Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

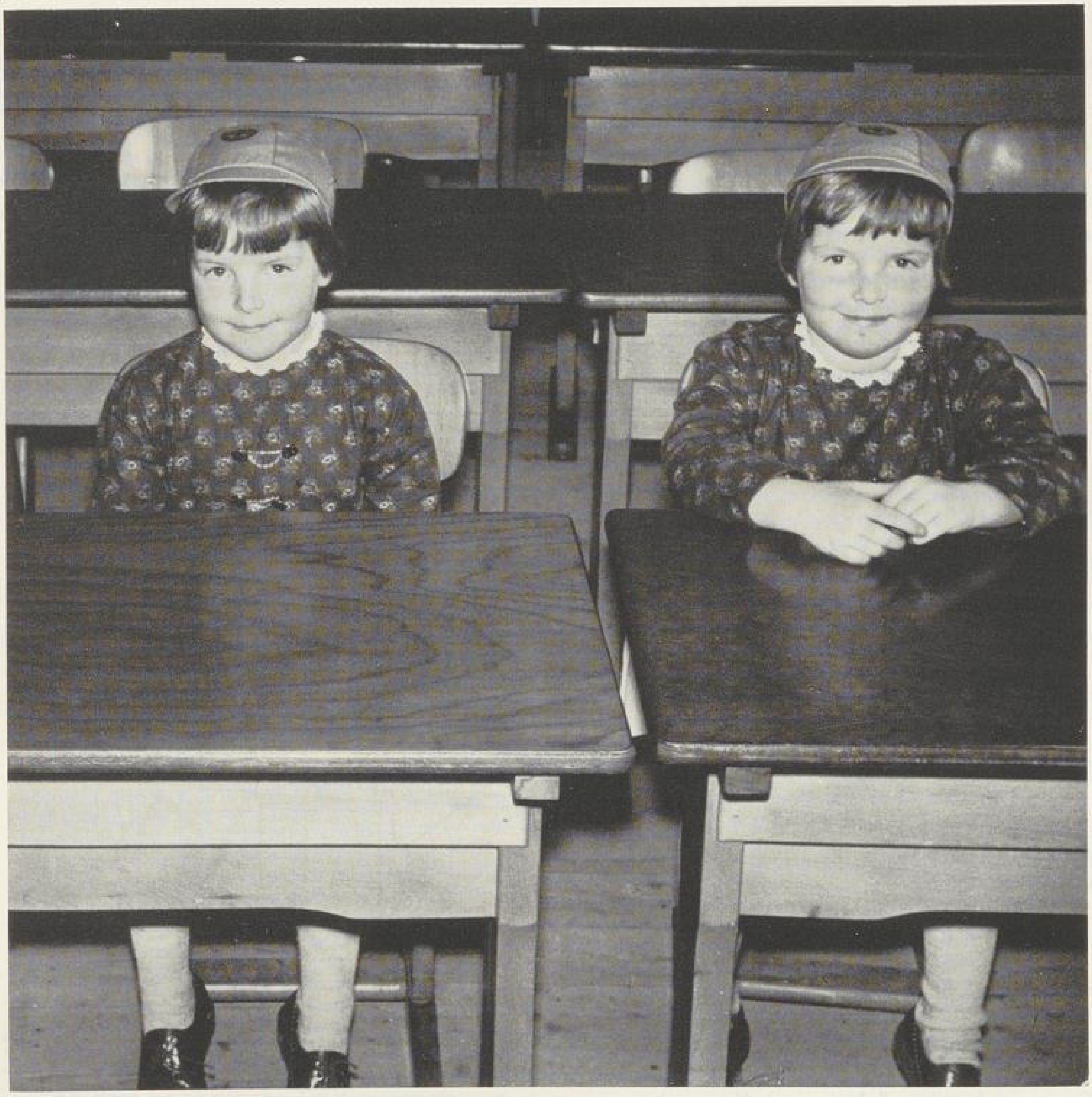
München, 2001

7. Kapitel: Kongruenz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

7. Kapitel

Kongruenz



7.1 Kongruenz von Figuren

Die meisten regelmäßigen Muster bestehen aus sich wiederholenden Figuren.

Definition:

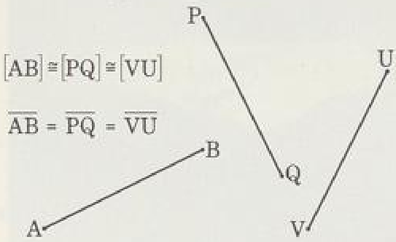
Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen decken, heißen deckungsgleich oder **kongruent.**
Sind zwei Figuren F_1 und F_2 kongruent, so schreibt man kurz $F_1 \cong F_2$.

