Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

5. Kapitel: Dreiecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

5. Kapitel

Dreiecke

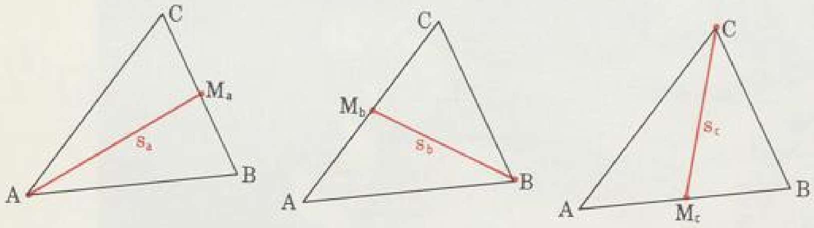
5.1 Transversalen

Übersicht

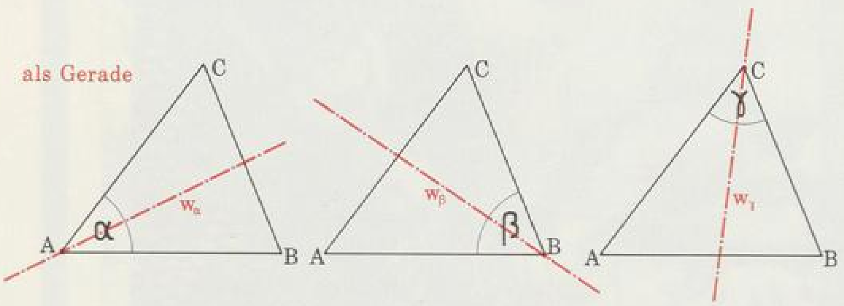
Eine Gerade heißt Transversale bezüglich eines Vielecks, wenn sie keine Seite des Vielecks enthält. Besondere Transversalen des Dreiecks ergeben sich, wenn man die Grundkonstruktionen anwendet:
- Streckenhalbieren
- Winkelhalbieren
- Lotfällen
- Loterrichten

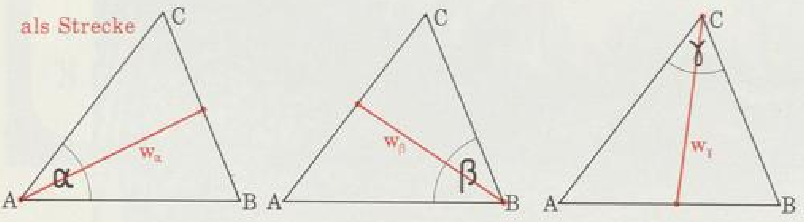
Für diese Transversalen haben sich eigene Bezeichnungen eingebürgert.

Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierende s_a ist die Strecke zwischen der Ecke A und der Mitte M_a der Seite a.

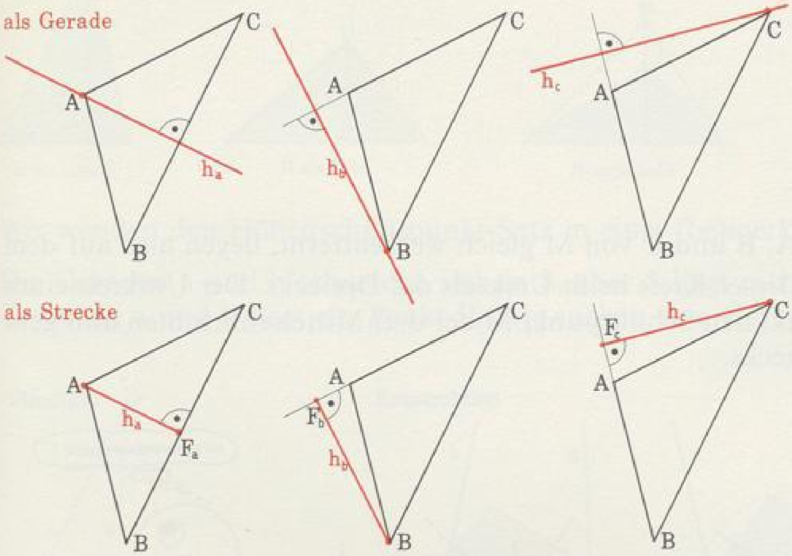


Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende w_α ist die Gerade, die den Winkel α halbiert. Mit w_α bezeichnet man aber auch die Strecke, die das Dreieck aus der Gerade ausschneidet, und manchmal meint man damit sogar die Länge dieser Strecke. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor.

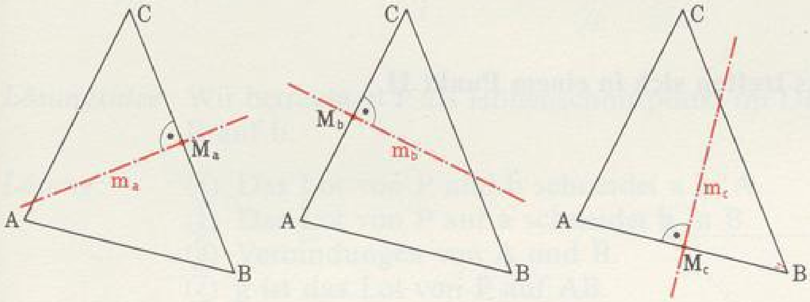




Höhe: Die Höhe h_a ist das Lot, das von A auf die Seite a (oder ihre Verlängerung) gefällt wird. Genau wie bei der Winkelhalbierenden bezeichnet man mit h_a auch die Länge der Strecke zwischen Ecke und Lotfußpunkt. Was jeweils gemeint ist, geht wieder aus dem Zusammenhang hervor.



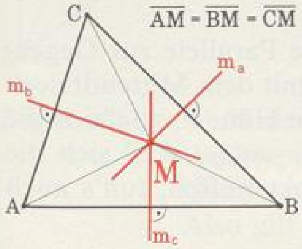
Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte m_a ist das Lot zu a durch die Seitenmitte M_a.



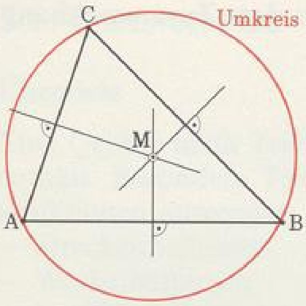
Besondere Eigenschaften

Beim Zeichnen von Mittelsenkrechten, Höhen, Winkel- und Seitenhalbierenden hat man den Eindruck, als ob sich gleichartige Linien jeweils in einem Punkt träfen. Das stimmt tatsächlich. Und diese Schnittpunkte haben auch alle eine besondere Bedeutung im Dreieck.

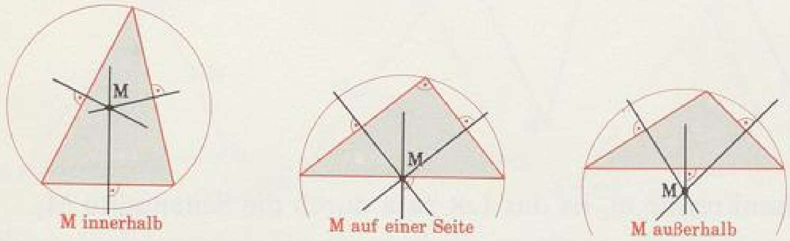
Umkreissatz:
Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt M.



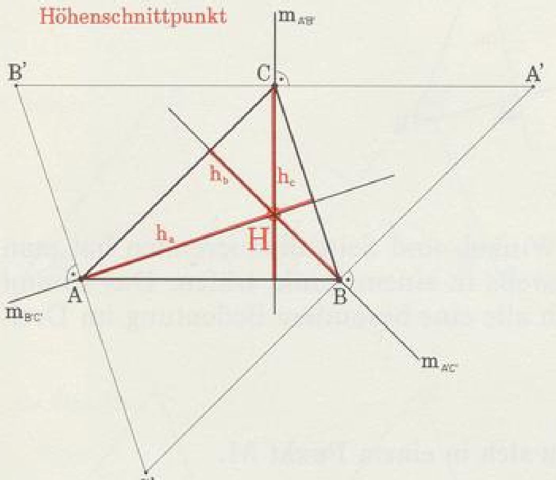
Begründung: M sei der Schnittpunkt von m_a und m_c.
Weil m_c die Symmetrieachse von A und B ist, gilt: $\overline{MA} = \overline{MB}$.
Genauso ist $\overline{MB} = \overline{MC}$, da M auf m_a liegt.
Also gilt auch $\overline{MA} = \overline{MC}$, das heißt M liegt auch auf m_b.



Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ sind A, B und C von M gleich weit entfernt, liegen also auf dem Kreis um M mit Radius $\overline{MA}$. Dieser Kreis heißt **Umkreis** des Dreiecks. Der Umkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt M der drei Mittelsenkrechten und geht durch alle drei Ecken des Dreiecks.

