Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

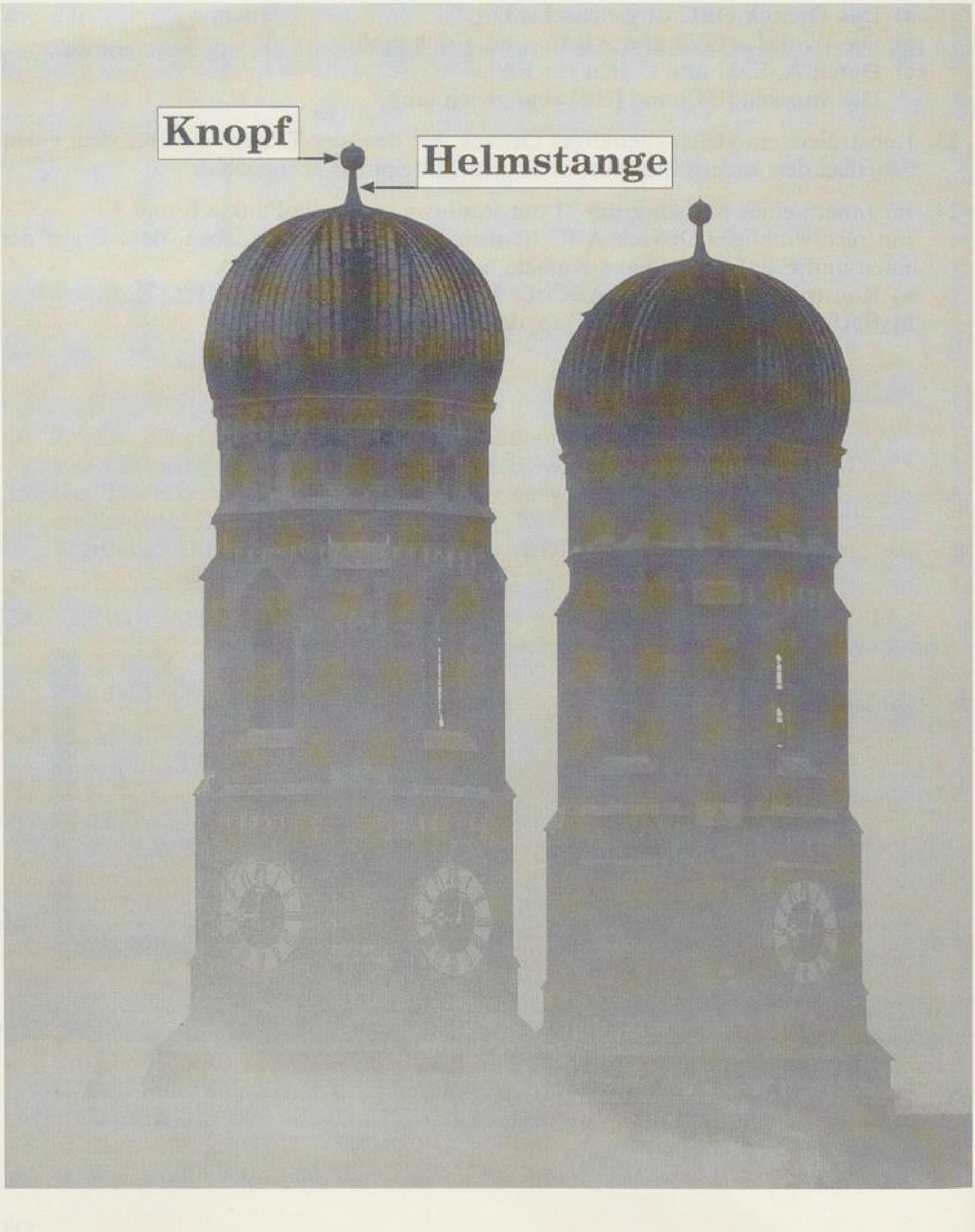
München, 2001

6. Kapitel: Dreickskonstruktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

6. Kapitel

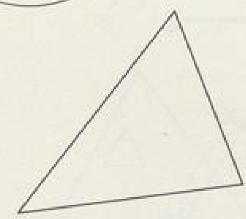
Dreieckkonstruktionen



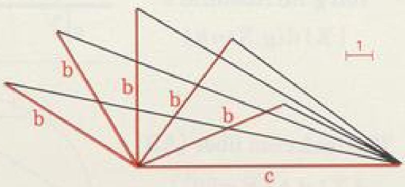
6.1 Grundkonstruktionen

Geradlinig begrenzte Figuren lassen sich immer aus Dreiecken zusammensetzen. Sie sind also konstruierbar, wenn man ihre Teildreiecke konstruieren kann. Deshalb sind Dreieckkonstruktionen ein unentbehrlicher Bestandteil der Elementargeometrie.

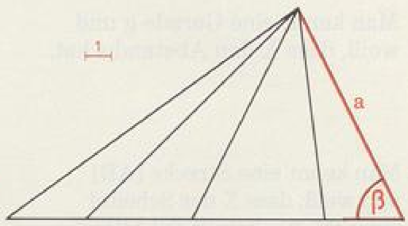
Beim ersten Blick auf ein Dreieck sieht man drei Seiten und drei Winkel. Wenn diese sechs Größen bekannt sind, dann lässt sich das Dreieck sicher eindeutig rekonstruieren. Geht's aber auch mit weniger als sechs Stücken? Versuchen wir, Dreiecke aus nur zwei Stücken



in allen Dreiecken ist $c = 10$ und $b = 6$



in allen Dreiecken ist $\beta = 63°$ und $a = 9$



zu konstruieren, zum Beispiel aus den Seiten b und c oder aus der Seite a und dem Winkel β. Die beiden Bilder zeigen, dass es dann aber unendlich viele Dreiecke gibt. Deshalb ist die Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Stücken zu konstruieren, nicht eindeutig lösbar. Mit drei Stücken aber klappt es meistens.

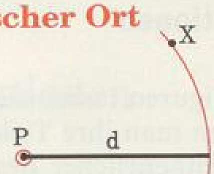
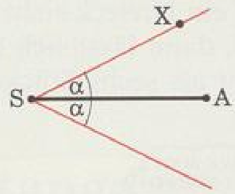
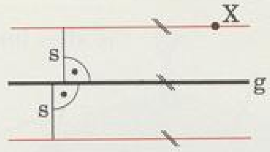
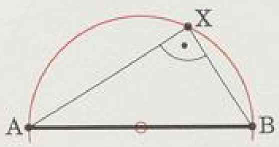
Dreieckkonstruktionen bestehen also darin, dass man aus drei gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal ein Dreieck konstruieren soll, in dem diese drei Stücke vorkommen. Als Stücke kommen neben Seiten und Winkeln zum Beispiel auch Höhen, Seiten- und Winkelhalbierende infrage. Sind nur Seiten und Winkel gegeben, dann sprechen wir von Grundkonstruktionen.