Zwei Figuren decken sich, wenn sie punktweise übereinstimmen.

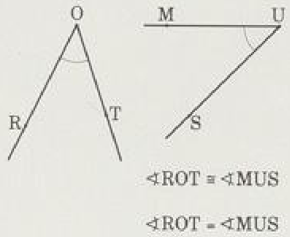
Bei manchen einfachen geometrischen Figuren können wir mit einem Blick entscheiden, ob sie kongruent sind. So sind zum Beispiel kongruent:

- zwei Strecken, wenn sie gleich lang sind
- zwei Winkel, wenn sie gleich groß sind
- zwei Kreise, wenn sie gleichen Radius haben
- zwei Quadrate, wenn ihre Seitenlängen übereinstimmen.

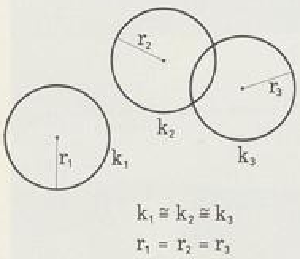
kongruente Strecken



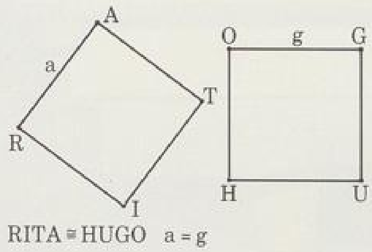
kongruente Winkel



kongruente Kreise



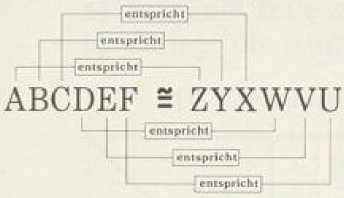
kongruente Quadrate

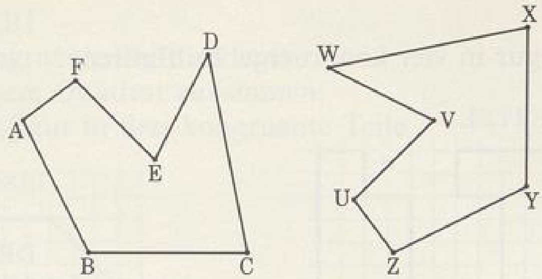


Immer kongruent sind auch zwei zueinander achsen- oder punktsymmetrische Figuren: Die achsensymmetrischen Figuren lassen sich zur Deckung bringen, indem man an der Symmetrieachse faltet, und die punktsymmetrischen Figuren gehen ineinander über, wenn man sie 180° ums Symmetriezentrum dreht.

Aus der Definition der Kongruenz wird sofort klar, dass in kongruenten Figuren entsprechende Strecken gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß sind. Unter entsprechenden Stücken verstehen wir solche, die sich beim Aufeinanderlegen decken.
Gewöhnlich schreiben wir die Ecken so an, dass entsprechende Buchstaben links und rechts vom ≅-Zeichen an der gleichen Stelle stehen.

entsprechende Stücke





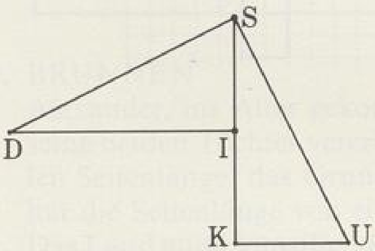
$\overline{CD} = \overline{XW}$

$\overline{BF} = \overline{YU}$

$\sphericalangle FED = \sphericalangle UVW$

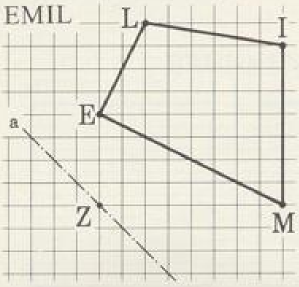
Aufgaben zu 7.1

1. DISKUS
DIS und KUS sind kongruente Dreiecke. Schreibe dies in Zeichen auf drei verschiedene Arten. Welche Strecken und welche Winkel sind kongruent?



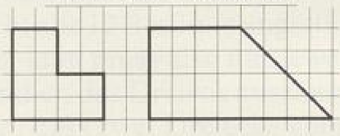
2. EMIL wird
a) an der Gerade a gespiegelt zu E′M′I′L′,
b) am Zentrum Z gespiegelt zu E″M″I″L″.
Zeichne Urbild und Bild. Warum sind sie kongruent?