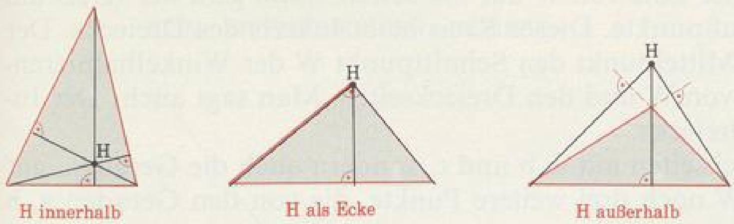


Höhenschnittpunkt-Satz:
Die drei Höhen eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt H.



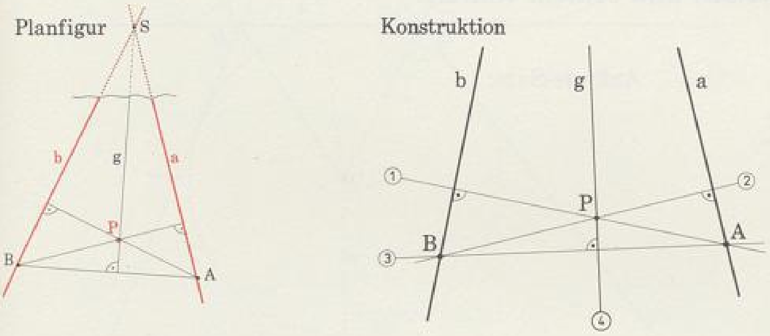
Begründung: Durch jede Ecke des Dreiecks ABC zeichnet man die Parallele zur Gegenseite. Diese Parallelen bestimmen das Dreieck A′B′C′ mit dem Mittendreieck ABC. Weil h_c die Seite [A′B′] senkrecht halbiert, ist die Höhe h_c zugleich die Mittelsenkrechte $m_{A'B'}$. Ebenso gilt $h_a = m_{B'C'}$ und $m_b = m_{A'C'}$. Weil sich die Mittelsenkrechten des Dreiecks A′B′C′ in einem Punkt treffen, tun's auch die Höhen im Dreieck ABC.

Auch der Höhenschnittpunkt muss nicht im Inneren des Dreiecks liegen.



Wir wenden den Höhenschnittpunkt-Satz in einer (be)merkenswerten Konstruktion an:

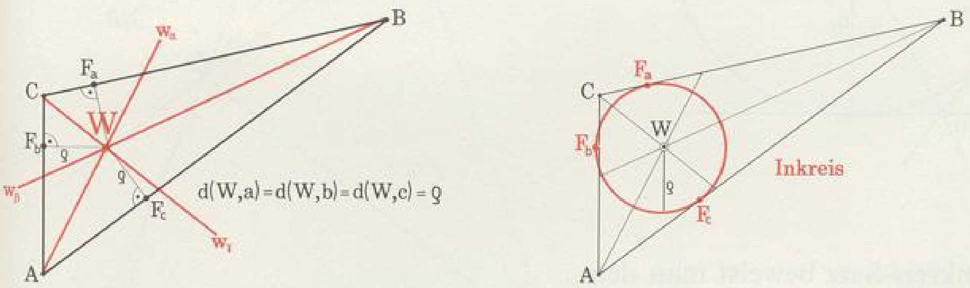
Die Geraden a und b schneiden sich in S, aber S liegt nicht mehr auf dem Zeichenblatt. Zwischen a und b liegt ein Punkt P. Wir suchen eine Gerade g, die durch P und S geht.



Lösungsidee: Wir betrachten P als Höhenschnittpunkt im Dreieck ABS, A liegt auf a und B auf b.

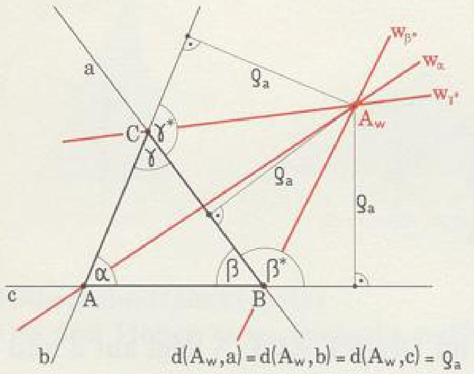
Lösung:
① Das Lot von P und b schneidet a in A.
② Das Lot von P auf a schneidet b in B.
③ Verbindungen von A und B.
④ g ist das Lot von P auf AB.

Inkreissatz:
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt W.

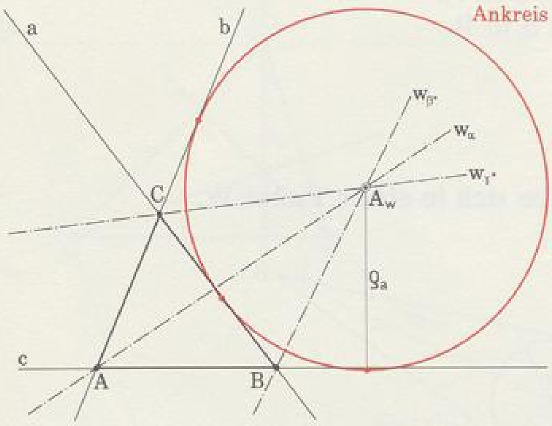


Begründung: W sei der Schnittpunkt von w_γ und w_α.
Weil w_γ die Symmetrieachse von a und b ist, gilt: $d(W, a) = d(W, b)$.
Genauso ist $d(W, b) = d(W, c)$, da W auf w_α liegt.
Also gilt auch $d(W, a) = d(W, c)$, das heißt W liegt auch auf w_β.

Wegen d(W, a) = d(W, b) = d(W, c) hat W von allen Dreieckseiten denselben Abstand ϱ. Sind F_a, F_b und F_c die Fußpunkte der Lote von W auf die Seiten, dann geht der Kreis um W mit Radius ϱ durch diese drei Fußpunkte. Dieser Kreis heißt **Inkreis** des Dreiecks. Der Inkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, sein Radius ϱ ist der Abstand von W und den Dreieckseiten. Man sagt auch: Der Inkreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks.
Bezeichnen wir nicht nur die Dreieckseiten mit a, b und c, sondern auch die Geraden, auf denen sie liegen, so gibt es außer W noch drei weitere Punkte, die von den Geraden a, b und c denselben Abstand haben.
Betrachten wir zum Beispiel A_w: Er ist der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden w_{γ^*} und w_{β^*} und der Innenwinkelhalbierenden w_α. Weil A_w von a, b und c denselben Abstand hat, liegen die Fußpunkte der Lote von A_w auf die Geraden auf einem Kreis um A_w mit dem Radius ϱ_a. Dieser Kreis heißt **Ankreis** des Dreiecks ABC. Die Bilder zeigen jeweils ein Dreieck mit seinen drei Ankreisen und seinem Inkreis.



Ankreis-Satz:

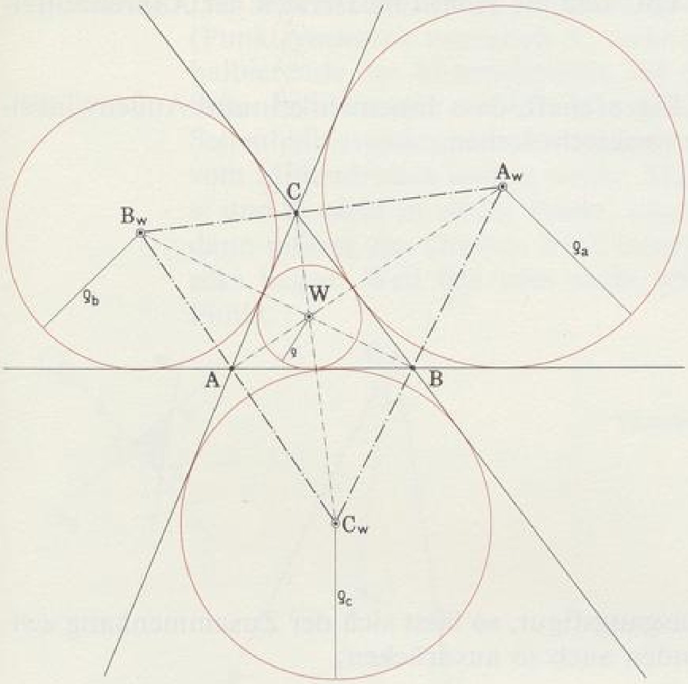


Ähnlich wie den Inkreis-Satz beweist man den

Ankreis-Satz:
Je zwei Außenwinkelhalbierende treffen sich mit der Innenwinkelhalbierenden des dritten Winkels in einem Punkt.
Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks.

