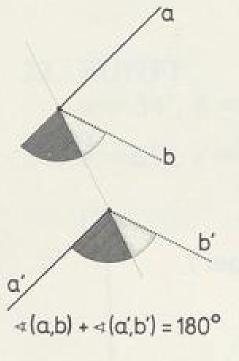
Betrachten wir immer nur ein Paar der gezeichneten Winkel, so sehen wir, dass je zwei Schenkel parallel sind. Man sagt: Die Schenkel sind paarweise parallel. Die zugehörigen Winkel sind entweder gleich groß:

$\sphericalangle S = \sphericalangle A = \sphericalangle B$

oder supplementär: $\sphericalangle S + \sphericalangle C = 180°$, $\sphericalangle S + \sphericalangle D = 180°$.

Zur Begründung legen wir eine Gerade durch die Scheitel. Die entstehenden Z- bzw. F-Winkel bestätigen die Behauptung. Je nach Lage der Winkel muss man verschiedene Fälle unterscheiden. Zwei Fälle führen wir vor:

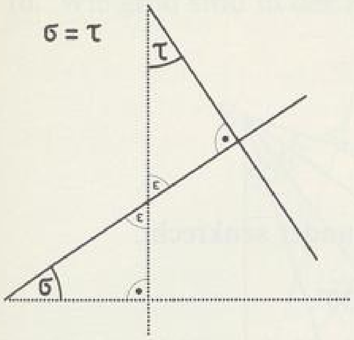


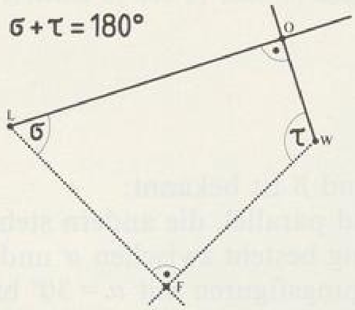


Es ergibt sich der

Satz:
Zwei Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln sind gleich groß oder supplementär.

Wir werden es noch öfter mit Figuren zu tun haben, die Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln enthalten. Die Bilder zeigen die beiden wichtigsten Fälle:





Im ersten Bild sind σ und τ jeweils Komplementwinkel zu ε, sie sind also gleich groß. Im zweiten Bild sehen wir das Viereck WOLF. Für seine Winkelsumme gilt:

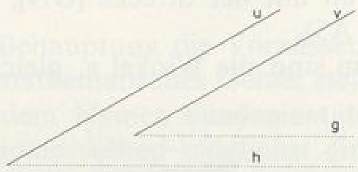
$$\sigma + \tau + 90° + 90° = 360°$$
$$\sigma + \tau = 180°.$$

Allgemein gilt der

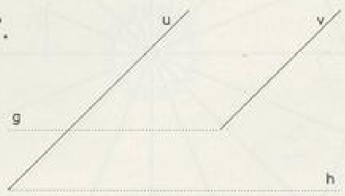
Satz:
Zwei Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln sind gleich groß oder supplementär.

Aufgaben zu 3.6

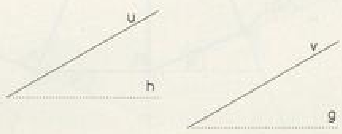
1. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) = \sphericalangle(v, g)$.



2. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) + \sphericalangle(v, g) = 180°$.



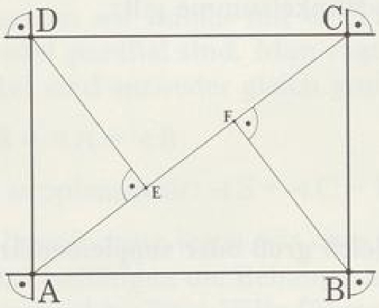
3. $u \parallel v$ und $g \parallel h$, begründe: $\sphericalangle(u, h) = \sphericalangle(v, g)$.



4. u ∥ v und g ∥ h, begründe: $\sphericalangle(u, h) + \sphericalangle(v, g) = 180°$.