EMIL

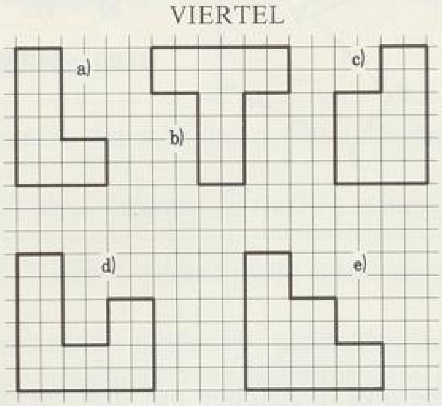


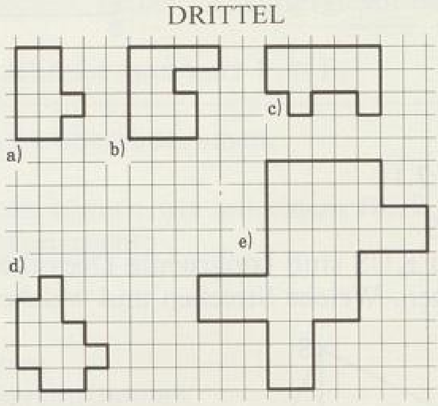
•3. DRITTEL – VIERTEL
Zeichne die Figuren auf ein Blatt und zerschneide sie in
a) drei kongruente Teilfiguren,
b) vier kongruente Teilfiguren.

DRITTEL-VIERTEL



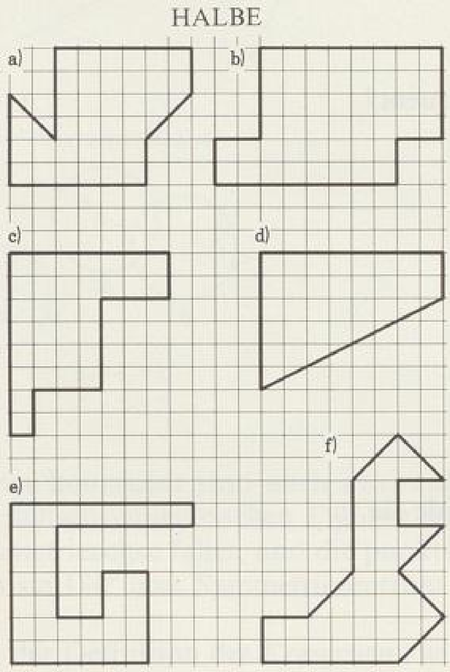
•4. VIERTEL
Zerlege jede Figur in vier kongruente Teilfiguren.





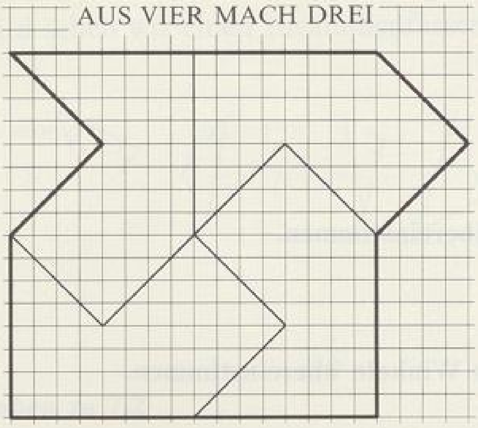
⁚5. DRITTEL
Zerlege jede Figur in drei kongruente Teilfiguren.

⁚6. HALBE
Zerlege jede Figur in zwei kongruente Teilfiguren.

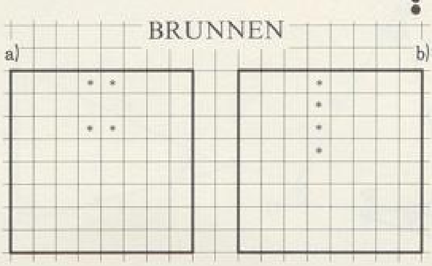


7. Zerlege ein gleichseitiges Dreieck
   a) in zwei, drei, vier kongruente Teildreiecke,
   •b) in drei kongruente Trapeze.

8. AUS VIER MACH DREI
Die Figur ist in vier kongruente Teile zerlegt.
a) Setze die Teile zu einem Quadrat zusammen.
b) Zerlege die Ausgangsfigur in drei kongruente Teile.