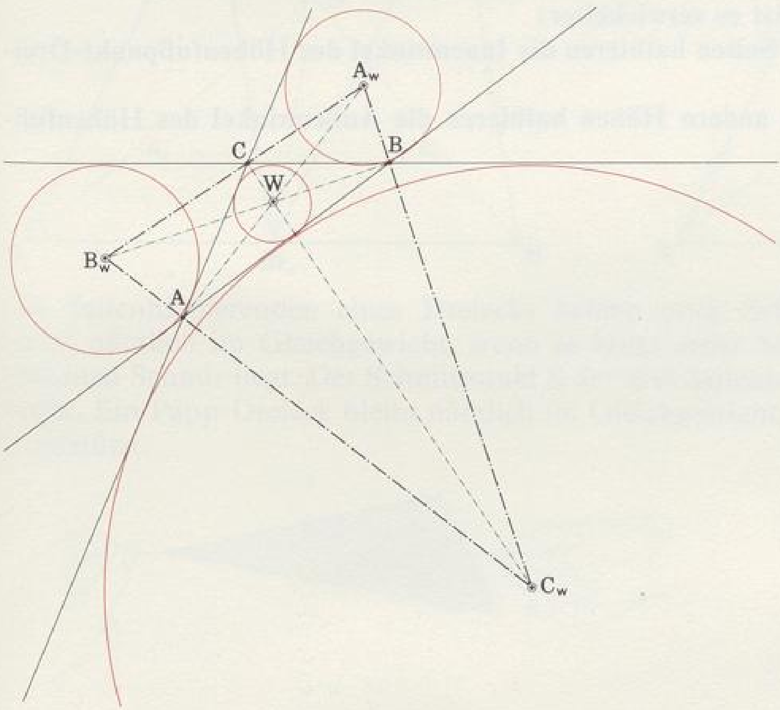
INKREIS UND ANKREISE

BEIM SPITZWINKLIGEN DREIECK



INKREIS UND ANKREISE

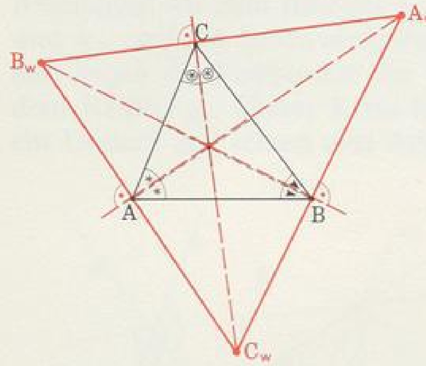
BEIM STUMPFWINKLIGEN DREIECK



Bei genauer Betrachtung der Ankreis-Figur entdecken wir noch den

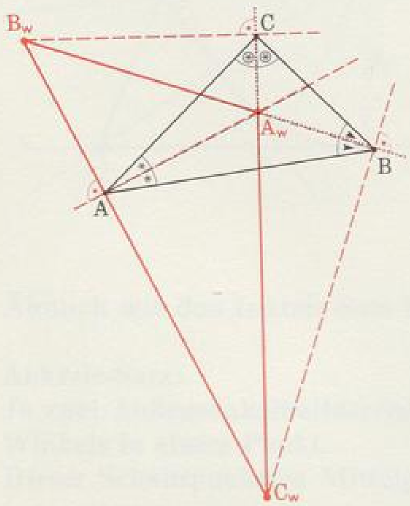
Satz:
Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind die Höhen im Dreieck der Ankreismittelpunkte A_w, B_w und C_w.

Der Beweis beruht auf der bekannten Eigenschaft, dass Innenwinkel- und Außenwinkelhalbierende an einer Ecke aufeinander senkrecht stehen.



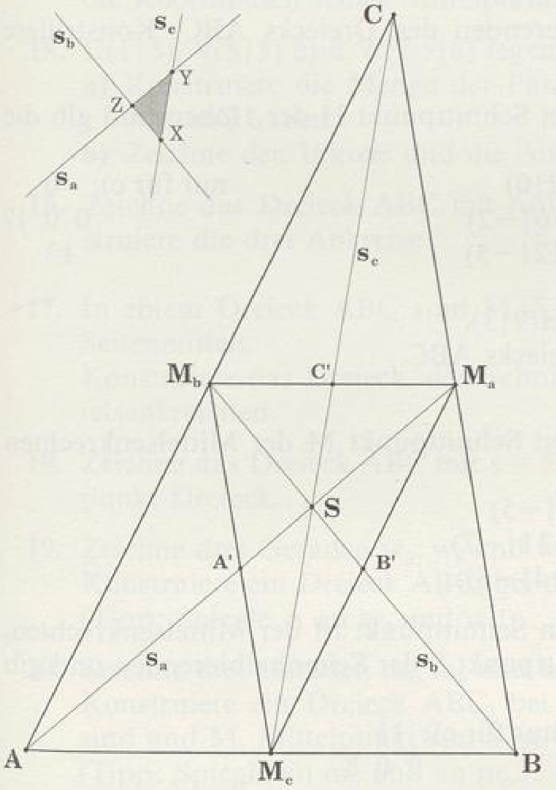
Nehmen wir das äußere Dreieck als Ausgangsfigur, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den Höhen und Winkelhalbierenden auch so ausdrücken:

Satz:
Im spitzwinkligen Dreieck gilt:
Die Höhen halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Die Seiten halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Beim stumpfwinkligen Dreieck ist es verwickelter:
Eine Höhe und zwei verlängerte Seiten halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Die dritte Seite und die beiden andern Höhen halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.

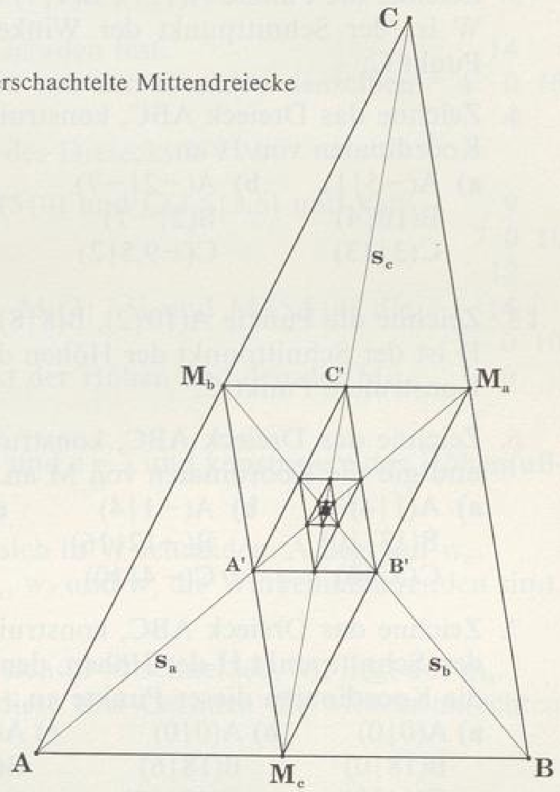


Schwerpunkt-Satz:
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt S.

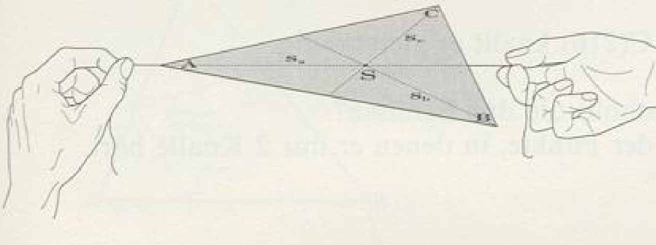
Begründung: Die Seitenhalbierende s_a halbiert die Seite $[M_bM_c]$ des Mittendreiecks in A′ (Punktsymmetrie bezüglich A′, siehe Seite 102). Also liegt auf ihr die Seitenhalbierende des Mittendreiecks, die durch M_a geht. Zeichnet man die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, so hat man damit zugleich auch die Seitenhalbierenden des Mittendreiecks. Dasselbe gilt fürs Mittendreieck vom Mittendreieck und so weiter. Träfen sich die drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c nicht in einem Punkt, sondern in den drei Punkten X, Y und Z, dann müsste das Dreieck XYZ innerhalb jedes noch so kleinen Mittendreiecks liegen. Weil das aber nicht sein kann, schneiden sie sich in einem Punkt.

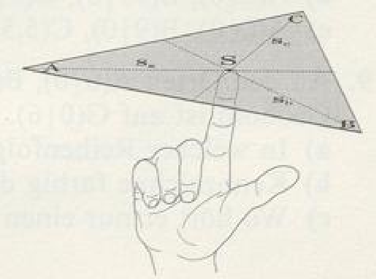


Verschachtelte Mittendreiecke



Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißen auch **Schwerlinien.** Ein Pappe-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn es längs einer Seitenhalbierenden auf einer gespannten Schnur liegt. Der Schnittpunkt S der drei Seitenhalbierenden heißt auch **Schwerpunkt.** Ein Papp-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn man es im Schwerpunkt unterstützt.