Als Lösungen lassen wir nur solche Dreiecke zu, die den üblichen Umlaufsinn haben: Beim Durchlaufen der Ecken der Reihe nach muss das Innere links liegen.

Eine Dreieckkonstruktion gliedert sich in drei Schritte:

- Zuerst zeichnen wir eine **Planfigur** – das ist eine Figur, die zeigt, wie die Lösung aussehen könnte. Die Planfigur soll uns auf die Lösungsidee bringen, an der Planfigur überlegen wir uns die Konstruktionsschritte. Die gegebenen Stücke zeichnen wir rot ein, das erwartete Ergebnis schwarz.
- Im zweiten Schritt beschreiben wir die **Lösungsidee.**
- Im dritten Schritt folgt die eigentliche **Konstruktion** mit Zirkel und Lineal (und Geo-Dreieck).

Beim Formulieren der Lösungsidee (der *Analysis,* wie manche auch sagen) gibt es einige typische Situationen: Man beginnt meist mit einer Strecke bekannter Länge und hat damit die beiden Endpunkte. Für jeden weiteren Punkt X braucht man zwei Linien: Geraden oder Kreise, die sich in ihm schneiden. Eine solche Schnittlinie nennt man von alters her auch **geometrischen Ort.** Die wichtigsten geometrischen Örter sind:

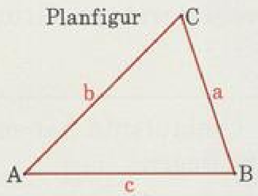
Bedingung	**Geometrischer Ort**	
Man kennt einen Punkt P und die Entfernung d=$\overline{PX}$.	**Kreis** um P mit Radius d $\{X \mid \overline{PX}=d\}$	
Man kennt von einem Winkel α die Größe, einen Schenkel [SA und weiß, dass X auf dem andern Schenkel liegt.	**freier Schenkel** von α $\{X \mid \sphericalangle ASX=\alpha\}$	
Man kennt eine Gerade g und weiß, dass X den Abstand s hat.	**Parallelenpaar** von g im Abstand s $\{X \mid d(g,X)=s\}$	
Man kennt eine Strecke [AB] und weiß, dass X der Scheitel eines 90°-Winkels über [AB] ist.	**Thaleskreis** über [AB] $\{X \mid \sphericalangle AXB=90^\circ\}$	

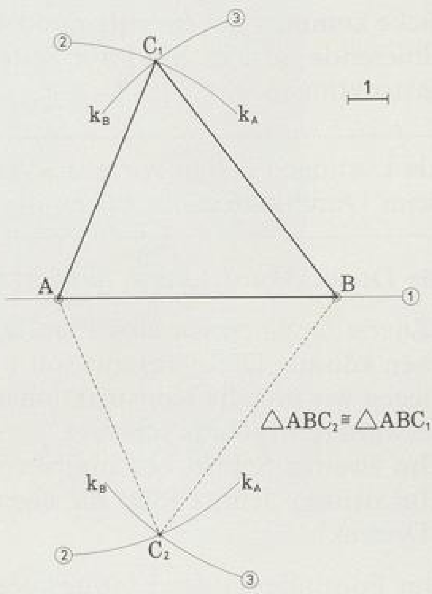
Wir gliedern nach den gegebenen Stücken:

a) Drei Seiten (SSS)

Beispiel: $a = 7{,}5$; $b=6{,}5$; $c = 7$

Planfigur





Lösungsidee und *Lösung:*

[AB] bestimmt die Punkte **A** und **B**. ①

C liegt 1. auf dem Kreis um A mit Radius b ②

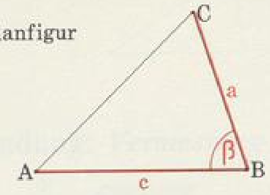
2. auf dem Kreis um B mit Radius a ③

Es ergeben sich zwei Dreiecke, ABC_1 und ABC_2, mit den geforderten Eigenschaften. Die beiden Dreiecke sind achsensymmetrisch zueinander, aber nur das Dreieck ABC_1 hat den richtigen Umlaufsinn! Damit ist die Konstruktion eindeutig.

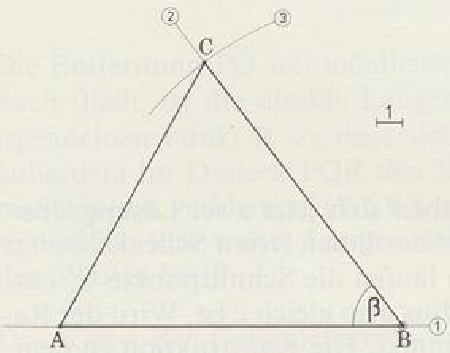
b) Zwei Seiten und der Zwischenwinkel (SWS)

Beispiel: $a = 12{,}5$; $\beta = 53°$; $c = 13$

Planfigur



Lösungsidee und *Lösung:*
[AB] bestimmt die Punkte **A** und **B**. ①
C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel β ②
2. auf dem Kreis um B mit Radius a ③

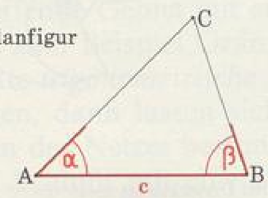


Auch diese Aufgabe hat nur eine Lösung, die Konstruktion ist eindeutig.

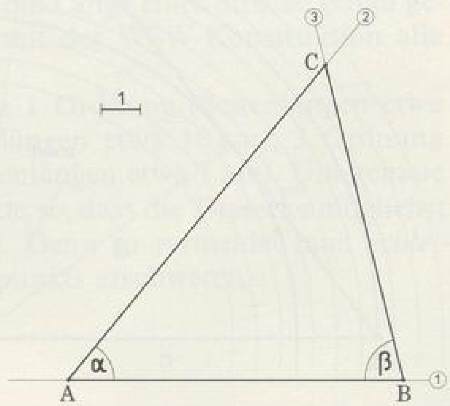
c) Zwei Winkel und eine Seite (WSW)

Beispiel: $\alpha = 51°$; $c = 8{,}5$; $\beta = 76°$

Planfigur



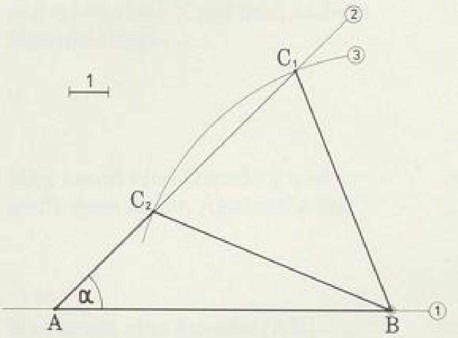
Lösungsidee und *Lösung:*
[AB] bestimmt die Punkte **A** und **B**. ①
C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α ②
2. auf dem freien Schenkel von Winkel β ③



α und β sind anliegende Winkel der Seite c. Ist nur einer der beiden gegebenen Winkel anliegend, so ergibt sich der zweite anliegende Winkel über die Winkelsumme im Dreieck. In jedem Fall hat die Aufgabe nur eine Lösung, die Konstruktion ist eindeutig.