9. BRUNNEN
Alexander, ins Alter gekommen, will seinen Grundbesitz an seine beiden Söhne und seine beiden Töchter vererben. Er besitzt ein quadratisches Grundstück von acht Meilen Seitenlänge; das Grundstück ist in quadratische Parzellen eingeteilt, jede Parzelle hat die Seitenlänge von einer Meile.
Das Land muss künstlich bewässert werden, aber auf dem Grundstück gibt es nur vier Brunnen. **a)** Alexanders Kinder sollen kongruente Grundstücke mit je gleich viel Parzellen erhalten. **b)** Jedes Grundstück soll einen eigenen Brunnen haben, der alle eigenen Parzellen über eine Leitung mit Wasser versorgt, die nur auf eigenem Grund verläuft.
Für **a)** sind 76 Lösungen, für **b)** sind 5 Lösungen bekannt.



7.2 Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei kongruente Dreiecke ABC und DEF stimmen in den entsprechenden Seiten und Winkeln überein. Um bei zwei Dreiecken zu entscheiden, ob sie kongruent sind, muss man nicht alle 12 Bestimmungsstücke nachmessen. Gewöhnlich reichen schon 3 Übereinstimmungen, man muss also nur jeweils 3 Stücke messen – es müssen bloß die Richtigen sein! Wenn nämlich das Dreieck aus diesen 3 Stücken eindeutig konstruierbar ist, dann können wir sicher sein, dass zwei Dreiecke kongruent sind, die in diesen Stücken übereinstimmen.

Von früher wissen wir, dass ein Dreieck aus den 3 Seiten eindeutig konstruierbar ist. Also gilt:

1. Kongruenzsatz (SSS):
Dreiecke sind kongruent,
wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.

Entsprechend gelten:

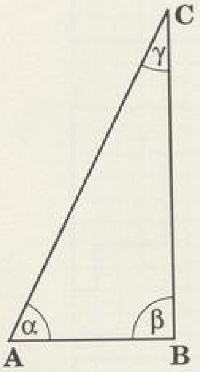
2. Kongruenzsatz (SWS):
Dreiecke sind kongruent,
wenn sie in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.

3. Kongruenzsatz (WSW):
Dreiecke sind kongruent,
wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

4. Kongruenzsatz (SWW):
Dreiecke sind kongruent,
wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem nicht anliegenden Winkel übereinstimmen.

5. Kongruenzsatz (SSW):
Dreiecke sind kongruent,
wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

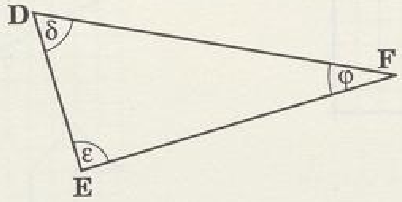
Weiß man von zwei Dreiecken, dass sie in drei Stücken übereinstimmen, für die wir einen Kongruenzsatz kennen, dann wissen wir, dass sie kongruent sind, also auch in den übrigen Stücken übereinstimmen.



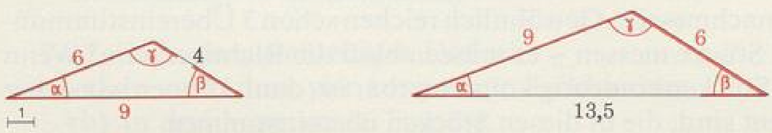
$$\alpha = \delta$$
$$\beta = \varepsilon$$
$$\gamma = \varphi$$
$$\overline{AB} = \overline{DE}$$
$$\overline{BC} = \overline{EF}$$
$$\overline{CA} = \overline{FD}$$

Kongruente Dreiecke

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

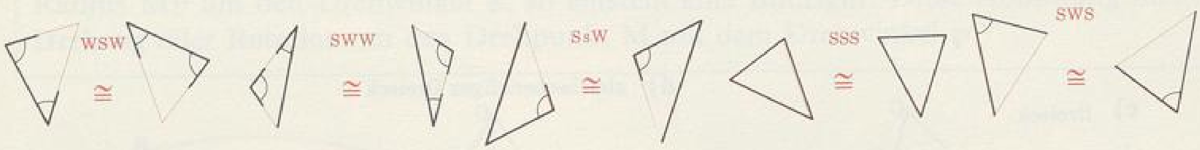


Wenn nun zwei Dreiecke in mehr als drei Stücken übereinstimmen, dann könnte man meinen, dass sie erst recht kongruent sind. Obacht! Es gibt sogar Dreiecke, die in fünf Stücken übereinstimmen und doch nicht kongruent sind, siehe Bild.