Aufgaben zu 5.1

1. Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und gib die Koordinaten von S an.

a) A(−2 | 2)	**b)** A(0 | 1)	**c)** A(0 | −9)
B(16 | 5)	B(−18 | 12)	B(17 | −7)
C(10 | 14)	C(−15 | 11)	C(10 | 16)

2. Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden und gib die Koordinaten von W an.

a) A(4 | 6)	**b)** A(−7 | −4)	**c)** A(2 | −1)
B(18 | 6)	B(11 | −3)	B(14 | −17)
C(9 | 18)	C(−1 | 5)	C(2 | −12)

•3. Zeichne die Punkte A(1 | 1), B(9 | 7) und W(7 | 8).
W ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Konstruiere Punkt C.

4. Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt H der Höhen und gib die Koordinaten von H an.

a) A(−5 | 1)	**b)** A(−2 | −7)	**c)** A(2 | 0)	nur für c): 0
B(10 | 4)	B(2 | −1)	B(16 | −2)	0 0 17
C(3 | 13)	C(−9,5 | 2)	C(12 | −5)	13

:5. Zeichne die Punkte A(10 | 2), B(8 | 8) und H(9 | 3).
H ist der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC.
Konstruiere Punkt C.

6. Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten und gib die Koordinaten von M an.

a) A(1 | 4)	**b)** A(−1 | 4)	**c)** A(0 | −5)
B(13 | 10)	B(−12 | 16)	B(−11 | −7)
C(5 | 16)	C(−4 | 10)	C(−4 | −8)

7. Zeichne das Dreieck ABC, konstruiere den Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten, den Schnittpunkt H der Höhen, den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und gib die Koordinaten dieser Punkte an.

a) A(0 | 0)	**b)** A(0 | 0)	**c)** A(1 | 1)	nur für c): 11
B(18 | 0)	B(18 | 6)	B(4 | 10)	9 0 8
C(6 | 18)	C(12 | 12)	C(1 | 7)	0

8. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks ABC und gib die Koordinaten des Umkreismittelpunkts M an.
   a) A(0 | 0), B(6 | 0), C(4 | 8)
   b) A(0 | 0), B(13 | 0), C(9 | 6)
   c) A(0 | 0), B(9 | 0), C(5,5 | 3,5)

9. An den Orten A(0 | 0), B(6 | 0) und C(2 | 6) knallt es gleichzeitig.
Geobold ist auf G(0 | 6).
   a) In welcher Reihenfolge hört Geobold die drei Schüsse?
   b) Kennzeichne farbig die Menge der Punkte, in denen er nur 2 Knalle hört.
   c) Wo hört er nur einen Knall?

• **10.** Bei welchen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt H:
a) innerhalb des Dreiecks **b)** außerhalb des Dreiecks **c)** auf dem Dreieck?

11. U(1 | 12,5), V(8,5 | 11), A(0 | 0), B(8 | 2), P(5 | 6) 13
Konstruiere die Gerade g, die P und den Schnittpunkt von UV und AB 0 0 9
enthält. 0

• **12.** Zeichne zwei Parallelen im Abstand 4 und eine dritte Gerade, die die Parallelen schneidet.
Konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden denselben Abstand haben.

13. Zeichne das Dreieck ABC mit a = 7,5, b = 6,5 und c = 7.
Konstruiere den Inkreis und miss den Radius.

14. Konstruiere den Inkreis des Dreiecks ABC mit A(1 | 1), B(15 | 1) und C(6 | 13) und gib die Koordinaten seines Mittelpunkts an.

15. U(1 | 5), V(5 | 3) und W(2,5 | 8) legen drei Geraden fest. 14
a) Konstruiere die Menge der Punkte, die von den Geraden denselben 4 0 16
Abstand haben. 4
b) Zeichne den Inkreis und die Ankreise des Dreiecks UVW.

16. Zeichne das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(5 | 0) und C(3,5 | 3,5) und kon- 9
struiere die drei Ankreise. 7 0 10
12

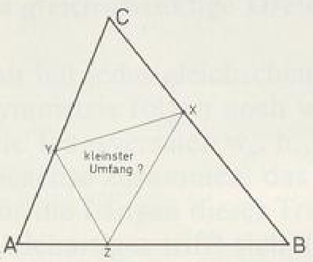
• **17.** In einem Dreieck ABC sind M_a(5,5 | 9,5), M_b(2 | 7,5) und M_c(5,5 | 4) die 14
Seitenmitten. 3 0 10
Konstruiere das Dreieck, den Schnittpunkt der Höhen und den der Mit- 0
telsenkrechten.

18. Zeichne das Dreieck ABC mit a = 5, b = 4 und c = 3 und konstruiere das Höhenfuß-punkt-Dreieck.

19. Zeichne drei Geraden w_α, w_β und w_γ, die sich in W schneiden. A liegt auf w_α.
Konstruiere ein Dreieck ABC, bei dem w_α, w_β und w_γ die Winkelhalbierenden sind.
(Tipp: Spiegle A an w_β und w_γ!)

20. Zeichne drei Geraden m_a, m_b und m_c, die sich in M schneiden. M_a liegt auf m_a.
Konstruiere ein Dreieck ABC, bei dem diese drei Geraden die Mittelsenkrechten sind und M_a Mittelpunkt von a ist.
(Tipp: Spiegle an m_b und an m_c.)

21. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(13,5 | 4,5) und C(6 | 12). 14
Beschreibe ihm ein Dreieck XYZ so ein, dass X auf a, Y auf b, Z auf c 2 0 17
liegt und der Umfang möglichst klein ist. Die folgenden Aufgaben führen 0
schrittweise zum Ergebnis.



a) Zeichne das Dreieck ABC und die Punkte X(10 | 8), Y(5 | 10) und Z(4,5 | 1,5).
Das Spiegelbild von Z bezüglich a ist Z′, und bezüglich b ist Z″.
Begründe: Der Streckenzug Z″YXZ′ ist genauso lang wie der Umfang des Dreiecks XYZ.

b) Zeichne das Dreieck ABC und den Punkt Z(4,5 | 1,5).
Wähle X auf a und Y auf b so, dass der Umfang des Dreiecks XYZ möglichst klein wird.
Begründe: Wenn die Seiten a und b spiegeln, dann trifft ein Lichtstrahl, den man von Z aus in Richtung X losschickt, nach zweimaliger Reflexion wieder bei Z ein.

c) Begründe: Das Dreieck Z″Z′C ist gleichschenklig. Der Winkel an der Spitze hat die Größe 2γ, unabhängig davon, wo Z auf c liegt.

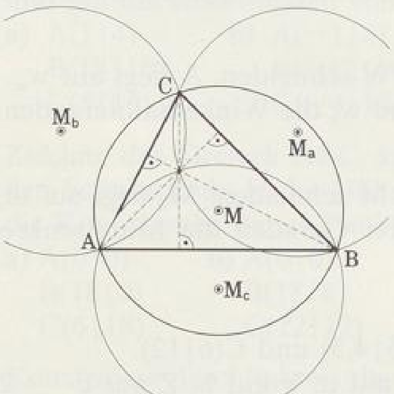
d) $\overline{Z'Z''}$ ist die Länge des Umfangs desjenigen einbeschriebenen Dreiecks mit einer Ecke in Z, das den kleinsten Umfang hat.
Begründe: $\overline{Z'Z''}$ ist am kürzesten, wenn Z Fußpunkt der Höhe h_c ist.

e) Begründe: Das gesuchte Dreieck XYZ ist das Höhenfußpunktdreieck im Dreieck ABC.

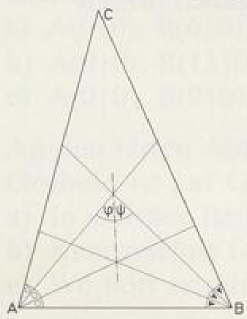
f) Begründe: Im Höhenfußpunktdreieck XYZ sind die Höhen h_a, h_b und h_c die Winkelhalbierenden.

g) Zeichne ein beliebiges Dreieck XYZ. Konstruiere das Dreieck ABC, in dem das Dreieck XYZ das Höhenfußpunktdreieck ist.

22. TREFFPUNKT
M_a, M_b und M_c sind die Spiegelpunkte des Umkreismittelpunkts M bezüglich der Seiten eines Dreiecks ABC.
Zeige: Die Kreise um M_a, M_b und M_c mit dem Radius r (= Umkreisradius) treffen sich im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks.