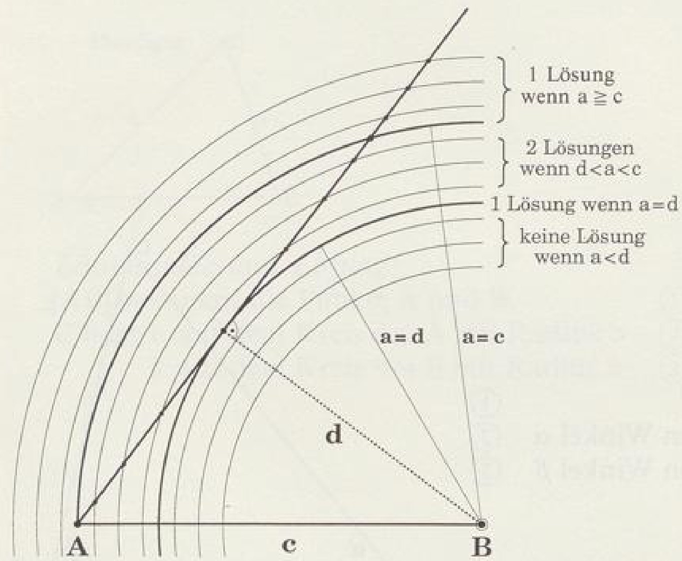
d) Zwei Seiten und ein Gegenwinkel (SSW)

Beispiel: $c = 8{,}5$; $a = 6{,}5$; $\alpha = 45°$;

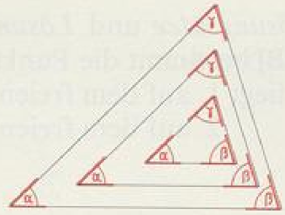


Lösungsidee und *Lösung:*
[AB] bestimmt die Punkte **A** und **B.** ①
C liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α ②
2. auf dem Kreis um B mit Radius a ③

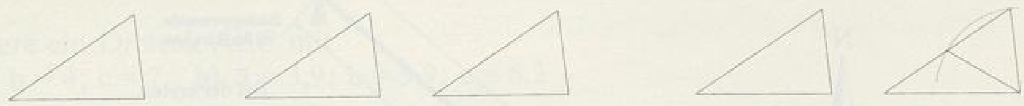
Im Gegensatz zu den bisherigen Konstruktionen ergeben sich jetzt zwei Lösungsdreiecke: ABC_1 und ABC_2. Das liegt daran, dass der Kreis um B den freien Schenkel von α zweimal trifft. Vergrößert man den Kreisradius, dann laufen die Schnittpunkte C_1 und C_2 auseinander, bis schließlich C_2 auf A trifft, der Radius also gleich c ist. Wird der Radius noch größer, dann gibt's nur noch einen Schnittpunkt. Die Konstruktion ist demnach eindeutig, wenn die Seite, die dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, mindestens so lang ist wie die andere gegebene Seite.



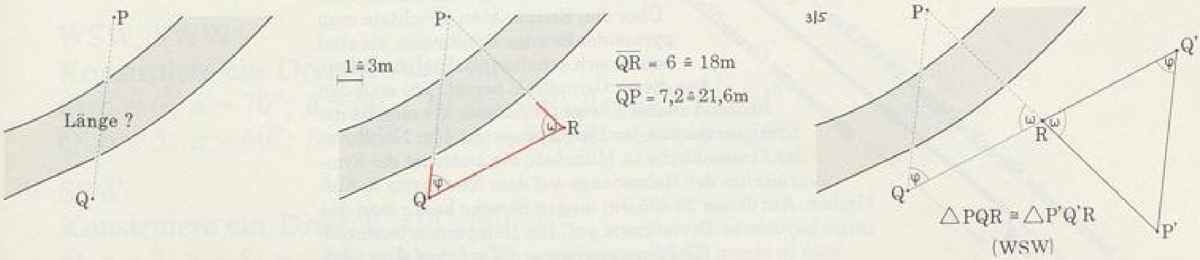
in allen Dreiecken ist $\alpha=45°$ $\beta=72°$ $\gamma=63°$



Damit haben wir alle Fälle behandelt, in denen drei Stücke (Seiten oder Winkel) eines Dreiecks bekannt sind. Bei drei gegebenen Winkeln ist einer immer schon durch die beiden anderen bestimmt (Winkelsumme im Dreieck!), im Grund sind dann vom Dreieck bloß zwei Stücke bekannt, und diese erlauben beliebig viele Lösungen.