An diesem Beispiel sehen wir, dass es nicht nur auf die Anzahl, sondern auch auf die Lage der gegebenen Stücke ankommt. Deshalb haben wir bei der Formulierung der Kongruenzsätze die Lage der Stücke angedeutet, indem wir sie beschrieben haben mit: Zwischenwinkel, anliegender Winkel, Gegenwinkel.

Im Bild sehen wir einen zusammenfassenden Überblick über die Kongruenzsätze.

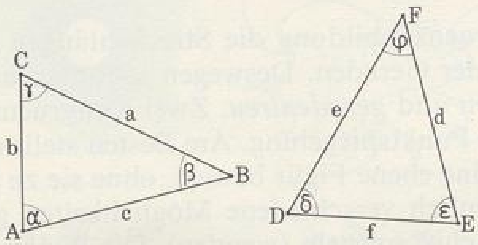


Aufgaben zu 7.2

1. Welche Stücke (Seiten oder Winkel) bestimmen ein Dreieck eindeutig, wenn man weiß, dass das Dreieck
   a) gleichseitig **b)** gleichschenklig-rechtwinklig
   c) gleichschenklig **d)** rechtwinklig
   e) stumpfwinklig ist?

•2. Ein Dreieck soll eindeutig bestimmt sein; bei welchem Dreieckstyp genügt die Angabe
   a) einer Seite **b)** eines Winkels
   c) zweier Winkel **d)** zweier Seiten
   e) eines Winkels und einer Seite?

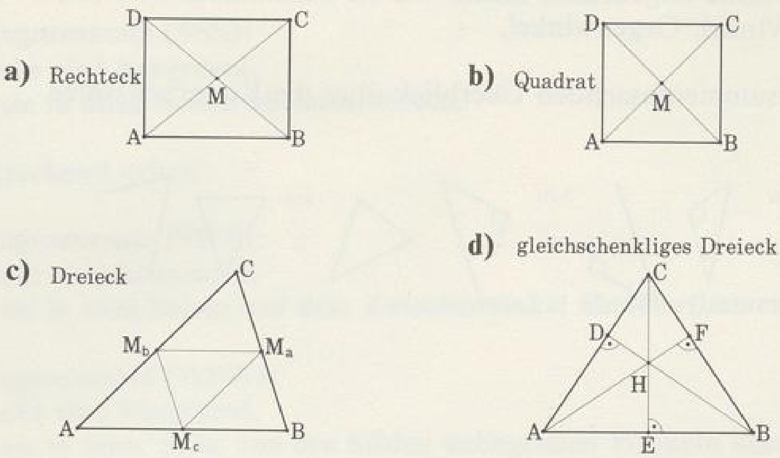
•3. KONGRUENZ?



Sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent, wenn man weiß
   a) $c = d, a = e, \beta = \varphi$ **b)** $c = d, a = e, \beta = \delta$
   c) $c = d, \alpha = \varepsilon, \beta = \varphi$ **d)** $c = d, \alpha = \varphi, \beta = \varepsilon$
   e) $c = d, \alpha = \varepsilon, \beta = \delta$ **f)** $b = f, \alpha = \varepsilon, h_c = h_d$?
Zeichne, falls möglich, zwei nicht kongruente Dreiecke.

•4. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Spitze C. F ist irgendein Punkt auf [AB]. Die Dreiecke AFC und BCF stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein.
Welche Stücke sind das? Sind die Dreiecke kongruent?

•5. SUCHE in den Figuren **a)** bis **d)** alle Paare kongruenter Dreiecke. Gib jeweils einen passenden Kongruenzsatz an.



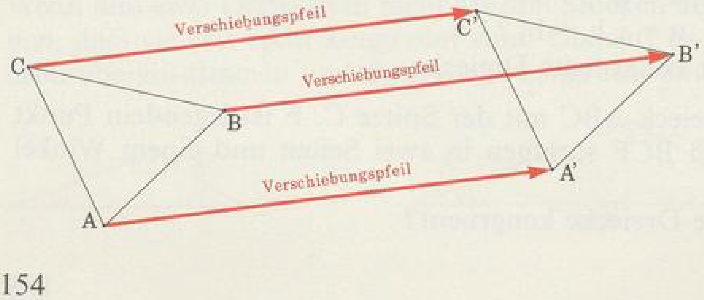
•6. Im Dreieck ABC ist H der Höhenfußpunkt von h_c. Außerdem gilt $\overline{AH} = a$.
Zeige: Die Dreiecke AHC und HBC stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein, müssen aber nicht kongruent sein.