23. Zeige $\varphi = \psi$.

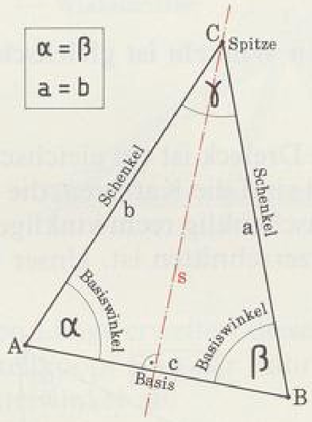


5.2 Achsensymmetrisches Dreieck

Wenn ein Dreieck eine Symmetrieachse hat, dann muss gelten:

- Eine Ecke (C) muss auf der Achse s liegen, sie heißt **Spitze** des Dreiecks.
- Die beiden anderen Ecken (A, B) liegen symmetrisch zueinander bezüglich s; c heißt **Basis** des Dreiecks.
- Die Basis wird von der Achse senkrecht halbiert.
- Die Seiten a und b liegen symmetrisch zueinander bezüglich s; sie heißen **Schenkel** des Dreiecks.
- Der Winkel γ an der Spitze wird von der Achse halbiert.
- Die **Basiswinkel** α und β sind gleich groß.

Gleichschenkliges Dreieck



Weil die Schenkel gleich lang sind, heißt das Dreieck auch gleichschenklig.

Definition

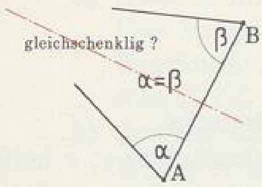
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt gleichschenklig.

Wir wissen, dass jedes achsensymmetrische Dreieck gleichschenklig ist. Ist aber jedes gleichschenklige Dreieck auch achsensymmetrisch? Nehmen wir an, die Seiten a und b sind gleich lang. Sie liegen deshalb symmetrisch zur Winkelhalbierenden w_γ. Ein Endpunkt C liegt auf w_γ. Folglich liegen auch die anderen Endpunkte A und B symmetrisch zu w_γ. Also ist das Dreieck ABC achsensymmetrisch bezüglich w_γ. Es gilt der

Satz:
Jedes gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch.

Damit hat jedes gleichschenklige Dreieck auch die Eigenschaften von oben. Aus der Achsensymmetrie folgen noch weitere Eigenschaften:

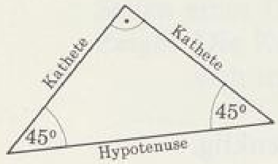
- Die Transversalen w_γ, h_c, m_c und s_c, die von der Spitze ausgehen, fallen mit der Symmetrieachse zusammen, das heißt $w_\gamma = h_c = m_c = s_c$.
- Für die Längen dieser Transversalen durch die Basisecken gilt: $w_\alpha = w_\beta$, $h_a = h_b$, $s_a = s_b$. Gleichartiges trifft sich auf der Achse.

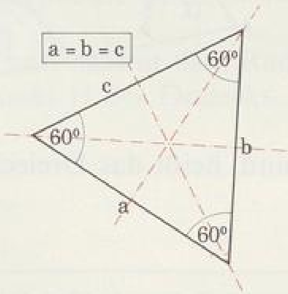


Jedes gleichschenklige Dreieck hat also zwei gleich große Winkel. Oft weiß man von einem Dreieck nur, dass zwei seiner Winkel gleich groß sind. Ist ein solches Dreieck dann auch gleichschenklig? Gilt etwa $\alpha = \beta$, dann falte man das Dreieck längs der Mittelsenkrechte m_c. Dabei fallen A und B zusammen und ebenso die Schenkel der Winkel α und β. Weil α und β gleich groß und spitz sind, müssen sich die symmetrischen Schenkel auf der Achse treffen. C liegt also auf der Achse und das Dreieck ist gleichschenklig. Es gilt der

Satz:
Ein Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln ist gleichschenklig.

Zwei wichtige Sonderfälle:
Das **gleichschenklig rechtwinklige** Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze 90° ist. Die Schenkel sind die Katheten, die Basis ist die Hypotenuse. Die Basiswinkel betragen 45°. Das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck ist die Hälfte eines Quadrats, das längs einer Diagonale zerschnitten ist. Unser Geodreieck schaut auch so aus.



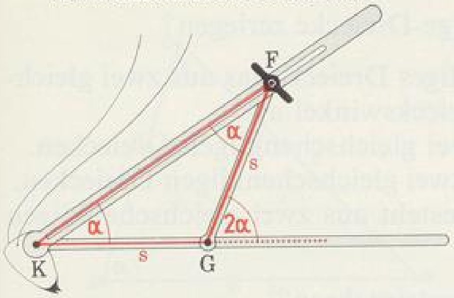


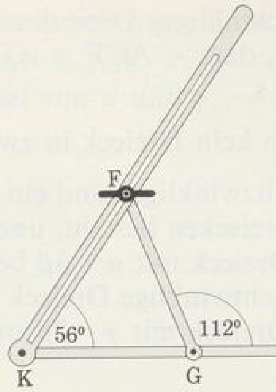
Das **gleichseitige** Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Jede Seite lässt sich als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auffassen, also hat das gleichseitige Dreieck drei Symmetrieachsen. Alle Transversalen w, h, m und s, die von einer Ecke ausgehen, fallen zusammen. Zum Basiswinkel α sind β und γ gleich große Partner-Basiswinkel, also sind alle drei Winkel gleich groß. Weil sie zusammen 180° ergeben, ist jeder 60°.

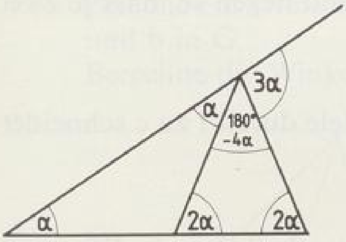
Satz:
Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.

Bei einem Gerät macht man von den Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks Gebrauch. Es ist der winkelhalbierende Heuschreck – eine mechanische Vorrichtung zum Winkelhalbieren.
Im gleichschenkligen Dreieck KGF ist der Außenwinkel an der Spitze G gleich der Summe der beiden Basiswinkel, also gleich 2α. Beim Heuschreck ist $\overline{KG} = \overline{FG}$. G und K sind Gelenke, F gleitet in einer Führung. Mit dem um G drehbaren Arm [GF] stellt man bei G einen Winkel 2α ein und liest bei K den halben Winkel ab.

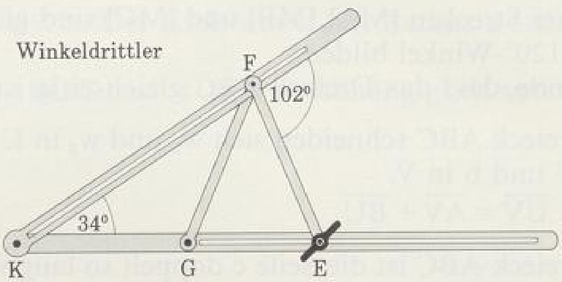
Winkelhalbierender Heuschreck







Winkeldrittler



Ein zusätzlicher Arm von derselben Länge erweitert diesen Gelenkmechanismus zum Winkeldrittler. Man schiebt den Einstellknopf E in der Führung so, dass bei F der Winkel 3α entsteht, und liest bei K den Drittelwinkel ab.

Aufgaben zu 5.2

1. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C gilt:
a) $\gamma = 68°$ **b)** $\alpha = 17{,}8°$ **c)** $\beta = 2\gamma$
d) $\gamma^* = 100°$ **e)** $\alpha^* = 98°$ **f)** $\alpha^* = 4\gamma$.
Berechne die Winkel des Dreiecks.

2. In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel φ bekannt. Berechne die übrigen Winkel.
a) $\varphi = 110°$ **b)** $\varphi = 60°$ **c)** $\varphi = 50°$ (zwei Fälle)

3. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C ist $\beta = 40°$. Unter welchem Winkel schneiden sich
a) m_a und m_b **b)** m_a und m_c **c)** s_c und c
d) w_γ und w_α **e)** w_α und w_β **f)** w_α und h_c?

4. Zeichne einen Kreis mit r = 4. Trage den Radius immer wieder als Sehne so ab, dass ein Sehnenzug entsteht.
Begründe, warum sich der Sehnenzug schließt.
(Tipp: Verbinde alle Sehnenenden mit dem Kreismittelpunkt.)

5. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit C als Spitze ein Schenkel doppelt so lang wie die Basis, so schneidet s_b ein gleichschenkliges Dreieck ab. Begründe dies. Drücke die Winkel des abgeschnittenen Dreiecks mit $\gamma = \sphericalangle ACB$ aus.

6. ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.
F liegt so auf AB, dass $\sphericalangle$ ACF = α.
Begründe: $[CF] = s_c$.

•7. Warum kann man kein Dreieck in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegen?

:8. a) Zeichne ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck, das aus zwei gleichschenkligen Dreiecken besteht, und gib die Dreieckswinkel an.
b) Zeige: Jedes Dreieck mit $\alpha = 3\beta$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
c) Zeige: Jedes rechtwinklige Dreieck besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
d) Zeige: Jedes Dreieck mit $\gamma = 2\beta$ und $\beta \leqq 45°$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.