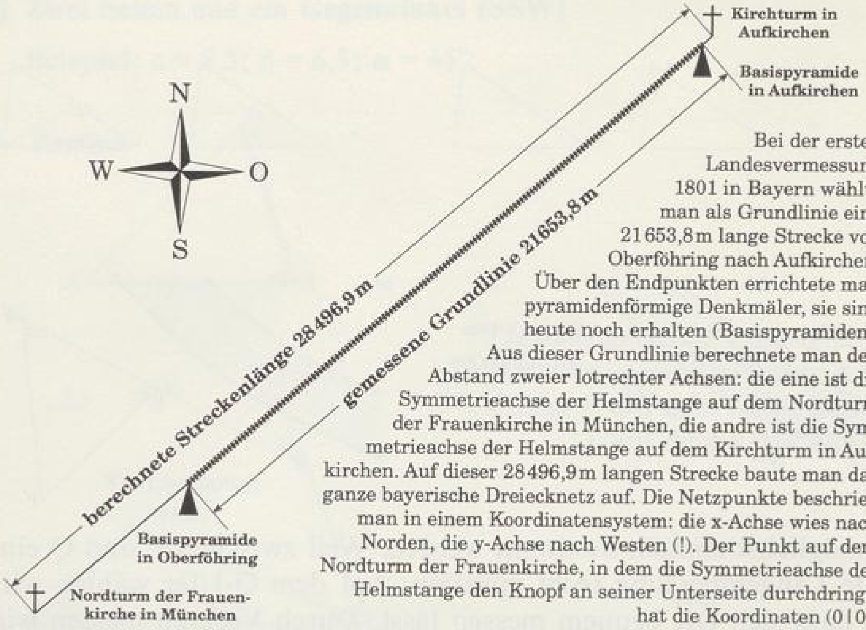
Anwendung: *Vermessung*



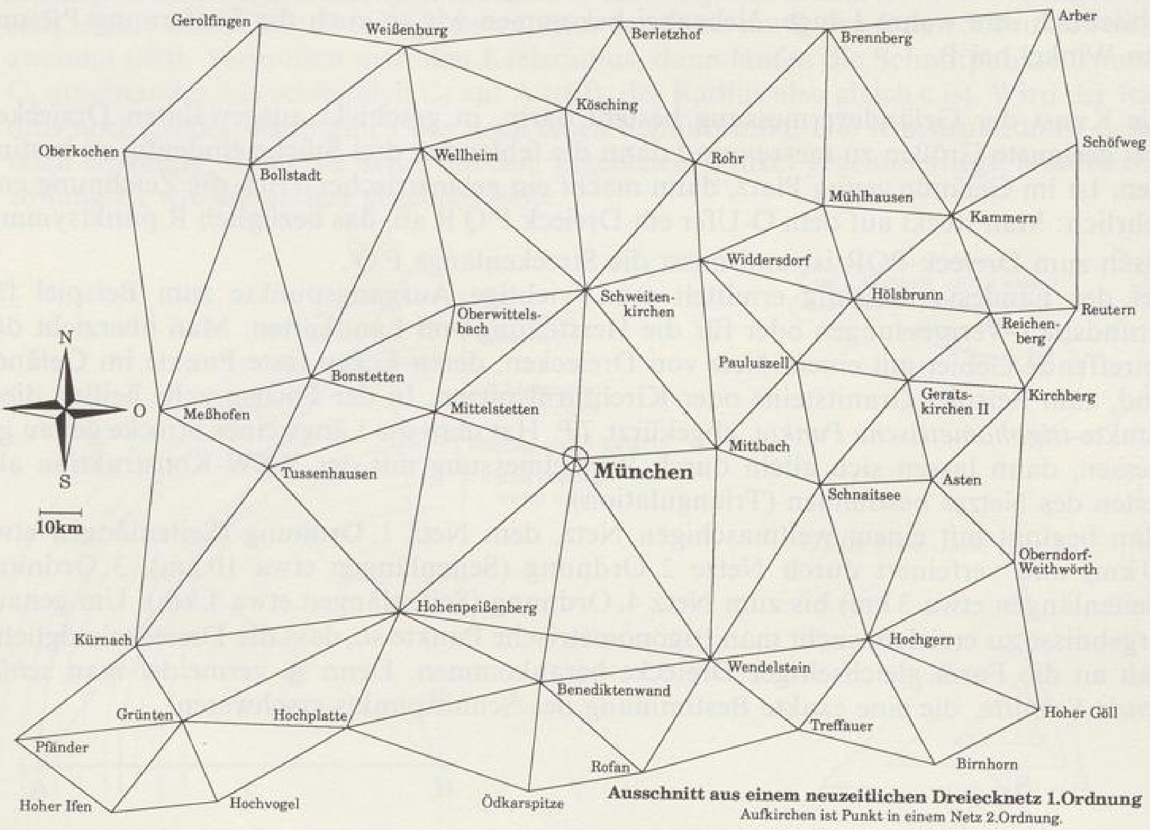
Die Entfernung $\overline{PQ}$ soll möglichst einfach bestimmt werden. Weil zwischen P und Q ein Bach fließt, ist die direkte Längenmessung recht mühsam. Auf dem Q-Ufer wählen wir irgendeinen Punkt R so, dass sich $\overline{QR}$ bequem messen lässt. Durch Visieren messen wir außerdem im Dreieck PQR den Winkel bei Q und den bei R. Wir zeichnen das Dreieck maßstäblich verkleinert (WSW), messen die Länge der Dreieckseite [PQ] und berechnen schließlich ihre wahre Länge. Nebenbei bekommen wir so auch die Entfernung $\overline{PR}$ und den Winkel bei P.

Die Kunst der Geländevermessung besteht darin, in geschickt ausgewählten Dreiecken drei geeignete Größen zu messen und dann die fehlenden drei Stücke eindeutig zu bestimmen. Ist im Gelände genug Platz, dann macht ein geometrischer Trick die Zeichnung entbehrlich: Man steckt auf dem Q-Ufer ein Dreieck P'Q'R ab, das bezüglich R punktsymmetrisch zum Dreieck PQR ist und misst die Streckenlänge $\overline{P'Q'}$.
Bei der Landesvermessung ermittelt man wichtige Ausgangspunkte zum Beispiel für Grundstück-Vermessungen oder für die Herstellung von Landkarten. Man überzieht das betreffende Gebiet mit einem Netz von Dreiecken, deren Ecken feste Punkte im Gelände sind, zum Beispiel Granitsteine oder Kirchturmspitzen. In der Fachsprache heißen diese Punkte *trigonometrische Punkte,* abgekürzt *TP.* Hat man die Länge einer Strecke genau gemessen, dann lassen sich allein durch Winkelmessung mit der WSW-Konstruktion alle Seiten des Netzes bestimmen (Triangulation).
Man beginnt mit einem weitmaschigen Netz, dem Netz 1. Ordnung (Seitenlängen etwa 30 km) und verfeinert durch Netze 2. Ordnung (Seitenlängen etwa 10 km), 3. Ordnung (Seitenlängen etwa 3 km) bis zum Netz 4. Ordnung (Seitenlängen etwa 1 km). Um genaue Ergebnisse zu erzielen, sucht man trigonometrische Punkte so, dass die Dreiecke möglichst nah an die Form gleichseitiger Dreiecke herankommen. Denn so vermeidet man *schleifende Schnitte,* die eine exakte Bestimmung des Schnittpunkts erschweren.

schleifender Schnitt



Bei der ersten Landesvermessung 1801 in Bayern wählte man als Grundlinie eine 21653,8 m lange Strecke von Oberföhring nach Aufkirchen. Über den Endpunkten errichtete man pyramidenförmige Denkmäler, sie sind heute noch erhalten (Basispyramiden). Aus dieser Grundlinie berechnete man den Abstand zweier lotrechter Achsen: die eine ist die Symmetrieachse der Helmstange auf dem Nordturm der Frauenkirche in München, die andre ist die Symmetrieachse der Helmstange auf dem Kirchturm in Aufkirchen. Auf dieser 28496,9 m langen Strecke baute man das ganze bayerische Dreiecknetz auf. Die Netzpunkte beschrieb man in einem Koordinatensystem: die x-Achse wies nach Norden, die y-Achse nach Westen (!). Der Punkt auf dem Nordturm der Frauenkirche, in dem die Symmetrieachse der Helmstange den Knopf an seiner Unterseite durchdringt, hat die Koordinaten (0|0).