7.3 Kongruenzabbildungen

Definition

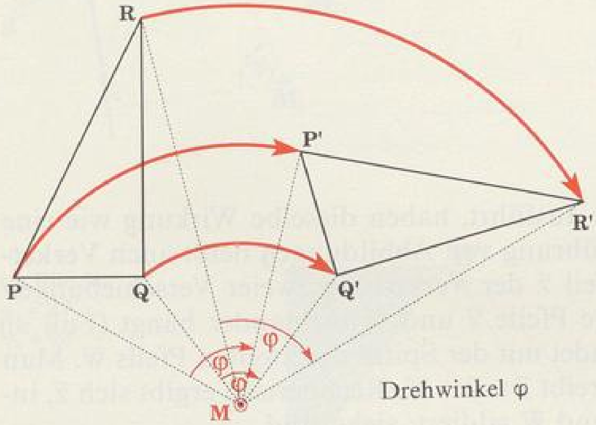
Eine Abbildung, die jede Figur auf eine dazu kongruente abbildet, heißt **Kongruenzabbildung.**

Wegen dieser Definition bleiben bei jeder Kongruenzabbildung die Streckenlängen und Winkelgrößen erhalten, werden aus Geraden wieder Geraden. Deswegen sagt man auch, Kongruenzabbildungen sind *längentreu, winkeltreu* und *geradentreu*. Zwei Kongruenzabbildungen kennen wir schon: die Achsen- und die Punktspiegelung. Am Besten stellt man sich eine Kongruenzabbildung so vor, dass man eine ebene Figur bewegt, ohne sie zu verzerren. Man kann zeigen, dass es nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt: Die Figur verschieben, sie drehen oder an einer Achse spiegeln (wenden). Die Punktspiegelung ist damit schon erfasst, weil sie ja eine spezielle Drehung (um 180°) ist.
Zusätzlich zur Achsenspiegelung definiert man demnach noch zwei Kongruenzabbildungen: die Verschiebung und die Drehung.



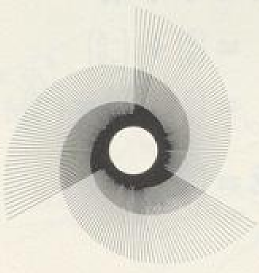
Verschiebt man jeden Punkt einer Figur gleich weit in dieselbe Richtung, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Verschiebung** oder **Translation.** Man kennzeichnet sie mit Verschiebungspfeilen.

Bewegt man jeden Punkt P einer Figur auf dem Kreis um den festen Punkt M mit dem Radius $\overline{MP}$ um den Drehwinkel φ, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Drehung** oder **Rotation** um den Drehpunkt M mit dem Drehwinkel φ.

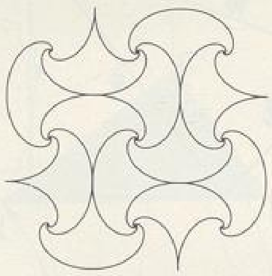


Drehwinkel φ

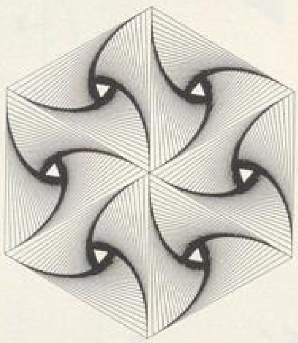
Die Drehung zeigt uns eine neue Art der Symmetrie, die **Drehsymmetrie.** Eine Figur heißt **drehsymmetrisch mit dem Winkel** φ**,** wenn sie bei einer Drehung um φ in sich übergeht.