•9. Warum gibt es kein Dreieck mit genau zwei Symmetrieachsen?

10. Die drei Strecken [MA], [MB] und [MC] sind gleich lang und liegen so, dass je zwei einen 120°-Winkel bilden.
Begründe, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

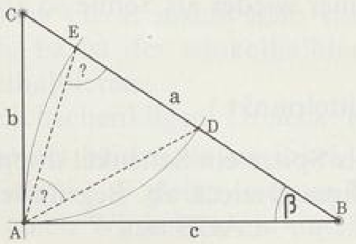
•11. Im Dreieck ABC schneiden sich w_α und w_β in I. Die Parallele durch I zu c schneidet a in U und b in V.
Zeige: $\overline{UV} = \overline{AV} + \overline{BU}$.

12. Im Dreieck ABC ist die Seite c doppelt so lang wie ihre Seitenhalbierende. Wie groß ist der Winkel γ?

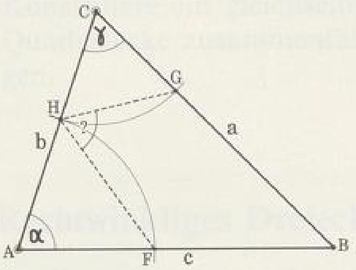
13. Im Dreieck ABC schneidet w_β die Seite b in D. Die Parallele durch D zu a schneidet c in E.
a) Begründe: $\overline{EB} = \overline{ED}$.
•b) Welcher Zusammenhang muss zwischen β und γ bestehen, damit $\overline{BD} = \overline{DC}$ ist? Welche Bedeutung hat DE dann für den Winkel $\sphericalangle$ADB? Begründung!

Hinweis für die nächsten Aufgaben:
Suche in den Figuren gleichschenklige Teildreiecke!

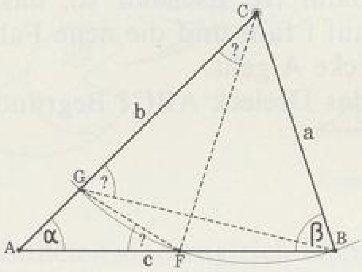
:14. Das Dreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel.
D und E liegen so auf a, dass $\overline{CA} = \overline{CD}$ und $\overline{BA} = \overline{BE}$.
Zeichne die Figur ins Heft.
a) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle$EAD?
b) Berechne $\sphericalangle$ADE in Abhängigkeit von β.
c) Wie groß muss β sein, damit ADE ein gleichschenkliges Dreieck ist? Warum muss A die Spitze sein?



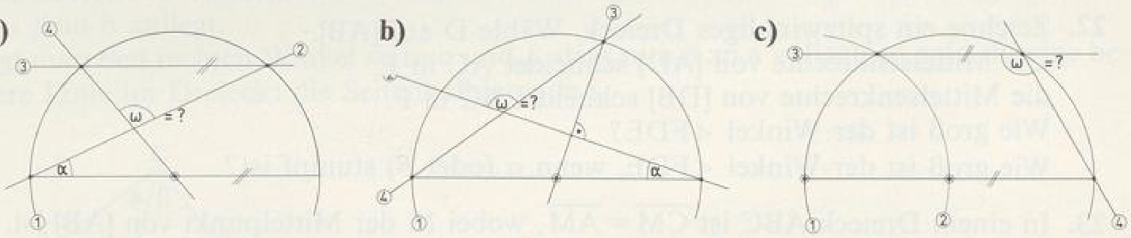
• 15. Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. F ist ein beliebiger Punkt auf c. G liegt so auf a, dass $\overline{CH} = \overline{CG}$; H liegt so auf b, dass $\overline{AF} = \overline{AH}$.
Zeige: $\sphericalangle FHG$ ist das arithmetische Mittel von α und γ.



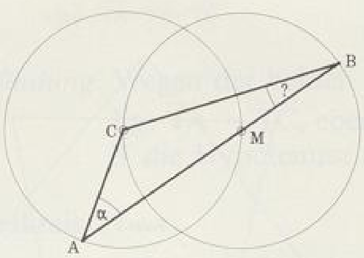
• 16. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a < b$. Der Kreis um C mit Radius a schneidet c in F und b in G.
Berechne die Winkel $\sphericalangle GCF$, $\sphericalangle BGC$ und $\sphericalangle GFA$ in Abhängigkeit von α und β.



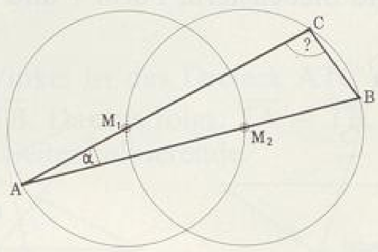
17. a) b) c)



18. Zeichne zwei Kreise mit gleichem Radius so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle B auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Berechne β in Abhängigkeit von α.



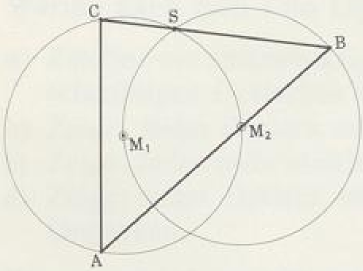
(18)



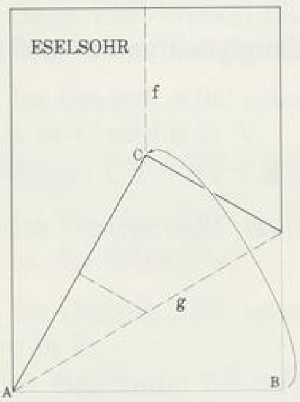
(19)

• 19. Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Berechne γ in Abhängigkeit von α.

:20. Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Begründe, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und die Spitze C hat.



21. ESELSOHR

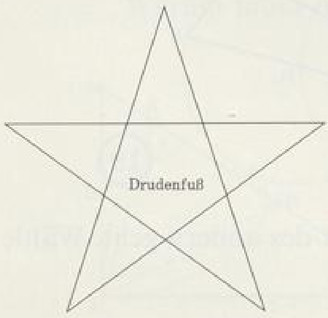


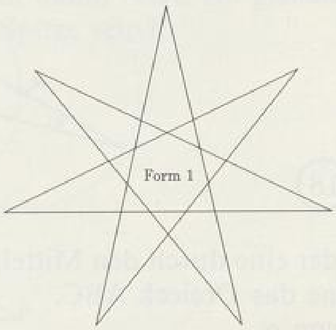
Nimm ein DIN-A4-Blatt und falte es so, dass die längeren Seiten aufeinander liegen, dabei entsteht die Faltlinie f. Knicke dann ein Eselsohr so, dass die Ecke B im Punkt C auf f fällt und die neue Faltlinie g durch die andere Ecke A geht.
Von welcher Art ist das Dreieck ABC? Begründung!

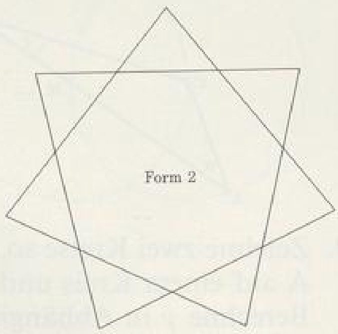
22. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck. Wähle D auf [AB].
Die Mittelsenkrechte von [AD] schneidet AC in E,
die Mittelsenkrechte von [DB] schneidet BC in F.
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle FDE$?
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle FDE$, wenn α (oder β) stumpf ist?

23. In einem Dreieck ABC ist $\overline{CM} = \overline{AM}$, wobei M der Mittelpunkt von [AB] ist.
Was für Teildreiecke sind AMC und MBC? Wie groß ist der Winkel bei C?

•24. ZACKEN
Wie groß ist die Summe der Zackenwinkel beim regelmäßigen Fünfstern (Drudenfuß) und Siebenstern, Form 1 und Form 2?





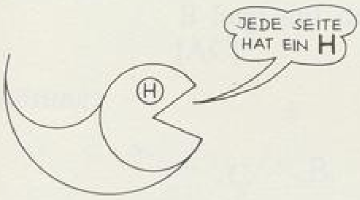


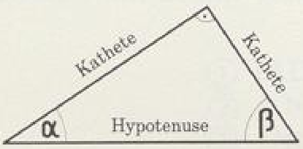
25. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt. Konstruiere durch P eine Gerade e, die mit g und h ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.

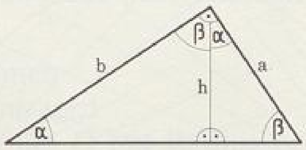
•26. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck so in ein Quadrat, dass eine Ecke mit einer Quadratecke zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf Quadratseiten liegen.