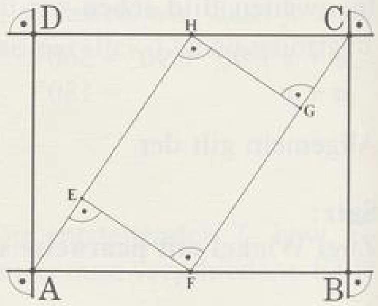
5. Von zwei Winkeln α und β ist bekannt:
Die einen Schenkel sind parallel, die andern stehen aufeinander senkrecht.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und β?
Zeichne zuerst Überlegungsfiguren mit $\alpha = 30°$ bzw. $\alpha = 130°$.

6. Suche in der Figur Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln und kennzeichne gleich große Winkel mit gleicher Farbe.



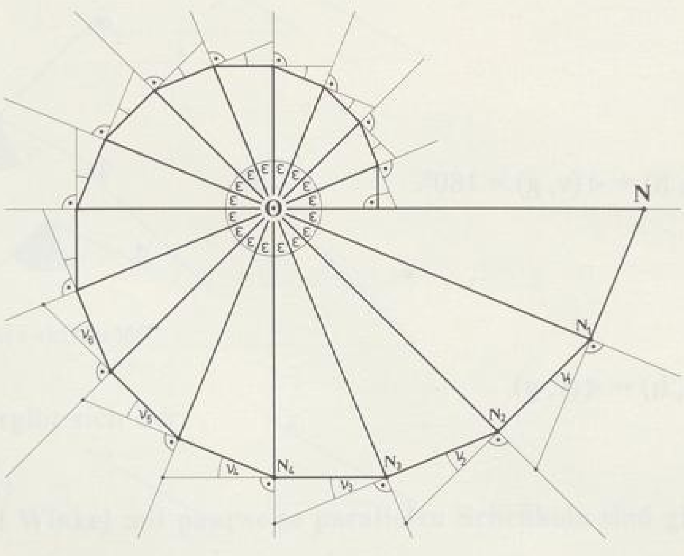
6

7



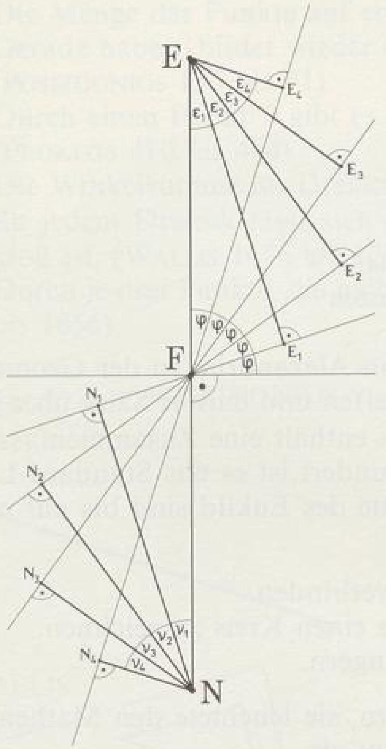
7. Suche in der Figur Winkel mit paarweise senkrechten Schenkeln und kennzeichne gleich große Winkel mit gleicher Farbe.

8. DREIECKSCHNECKE
Zeichne die Schnecke aus lauter rechtwinkligen Dreiecken.
Fang an mit der Strecke [ON], zeichne sie 14 cm lang (DIN A4) bzw. 10 cm lang (DIN A5).
Warum sind die Winkel ν_i gleich groß? Wie groß sind sie?



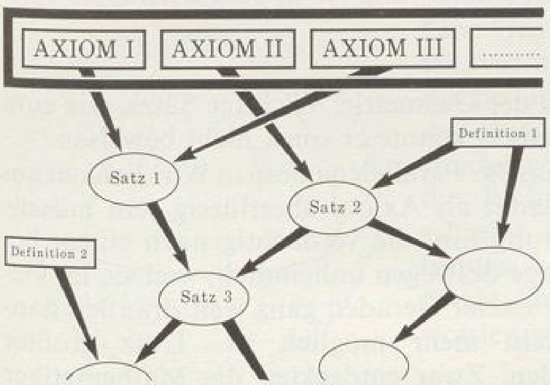
9. Von den Geraden g, h, u und v ist bekannt: $g \perp u$, $h \perp v$ und $\sphericalangle(u, v) = 40°$. Berechne alle weiteren Schnittwinkel dieser Geraden.