Ausschnitt aus einem neuzeitlichen Dreiecknetz 1.Ordnung
Aufkirchen ist Punkt in einem Netz 2.Ordnung.

Aufgaben zu 6.1

1. SSS
   Konstruiere ein Dreieck ABC mit
   a) $a = 6$; $b = 4$; $c = 7$ **b)** $a = 3{,}9$; $b = 3{,}9$; $c = 6{,}2$

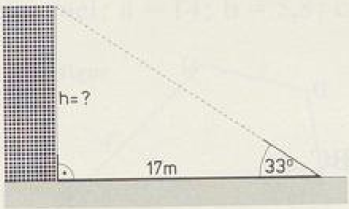
2. SWS
   Konstruiere ein Dreieck ABC mit
   a) $b = 7$; $c = 6$; $\alpha = 50°$ **b)** $a = 6{,}5$; $b = 5{,}6$; $\gamma = 113°$

3. WSW, SWW
   Konstruiere ein Dreieck ABC mit
   a) $c = 6$; $\alpha = 70°$; $\beta = 50°$ **b)** $a = 4{,}9$; $\beta = 63°$; $\gamma = 64°$
   c) $b = 5$; $\alpha = 60°$; $\beta = 50°$ **d)** $a = 5$; $\alpha = 60°$; $\beta = 50°$

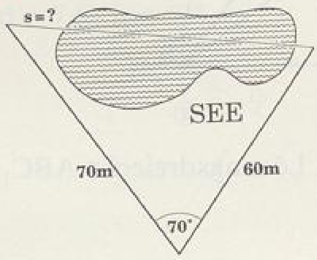
4. SSW
   Konstruiere ein Dreieck ABC mit
   a) $c = 7$; $a = 5$; $\gamma = 85°$ **b)** $c = 7$; $a = 5$; $\alpha = 35°$

Fertige eine Zeichnung in geeignetem Maßstab an und bestimme die gesuchte Größe:

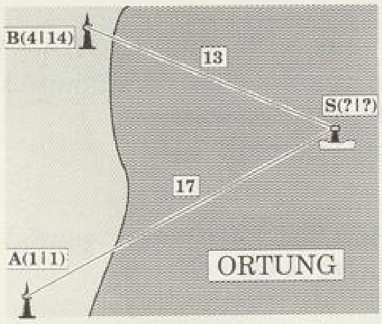
5. MAUERHÖHE



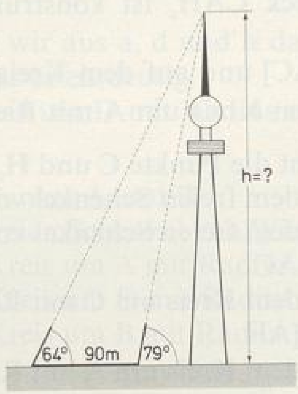
6.



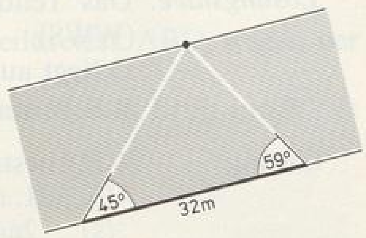
7.



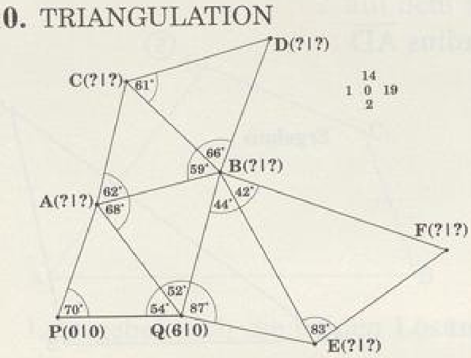
8. FERNSEHTURM



9. KANALBREITE



10. TRIANGULATION

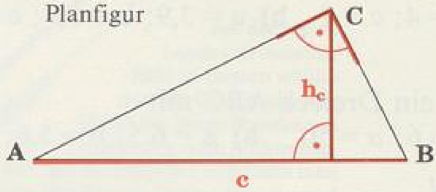


6.2 Schwierigere Konstruktionen

a) Konstruktionen mit Transversalen

Beispiel: $c = 12{,}5$; $\gamma = 90°$; $h_c = 6$

Planfigur

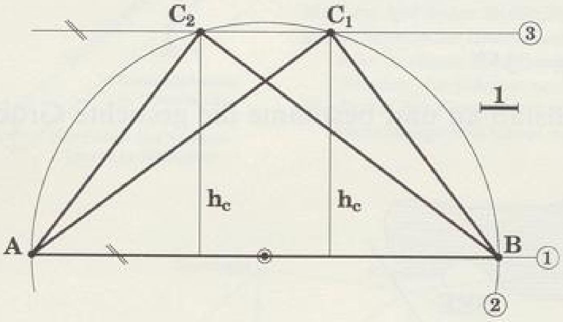


Lösungsidee und *Lösung:*

[AB] bestimmt die Punkte **A** und **B.** ①

C liegt 1. auf dem Thaleskreis über [AB] ②

2. auf der Parallele zu [AB] im Abstand h_c ③



Es ergeben sich die beiden Lösungsdreiecke ABC_1 und ABC_2.

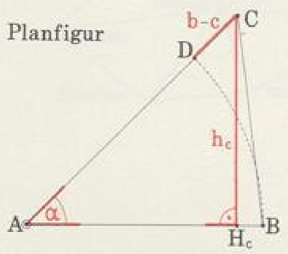
b) Dreieck aus Teildreiecken

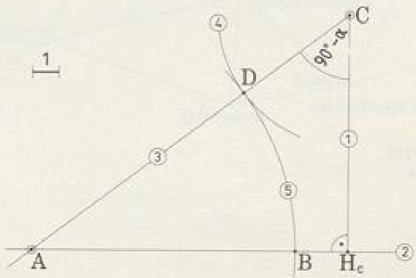
Beispiel: $b - c = 5$; $\alpha = 37°$; $h_c = 9$

Lösungsidee: Das Teildreieck CAH_c ist konstruierbar aus α, h_c und $\sphericalangle CH_cA = 90°$ (WWS).
D liegt auf [AC] und auf dem Kreis um C mit Radius $b - c$.
B liegt auf dem Kreis um A mit Radius $\overline{AD}$ und auf AH_c.