5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck. Die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten, die Gegenseite des rechten Winkels ist die Hypotenuse. Wegen $\alpha + \beta + 90° = 180°$ sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.

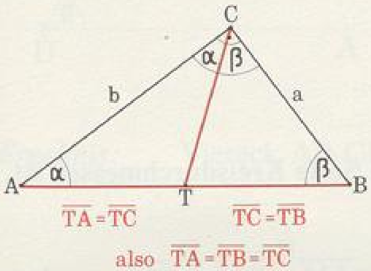






Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$

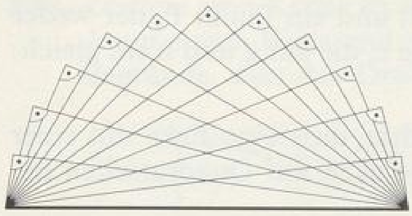
Die Katheten sind zugleich Höhen. Die dritte Höhe hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, deren Winkel mit denen des großen Dreiecks übereinstimmen. Diese Höhe zerlegt also den rechten Winkel so in α und β, dass β an b anliegt.
Zerlegt man den rechten Winkel so in α und β, dass nun β an a anliegt, so entsteht eine besondere Linie im Dreieck: die Seitenhalbierende s_c.



Begründung: Wegen der beiden gleich großen Winkel ist das Dreieck ATC gleichschenklig: $\overline{TA} = \overline{TC}$, ebenso gilt: $\overline{TC} = \overline{TB}$. Daraus folgt: $\overline{TA} = \overline{TB}$, also halbiert T die Hypotenuse und [CT] ist die Seitenhalbierende.

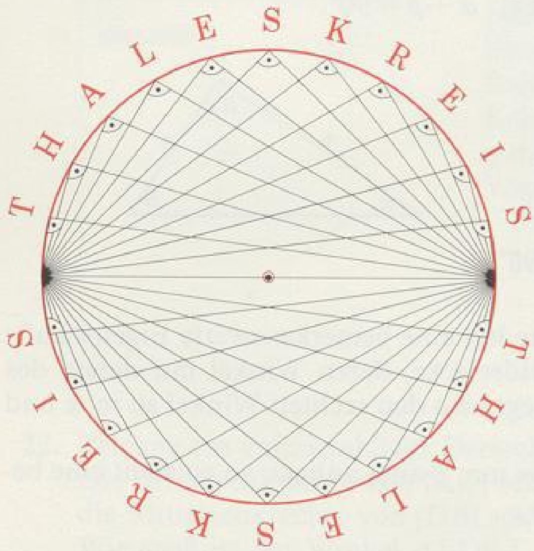
Thaleskreis

Zeichnet man über einer festen Hypotenuse mehrere rechtwinklige Dreiecke, dann schaut es so aus, als ob die Scheitel der rechten Winkel auf einem Kreis lägen. Schon vor etwa zweieinhalbtausend Jahren hat der griechische Philosoph und Mathematiker Thales von Milet tatsächlich folgenden Satz aufgestellt:



Satz:
Die freien Ecken aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse liegen auf einem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

Begründung: Oben haben wir gezeigt, dass A, B und C von T gleich weit entfernt sind; folglich liegt C auf dem Kreis um T mit [AB] als Durchmesser.

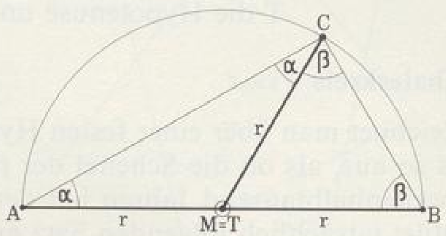


Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

Satz:
Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

Begründung: Weil A, B und C auf dem Kreis um M liegen, ist $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$; deshalb sind die beiden Dreiecke AMC und CMB gleichschenklig, der Winkel $\sphericalangle ACB$ setzt sich also aus den Basiswinkeln α und β zusammen. Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC gilt:

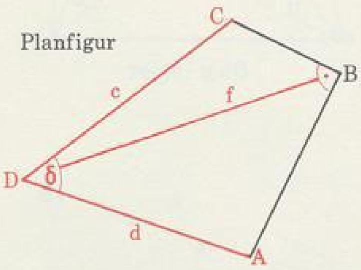
$$\begin{aligned} \alpha + \beta \ + (\beta + \alpha) &= 180° \\ (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) &= 180° \\ 2(\alpha + \beta) &= 180° \\ \alpha + \beta &= \ 90°. \end{aligned}$$



THALES (≈650 bis ∸560) zu Ehren heißt dieser Kreis **Thaleskreis**.

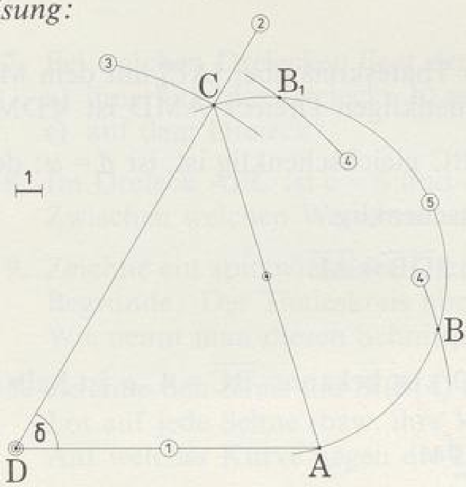
Wir führen zwei Aufgaben vor, in denen man den Thaleskreis braucht: In der einen wird konstruiert, in der anderen wird begründet.

1. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
$c = 15$, $d = 11{,}5$, $f = \overline{DB} = 16{,}6$, $\delta = 60°$, $\beta = 90°$



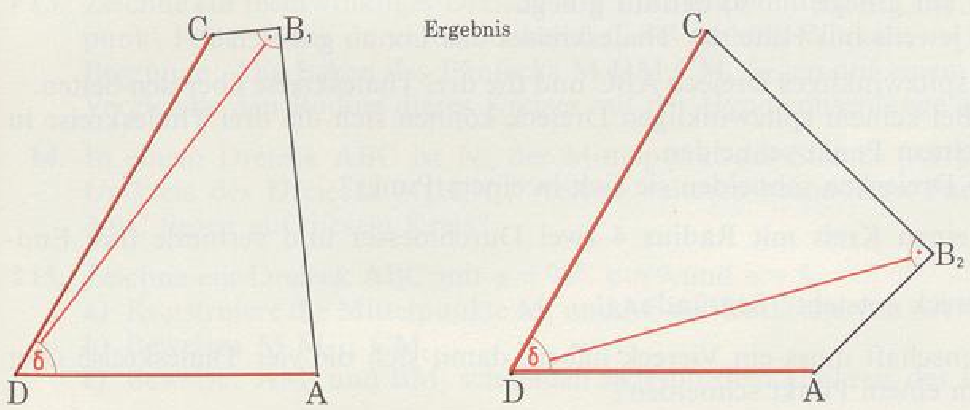
Lösungsidee: Zuerst Konstruktion des Dreiecks ACD.
B liegt auf dem Kreis um D mit Radius f und auf dem Thaleskreis über [AC].

Lösung:

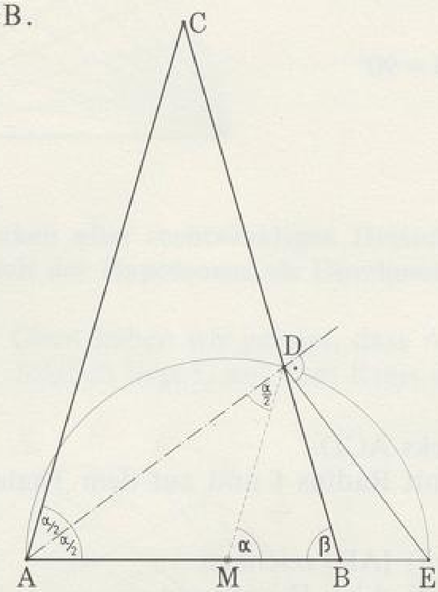


① [AD] zeichnen
② δ bei D antragen
③ Der Kreis um D mit Radius c schneidet den freien Schenkel von δ in C.
④ Kreis um D mit Radius f
⑤ Thaleskreis über [AC] schneidet Kreis ④ in B.

Ergebnis: Viereck AB_1CD und Viereck AB_2CD



2. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C. Die Winkelhalbierende w_α schneidet a in D. Das Lot in D auf w_α schneidet die Gerade AB in E. Zeige: $\overline{AE} = 2\overline{DB}$.



Begründung: Weil $\sphericalangle ADE = 90°$ ist, liegt D auf dem Thaleskreis über [AE] mit dem Mittelpunkt M. Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck AMD ist $\sphericalangle DMB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, ist $\beta = \alpha$; deshalb ist auch das Dreieck BDM gleichschenklig.