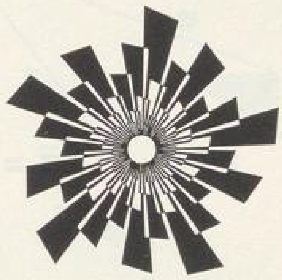
$\varphi = \frac{360°}{3} = 120°$



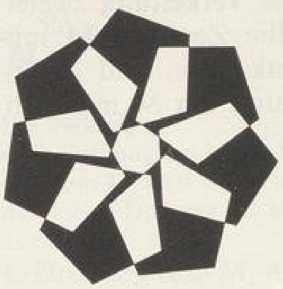
$\varphi = \frac{360°}{4} = 90°$



$\varphi = \frac{360°}{6} = 60°$



$\varphi = \frac{360°}{5} = 72°$



$\varphi = \frac{360°}{7}$

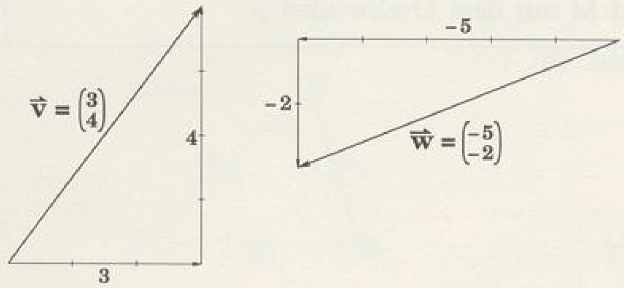
$\varphi = \frac{360°}{8} = 45°$

$\varphi = \frac{360°}{9} = 40°$

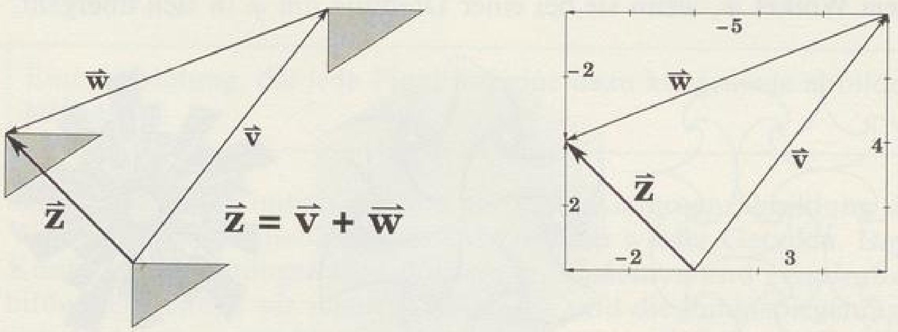
$\varphi = \frac{360°}{10} = 36°$

Eigenschaften von Verschiebung und Drehung

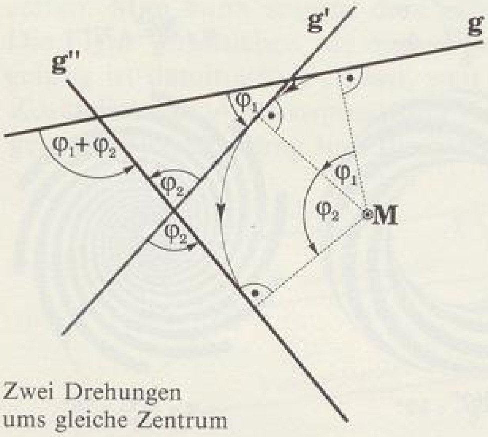
Im Koordinatensystem ist der Verschiebungspfeil $\vec{v}$ und damit die Verschiebung durch zwei Zahlen eindeutig festgelegt. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ bedeutet zum Beispiel eine Verschiebung um 3 nach rechts und um 6 nach oben. Minuszeichen weisen auf die Gegenrichtung hin. So bedeutet zum Beispiel $\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Verschiebung um 5 nach links und um 2 nach unten.



Zwei Verschiebungen, die man nacheinander ausführt, haben dieselbe Wirkung wie eine einzige Verschiebung. Die Nacheinanderausführung von Abbildungen heißt auch **Verkettung** der Abbildungen. Der Verschiebungspfeil $\vec{z}$ der Verkettung zweier Verschiebungen ergibt sich in der Zeichnung, indem man die Pfeile $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aneinander hängt (Fuß an Spitze) und den Fuß des ersten Pfeils $\vec{v}$ verbindet mit der Spitze des zweiten Pfeils $\vec{w}$. Man bezeichnet $\vec{z}$ als Summe von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und schreibt $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$. Rechnerisch ergibt sich $\vec{z}$, indem man die entsprechenden Zahlen von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ addiert, siehe Bild.