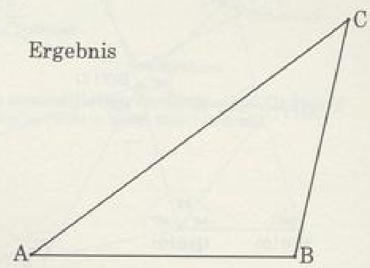
Lösung: $[CH_c]$ bestimmt die Punkte **C** und $\mathbf{H_c}$. ①
A liegt 1. auf dem freien Schenkel von $\sphericalangle H_c = 90°$ ②
2. auf dem freien Schenkel von $\sphericalangle DCH_c = 90° - \alpha$ ③
D liegt 1. auf AC
2. auf dem Kreis um C mit Radius $b - c$ ④
B liegt 1. auf $[AH_c$
2. auf dem Kreis um A mit Radius $\overline{AD}$ ⑤

Planfigur





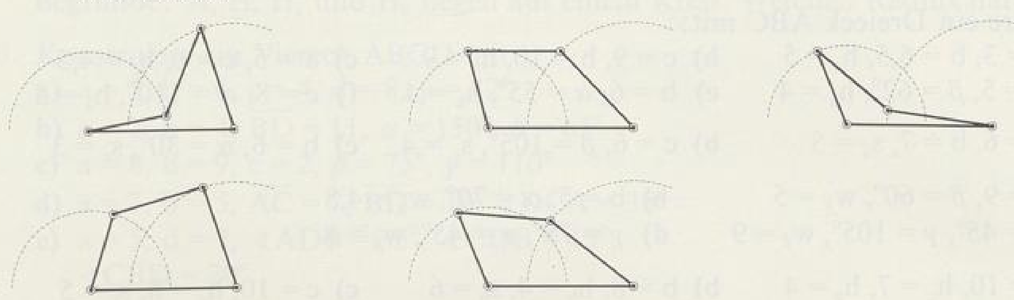
Ergebnis



c) Viereck aus Teildreiecken

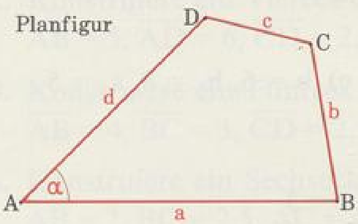
Wie viele der vier Seiten und der vier Winkel braucht man, damit das Viereck eindeutig festliegt? Genügen zum Beispiel alle vier Seiten? Nein! Die Bilder zeigen, dass es dann unendlich viele Lösungen gibt.
Im Gegensatz zum beweglichen Gelenkviereck ist ein Gelenkdreieck starr (Eindeutigkeit der SSS-Konstruktion!). In der Technik macht man sich das beim Bau von Fachwerkhäusern, Brücken und andern starren Gebilden zunutze.

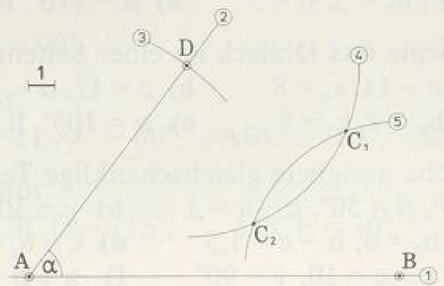
Gelenkviereck



Nicht einmal mit fünf unabhängigen Stücken ist ein Viereck eindeutig konstruierbar.
Beispiel: $a = 14$; $b = 5{,}8$; $c = 6{,}5$; $d = 7{,}5$; $\alpha = 53°$

Planfigur

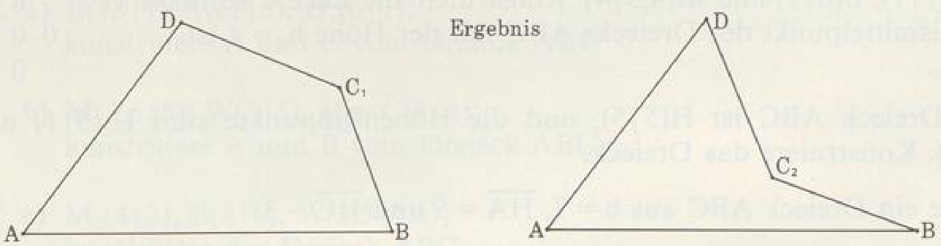




Lösungsidee: Zuerst konstruieren wir aus a, d und α das Teildreieck ABD, wegen der SSS-Konstruktion ist es eindeutig.
C liegt auf dem Kreis um D mit Radius c und auf dem Kreis um B mit Radius b.

Lösung: [AB] bestimmt die Punkte **A** und **B**. ①
D liegt 1. auf dem freien Schenkel von Winkel α ②
2. auf dem Kreis um A mit Radius d ③
C liegt 1. auf dem Kreis um D mit Radius c ④
2. auf dem Kreis um B mit Radius b ⑤

Ergebnis



Es ergeben sich die beiden Lösungsvierecke ABC_1D und ABC_2D.

Aufgaben zu 6.2

1. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) aus
a) $c = 7$, $b = 6{,}5$ **b)** $c = 7$, $\alpha = 60°$ **c)** $c = 7$, $h_a = 4$.

2. Konstruiere ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB} = 8$.

•3. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) aus
a) $c = 8$, $h_c = 3$ (zwei Lösungen) **b)** $c = 8$, $h_c = 4$
Für welche Längen von h_c gibt es kein Lösungsdreieck?

Konstruiere ein Dreieck ABC mit:

4. **a)** $a = 3$, $b = 6{,}5$, $h_a = 5$ **b)** $c = 9$, $b = 10$, $h_a = 9$ **c)** $a = 5$, $c = 6$, $h_c = 4{,}5$
d) $b = 5$, $\beta = 62°$, $h_a = 4$ **e)** $b = 6$, $\alpha = 55°$, $h_b = 4$ **f)** $c = 8$, $\alpha = 110°$, $h_a = 5$

5. **a)** $a = 6$, $b = 7$, $s_a = 5$ **b)** $c = 6$, $\beta = 105°$, $s_c = 4$ **c)** $b = 6$, $\alpha = 30°$, $s_c = 3$

6. **a)** $a = 9$, $\beta = 60°$, $w_\beta = 5$ **b)** $b = 5$, $\alpha = 70°$, $w_\gamma = 4{,}8$
c) $\beta = 45°$, $\gamma = 105°$, $w_\beta = 9$ **d)** $\gamma = 75°$, $\alpha = 45°$, $w_\beta = 8$

7. **a)** $c = 10$, $h_c = 7$, $h_a = 4$ **b)** $b = 8$, $h_b = 4$, $s_b = 6$ **c)** $c = 10$, $h_a = 8$, $s_c = 5$
d) $a = 10$, $h_c = 6$, $s_c = 7$ **e)** $b = 6$, $h_a = 5$, $w_\alpha = 5{,}7$ **f)** $b = 7$, $h_c = 5$, $w_\alpha = 5$