Es gilt: $\overline{DB} = \overline{DM} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AE}$, also $2\overline{DB} = \overline{AE}$

Aufgaben zu 5.3

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\beta = 90°$) ist bekannt: $\overline{BC} = 4$, α ist halb so groß wie γ.
   a) Wie groß sind α und γ? **b)** Konstruiere das Dreieck ABC.
   c) Gib **ohne** Messung an, wie lang $\overline{AC}$, s_b und h_c sind.
   d) Begründe: w_γ halbiert s_b.

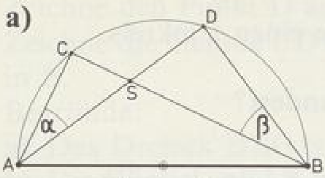
:2. Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P,
   a) der nicht auf g liegt, **b)** der auf g liegt.
   Konstruiere jeweils mit Hilfe des Thaleskreises das Lot zu g durch P.

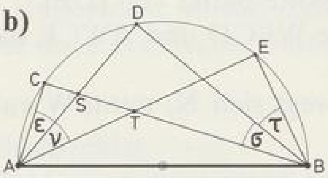
•3. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die drei Thaleskreise über den Seiten.
   Begründe: Bei keinem spitzwinkligen Dreieck können sich die drei Thaleskreise in einem Punkt schneiden.
   Bei welchen Dreiecken schneiden sie sich in einem Punkt?

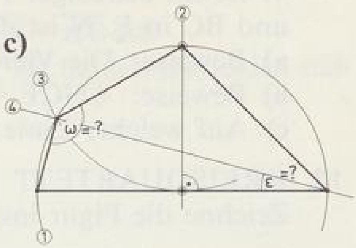
4. Zeichne in einen Kreis mit Radius 4 zwei Durchmesser und verbinde ihre Endpunkte.
   Welches Viereck entsteht? Begründung!

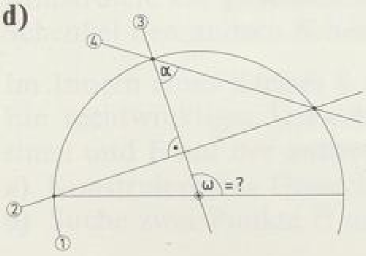
•5. Welche Eigenschaft muss ein Viereck haben, damit sich die vier Thaleskreise über den Seiten in einem Punkt schneiden?

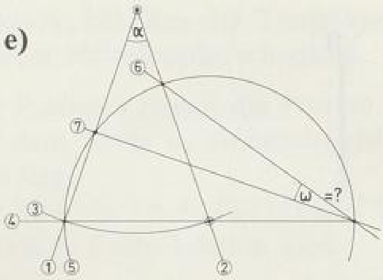
6. WINKELZÜGE
Zeichne die Figuren zuerst ins Heft.

a)

zeige: $\alpha = \beta$

b)

zeige: $\varepsilon + \tau = \nu + \sigma$
(Tip: vergleiche ν und τ)

c)


d)


e)


•7. Bei welchen Dreiecken liegt der Umkreismittelpunkt M:
a) innerhalb des Dreiecks **b)** außerhalb des Dreiecks
c) auf dem Dreieck?

•8. Im Dreieck ABC ist $c = 6$ und der Umkreisradius $r = 6$.
Zwischen welchen Werten muss α liegen, damit M innerhalb des Dreiecks liegt?

9. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC.
Begründe: Der Thaleskreis über a und der über b schneiden sich auf c.
Wie nennt man diesen Schnittpunkt noch?

10. Zeichne den Kreis um $M(5|4)$ mit $r = 4$ und den Punkt $S(3|2)$. Fälle von S aus das Lot auf jede Sehne (bzw. ihre Verlängerung), die durch $T(9|4)$ geht.
Auf welcher Kurve liegen die Lotfußpunkte?

11. Die Gerade a geht durch $A(3|6{,}5)$, die zu a parallele Gerade b geht durch $B(4|1)$.
Konstruiere die Parallelen a und b mit Abstand 2,5.

12. Konstruiere die Geraden, die von $A(0|0)$ und $B(11|2)$ den Abstand 2,5 haben.

•13. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC, die Seitenmitten M_a, M_b, M_c und den Fußpunkt H der Höhe durch den Scheitel C des rechten Winkels.
Begründe: Die Ecken des Fünfecks $M_cHM_aCM_b$ liegen auf einem Kreis.
Vergleiche den Radius dieses Kreises mit der Hypotenusenlänge c.

14. In einem Dreieck ABC ist N_A der Mittelpunkt der Strecke [AH]. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks $N_AH_bH_c$. Welche weiteren besonderen Punkte des Dreiecks ABC liegen auf diesem Kreis?

:15. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $c = 9$ und $a = 5$.
a) Konstruiere die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Umkreise von $\triangle AM_cC$ und $\triangle BCM_c$.
b) Beweise: $M_1M_2 \perp CM_c$.
c) Beweise: AM_1 und BM_2 schneiden sich auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

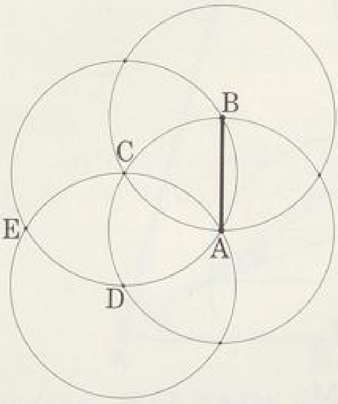
16. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $a = 3{,}5$ und $b = 5{,}5$.
W ist ein beliebiger Punkt auf c. l ist das Lot von c durch W. l schneidet AC in D und BC in E. N ist der Mittelpunkt von [DE].

a) Beweise: Die Vierecke WBCD und AWCE haben je einen Umkreis.

b) Beweise: $\sphericalangle NCE = \alpha$

c) Auf welcher Linie bewegt sich N, wenn W auf c wandert?

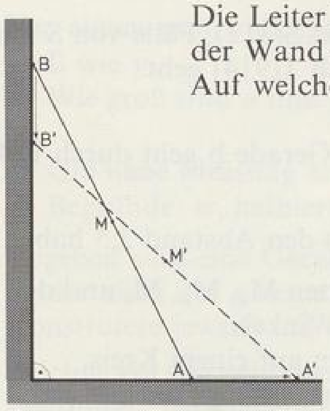
17. KREISQUARTETT
Zeichne die Figur ins Heft und begründe, dass die Gerade AE senkrecht zu AB ist.



18. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit Spitze C und $\gamma = 45°$.
Der Thaleskreis über b schneidet a in D. Berechne den Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAD$.

19. Der Thaleskreis über der Basis c eines gleichschenkligen Dreiecks ABC schneidet die Schenkel in D und E.
Begründe: Die Diagonalen im Viereck ABDE bilden denselben Winkel wie die Schenkel.

20. VERRÜCKTE LEITER



Die Leiter [AB] wird so verrückt, dass A auf dem Boden und B an der Wand entlangrutscht.
Auf welcher Kurve bewegt sich der Mittelpunkt M? Begründung!

21. Zeichne in ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit C als Spitze ($\gamma < 90°$) alle Höhen ein. Die Höhenfußpunkte sind H_a, H_b und H_c, H ist der Schnittpunkt der Höhen.

a) Begründe: Die Ecken des Vierecks CH_bHH_a liegen auf einem Kreis.
Zeichne den Mittelpunkt M dieses Kreises.

b) Begründe: $\sphericalangle MH_bH_c = 90°$.

c) Wie groß muss γ sein, damit das Viereck $MH_bH_cH_a$ ein Quadrat ist?

22. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle C = 90°$ und H, den Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse c.
Zeichne den Punkt D auf der Hypotenuse so ein, dass $\overline{DH} = \overline{HB}$ ist.
Zeichne die Gerade CD und die dazu Senkrechte durch A, die beiden schneiden sich in E.
Begründe:
a) Das Dreieck DBC ist gleichschenklig.
b) Die Winkel $\sphericalangle EAB$ und $\sphericalangle BAC$ sind gleich groß.
•**c)** Durch A, E, H und C geht ein Kreis.
Die Strecken [HC] und [HE] sind gleich lang.

23. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem der Thaleskreis über dem einen Schenkel den andern Schenkel in seinem Mittelpunkt schneidet.

•**24.** Im Innern eines Kreises k um M mit Radius r liegen die Punkte E und F.
Ein rechtwinkliges Dreieck ABC ist dem Kreis so einbeschrieben, dass E auf der einen und F auf der anderen Kathete liegt.
a) Konstruiere das Dreieck ABC für $M(4|4)$, $r = 4$, $E(2|5)$ und $F(6|7)$.
b) Suche zwei Punkte E und F so, dass es keine Lösung gibt.