10. Wie groß sind in der Figur die Winkel ε_1 bis ε_4 und ν_1 bis ν_4?



3.7 Parallelenaxiom

In der Wissenschaft ist es guter Brauch, bei jeder Behauptung die Voraussetzungen zu nennen, auf die sich die Behauptung stützt. Für ein mathematisches Gebiet stellt man die zu Grunde liegenden Voraussetzungen meist unter dem Namen **Fundamentalsätze** oder auch **Postulate** oder **Axiome** zusammen. Diese Axiome sollten möglichst einleuchtend sein, denn sie werden nicht bewiesen, sondern bilden die Grundlage des gesamten logischen Geflechts, das man aus Sätzen und Definitionen knüpft.

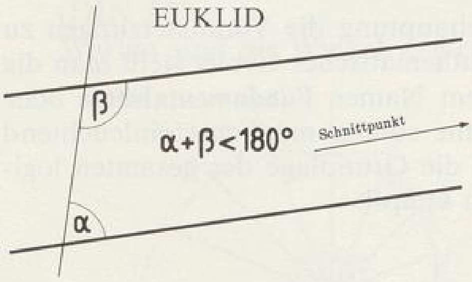


Euklid
Gemälde von Max Ernst 1945
Menil Foundation Inc. Houston

Um 300 v. Chr. lehrte der Grieche EUKLID Mathematik in Alexandria. In der Geometrie hat er als einer der ersten ein System von Axiomen geschaffen und daraus Sätze über geometrische Figuren abgeleitet. Sein Buch »Die Elemente« enthält eine Zusammenfassung des geometrischen Wissens seiner Zeit. Bis ins 20. Jahrhundert ist es das Standard-Lehrbuch der Geometrie in den Schulen gewesen. Die Axiome des Euklid sind bis auf eines sehr plausibel, so fordert er zum Beispiel:

Es ist immer möglich, zwei Punkte mit einer Strecke zu verbinden.
Es ist immer möglich, um jeden Punkt mit jedem Radius einen Kreis zu zeichnen.
Es ist immer möglich, eine Strecke beliebig weit zu verlängern.

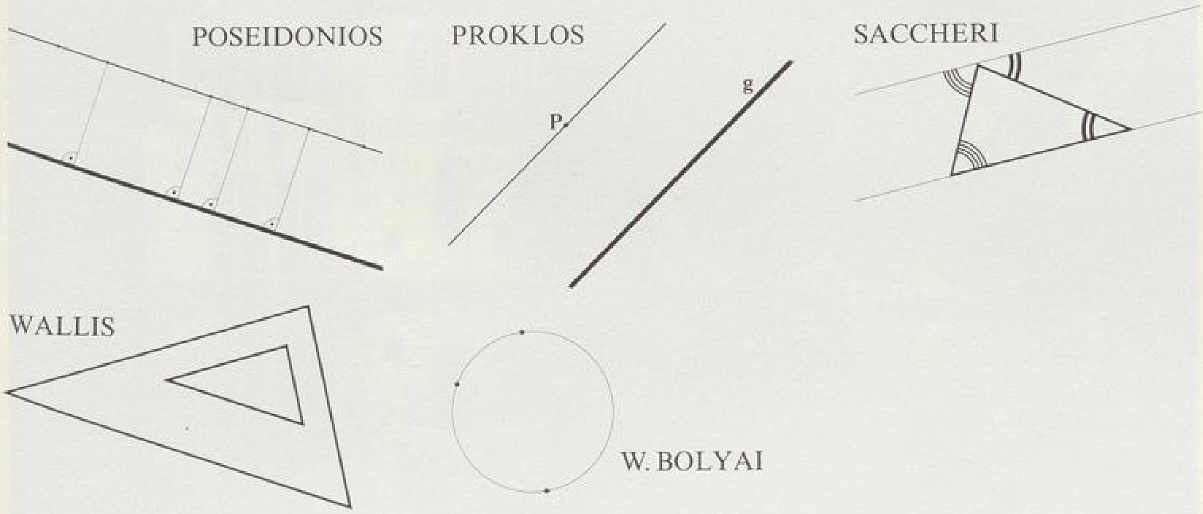
Aber eine Forderung ist viel komplizierter als alle andern, sie leuchtete den Mathematikern lange Zeit nicht so ein. Es ist das 11. Axiom, bekannt als
Parallelenaxiom:
Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei rechte Winkel, dann schneiden sie sich.