•8. **a)** $\gamma = 60°$, $h_a = 7$, $h_b = 9$ **b)** $\beta = 115°$, $h_a = 4$, $s_a = 5$
c) $\alpha = 30°$, $h_b = 5$, $s_c = 5$ **d)** $\beta = 110°$, $h_c = 6$, $w_\gamma = 7{,}5$

•9. Tipp: Spiegle das Dreieck an einer Seitenmitte:
a) $b = 9$, $c = 11$, $s_a = 8$ **b)** $c = 12$, $\alpha = 150°$, $s_a = 3$ **c)** $b = 6$, $h_b = 8$, $s_a = 5$
d) $c = 9$, $h_a = 7$, $s_b = 8$ **e)** $\alpha = 105°$, $h_c = 6$, $s_a = 5$

•10. Tipp: Suche geeignete gleichschenklige Teildreiecke:
a) $\gamma = 90°$, $\beta = 50°$, $c - a = 3$ **b)** $\gamma = 30°$, $a = b$, $b - c = 3$
c) $a = 5$, $h_c = 4$, $b - c = 1{,}5$ **d)** $c = 6$, $\alpha = 60°$, $a + b = 10$
e) $a = b$, $a + c = 10$, $\gamma = 90°$ **f)** $a + b + c = 15$, $\alpha = 60°$, $\gamma = 90°$

11. Konstruiere ein Dreieck ABC aus:
a) $c = 7$, $h_a = 6$, $\alpha = 45°$ **b)** $c = 6$, $h_a = 5$, $h_c = 4$ **c)** $c = 8$, $h_b = 7$, $b = 6$.

•12. Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Umkreisradius r:
a) $a = 4{,}5$ $\beta = 70°$, $r = 2{,}5$ **b)** $r = 5$, $\alpha = 65°$, $\beta = 65°$ c) $b = 4{,}5$, $h_b = 3$, $r = 2{,}5$
d) $c = 6$, $h_b = 4$, $r = 3$ **e)** $c = 6$, $h_b = 3$, $r = 3{,}5$.

13. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 8$, $h_c = 7$, $M_c(5\,|\,1)$ Mittelpunkt auf c und mit dem Umkreis um $M(5\,|\,4)$ mit Radius 5.
9
0 0 10
0

14. Zeichne $A(1\,|\,1)$, $B(8\,|\,1)$ und $M(4{,}5\,|\,4)$. Konstruiere die Ecke C so, dass M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC mit der Höhe $h_c = 4$ ist.
6
0 0 10
0

15. In einem Dreieck ABC ist $H(5\,|\,5)$, und die Höhenfußpunkte sind $H_c(5\,|\,1)$ und $H_a(6{,}5\,|\,6{,}5)$. Konstruiere das Dreieck.

•16. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$, $\overline{HA} = 5$ und $\overline{HC} = 3$.

•17. Konstruiere das spitzwinklige Dreieck ABC, von dem die Höhenfußpunkte bekannt sind: $H_a(10|4)$, $H_b(6|6)$ und $H_c(8{,}5|1)$. 9 0 0 11 0

18. In einem Dreieck ist $H(4|3)$, $H_a(8|5)$ und $H_b(1|4)$. 13

a) Konstruiere das spitzwinklige Dreieck ABC. 0 0 11

•b) Welche weiteren Dreiecke haben dasselbe Höhenfußpunkt-Dreieck wie **a)**? 0

19. H_c und H_b sind die Höhenfußpunkte im Dreieck ABC.
Begründe: A, H, H_c und H_b liegen auf einem Kreis. Welchen Radius hat er?

20. Konstruiere ein Viereck ABCD mit:

a) $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 8$, $\gamma = 82°$

b) $a = 7$, $b = 4$, $\overline{BD} = 11$, $\alpha = 150°$, $\beta = 65°$

c) $a = 8$, $b = 9$, $c = 2$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$

d) $a = 7$, $b = 5$, $\overline{AC} = 7$, $\overline{BD} = 10$, $\sphericalangle DCA = 35°$

e) $a = 5$, $d = 7$, $\sphericalangle ADB = 35°$, $\sphericalangle CDB = 15°$, $\sphericalangle CBD = 20°$

21. Konstruiere ein Rechteck ABCD aus

a) $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 4$ **b)** $\overline{BD} = 8$, $\sphericalangle BDC = 22{,}5°$

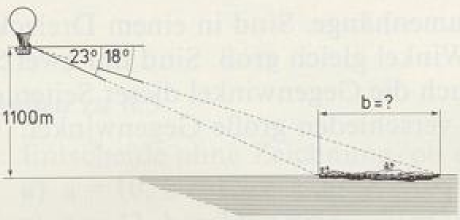
22. Konstruiere ein Viereck ABCD aus
$\overline{AB} = 5$, $\overline{AD} = 6$, $\overline{CD} = 2{,}5$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 90°$.

23. Konstruiere ein Fünfeck ABCDE mit:
$\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 2{,}5$, $\overline{DE} = 3{,}5$, $\sphericalangle EAC = 60°$, $\sphericalangle ABC = 105°$, $\sphericalangle BCD = 105°$

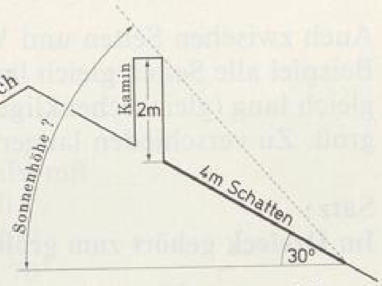
24. Konstruiere ein Sechseck ABCDEF mit:
$\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 2{,}5$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{DC} = 4$, $\sphericalangle BCD = 115°$, $\sphericalangle FCE = 30°$, $\sphericalangle ECD = 30°$, $\sphericalangle CDE = 100°$, $\sphericalangle EFC = 75°$

25. Fertige eine Zeichnung in geeignetem Maßstab an und bestimme die gesuchte Größe

a) INSELGRÖSSE



b) SONNENHÖHE



26. a) $B(15|1)$, $W(7|5)$, $H_c(6|1)$; 13
konstruiere A und C vom Dreieck ABC 0 0 15 0

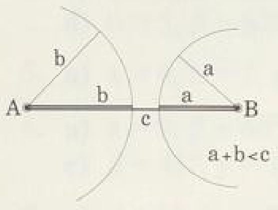
b) $M(2{,}5|5)$, $W(5|5)$, $H = C(8|4)$; 10
konstruiere A und B vom Dreieck ABC 0 0 8 0

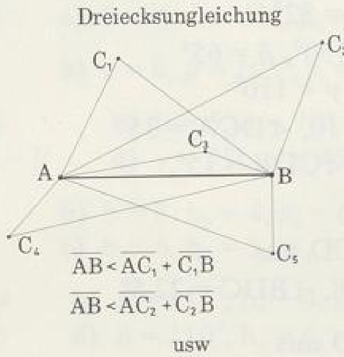
c) $M_c(4|3)$, $B(8|6)$, $W(3{,}5|4{,}5)$; 7
konstruiere das Dreieck ABC 0 0 9 0

6.3 Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck

Die Aufgabe, ein Dreieck aus den gegebenen Seiten zu konstruieren, ist nicht immer lösbar. So gibt es zum Beispiel kein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 8. Der Grund ist einfach: Die beiden Kreise, die sich in C schneiden sollten, treffen sich nicht. Damit sie sich schneiden, muss $a + b \geqq c$ sein; der Fall $a + b = c$ liefert jedoch kein Dreieck, weil C auf [AB] liegt. Es gilt der

Satz:
Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte. (Dreiecksungleichung)





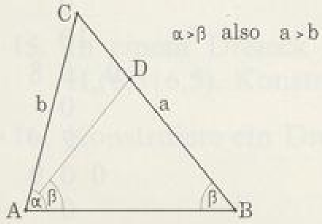
Es gilt also immer: $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$.
Im Grund beschreibt die Dreiecksungleichung etwas, was jeder weiß: Der direkte Weg von A nach B ist immer kürzer als ein Umweg über C. Auch der Längenunterschied zweier Seiten ist nicht beliebig wählbar. Wäre nämlich zum Beispiel $a - b \geqq c$, dann wäre auch $a \geqq b + c$, was gegen die Dreiecksungleichung verstieße. Deshalb gilt der

Satz:
Im Dreieck ist der Längenunterschied zweier Seiten immer kleiner als die Länge der dritten Seite.

Auch zwischen Seiten und Winkeln gibt es Zusammenhänge. Sind in einem Dreieck zum Beispiel alle Seiten gleich lang, so sind auch alle Winkel gleich groß. Sind nur zwei Seiten gleich lang (gleichschenkliges Dreieck!), so sind auch die Gegenwinkel dieser Seiten gleich groß. Zu verschieden langen Seiten gehören auch verschieden große Gegenwinkel.

Satz:
Im Dreieck gehört zum größeren zweier Winkel die längere Gegenseite.

Beispiel: Wenn $\alpha > \beta$, dann $a > b$.



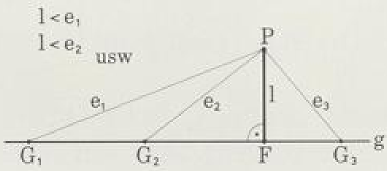
Begründung: Im Dreieck ABC ist $\alpha > \beta$. Tragen wir in A den Winkel β an, dann schneidet der freie Schenkel die Seite [BC] in D. Das Dreieck ABD ist dann gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{BD}$. Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{AC} < \overline{CD} + \overline{DA}$, also auch $\overline{AC} < \underbrace{\overline{CD} + \overline{DB}}$ (weil $\overline{DA} = \overline{DB}$),

also ist $\quad b \quad < \quad a$

Weil in einem Dreieck höchstens ein Winkel ein rechter oder gar ein stumpfer sein kann, gilt der

Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.
In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die Gegenseite des stumpfen Winkels die Längste.

Damit können wir auch zeigen, dass die Lotstrecke l die kürzeste Verbindung von einem Punkt (nicht auf der Gerade) zu einem Punkt der Gerade ist. Jede andere Verbindungsstrecke ist Hypotenuse in einem Dreieck mit der Kathete l, sie ist deshalb länger.



Geht man von den Seiten aus (statt von den Winkeln), dann ergibt sich der

Satz:
In einem Dreieck liegt der längeren zweier Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Beispiel: Wenn $c > b$, dann $\gamma > \beta$

Begründung: Wäre $\beta \geqq \gamma$, dann wäre auch $b \geqq c$. Das kann aber nicht sein, weil wir $c > b$ vorausgesetzt haben.

Aufgaben zu 6.3

1. Entscheide ohne Zeichnung, ob es ein Dreieck ABC gibt mit
   a) $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ **b)** $a = 8$, $b = 9$, $c = 10$
   c) $a = 43$, $b = 27$, $c = 16$ **d)** $a = 9$, $b = 14$, $\alpha = 95°$
   e) $a = 4$, $b = 5$, $\alpha = 70°$, $\gamma = 50°$ **f)** $a = 5$, $h_c = 5{,}5$ $\alpha = 70°$

2. In einem Dreieck ABC ist $\beta = 120°$ und $b = 10$.
   Was kannst du über die Längen von a und c sagen?

3. Von drei Punkten P, Q und R ist bekannt
   a) $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ **b)** $\overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR}$
   c) $\overline{PQ} - \overline{QR} = \overline{PR}$. Wie liegen jeweils die drei Punkte?

4. In einem Dreieck haben zwei Seiten die Längen 5 und 7.
   Zwischen welchen Grenzen liegt die Länge der dritten Seite?

•**5.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. W ist der Schnittpunkt von w_γ und c, D ist der Spiegelpunkt von A bezüglich w_γ.
Begründe: **a)** $\overline{CD} = b$ **b)** $\sphericalangle CDW = \alpha$
c) $\beta < \alpha$ (ohne Verwendung des Satzes: $b < a \Rightarrow \beta < \alpha$).

6. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a > b$. Wähle D auf [BC] so, dass $\overline{CD} = 6$.
Begründe: **a)** $\sphericalangle ADC$ ist spitz **b)** $\overline{AB} > \overline{BD}$ **c)** Formuliere die Aussage **b)** mit Hilfe der Dreieckseiten a, b und c.

7. Im Dreieck ABC ist $c = 13$ und $b = 19$. Die Länge $\overline{BC}$ ist ganzzahlig. Wie lang kann [BC] sein, wenn gilt
a) zwei Winkel sind gleich groß
b) $\gamma < \alpha < \beta$ **c)** $\beta > 100°$?

•**8.** Zeichne ein konvexes Viereck ABCD und seine Diagonalen e und f. u ist der Umfang des Vierecks.
Begründe:
a) $e + f > a + c$ **b)** $e + f > \frac{1}{2}u$ **c)** $e + f < u$.

9. ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, D ein Punkt auf AC.
Begründe:
a) Liegt D zwischen A und C, dann ist $\overline{BD} > \overline{DC}$.
b) Liegt D nicht auf der Strecke [AC], aber auf ihrer Verlängerung über A hinaus, dann ist $\overline{BD} < \overline{DC}$.

•**10.** Begründe: In jedem Dreieck ABC gilt: $h_a < \frac{b+c}{2}$.

•**11.** Folgere aus dem Ergebnis von **10.**, dass in jedem Dreieck die drei Höhen zusammen kürzer sind als der Umfang.

•**12.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und die Höhe h_c.
Begründe: $h_c \leqq \frac{c}{2}$.