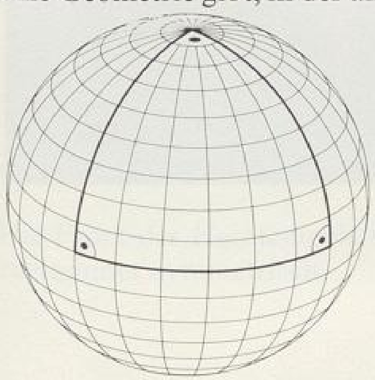
Euklid brauchte dieses Axiom zu seinem Aufbau der Geometrie. Wichtige Sätze, wie zum Beispiel den Satz über die Winkelsumme im Dreieck, konnte er sonst nicht beweisen.
Die Mathematiker nach Euklid glaubten lange, dass das Parallelenaxiom in Wirklichkeit aus den übrigen Axiomen Euklids herleitbar und damit als Axiom überflüssig sein müsste. Darauf deutete schon die wenn-dann-Formulierung hin, die verdächtig nach einem beweisbaren Satz klang. Auch war vielen die Aussage deswegen unheimlich, weil sie im Gegensatz zu den anderen Axiomen vom Verhalten zweier Geraden ganz weit draußen handelt, wo eine zeichnerische Überprüfung nicht mehr möglich ist. Trotz größter Anstrengungen hat keiner einen Beweis gefunden. Zwar entdeckten die Mathematiker

viele Sätze, die sich genauso gut wie das Parallelenaxiom zum Aufbau der Geometrie eignen, aber auch alle diese Sätze ließen sich nur beweisen, wenn man das Parallelenaxiom voraussetzte. Einige dieser Sätze, die sich als gleichwertig mit dem Parallelenaxiom erwiesen haben, sind:

- Die Menge der Punkte auf einer Seite einer Gerade, die denselben Abstand von dieser Gerade haben, bildet wieder eine Gerade.
  (Poseidonios 135 bis 51)
- Durch einen Punkt P gibt es zu einer Gerade g genau eine Parallele
  (Proklos 410 bis 484)
- Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. (Saccheri 1667 bis 1733)
- Zu jedem Dreieck lässt sich ein Dreieck mit gleichen Winkeln zeichnen, das beliebig groß ist. (Wallis 1616 bis 1703)
- Durch je drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, geht ein Kreis. (W. Bolyai 1775 bis 1856)



In diesem Buch haben wir das Parallelenaxiom versteckt in der Behauptung, dass bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar die Z-Winkel gleich groß sind.
Erst Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) ist der Nachweis gelungen, dass das Parallellenaxiom aus den übrigen Axiomen Euklids bestimmt nicht gefolgert werden kann. Ebenso wie J. Bolyai (1802 bis 1860) und N. I. Lobatschewski (1792 bis 1856) zeigte Gauß, dass es auch eine Geometrie gibt, in der alle Axiome Euklids bis aufs Parallelenaxiom gelten.



Eine Geometrie, in der nicht alle euklidischen Axiome gelten, vor allem nicht das Parallelenaxiom, heißt nichteuklidische Geometrie. Ein Beispiel dafür ist die Geometrie auf der Kugel; dort gibt es auch Dreiecke mit einer Winkelsumme von 270°. Offen bleibt die Frage, welche Geometrie die ›Richtige‹, d. h. diejenige ist, die unsere Welt genau beschreibt. Bis heute hat man noch kein ebenes Dreieck gefunden, bei dem durch noch so genaue Messung eine gesicherte Abweichung von der Winkelsumme 180° festgestellt worden wäre.