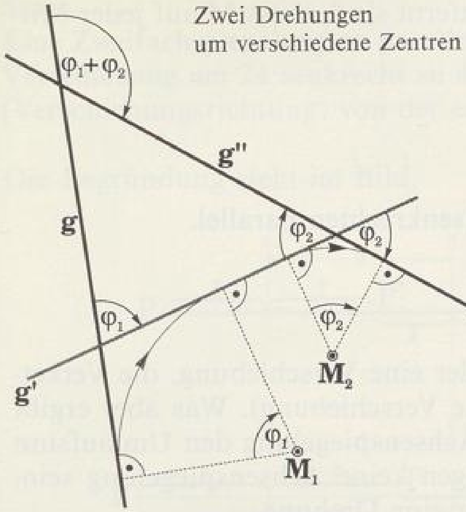
$$\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 + (-5) \\ 4 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Zwei Drehungen ums gleiche Zentrum

Eine Drehung ist im Koordinatensystem eindeutig festgelegt durch Drehzentrum M und Drehwinkel φ. Die Verkettung zweier Drehungen um dasselbe Zentrum M mit verschiedenen Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$.

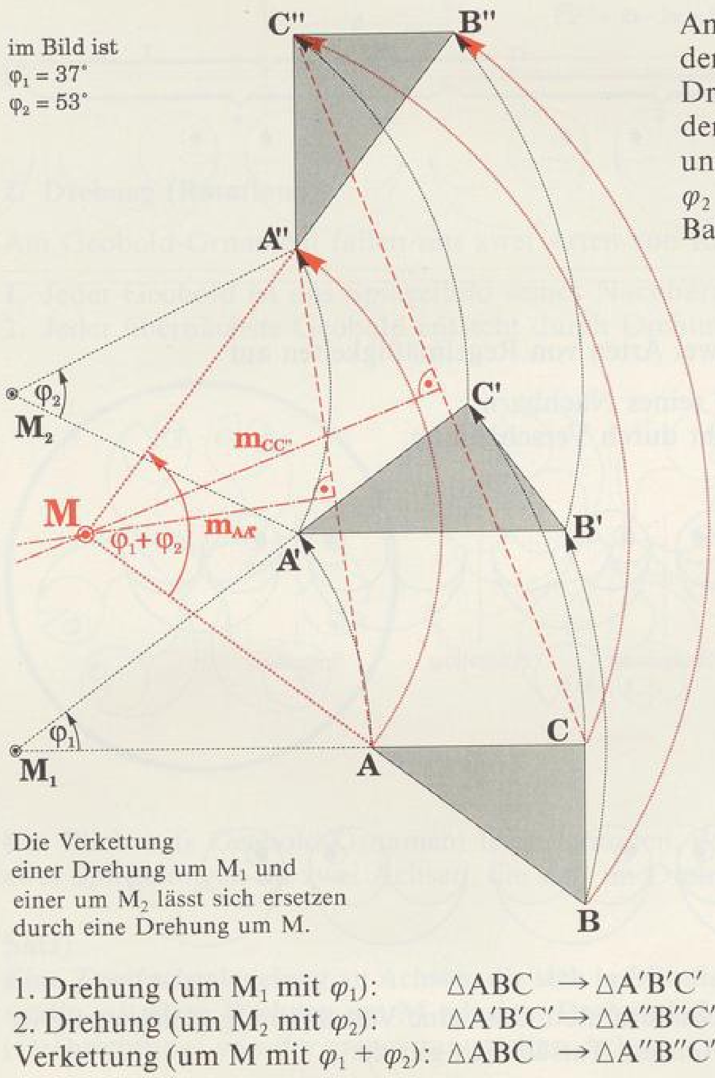
Zwei Drehungen
um verschiedene Zentren



Es gilt sogar: Die Verkettung zweier Drehungen um verschiedene Zentren M_1 und M_2 mit den Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um ein Zentrum M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$, solang $\varphi_1 + \varphi_2$ kein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist. Wenn aber $\varphi_1 + \varphi_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist, dann ergibt sich eine Verschiebung.

Zunächst überlegen wir uns an einem Bild, dass der Winkel zwischen einer beliebigen Gerade und ihrer Bildgerade gleich ist dem Drehwinkel φ, unabhängig davon, wo das Zentrum M liegt. Führt man zwei Drehungen nacheinander aus, dann dreht sich jede Gerade um $\varphi_1 + \varphi_2$.

im Bild ist
$\varphi_1 = 37°$
$\varphi_2 = 53°$



An einem Beispiel zeigen wir, wie man den Mittelpunkt M der resultierenden Drehung konstruieren kann, wenn von den beiden Drehungen die Zentren M_1 und M_2 sowie die Drehwinkel φ_1 und φ_2 bekannt sind. Verfolgen wir die Bahn eines Dreiecks:

Die Verkettung
einer Drehung um M_1 und
einer um M_2 lässt sich ersetzen
durch eine Drehung um M.

1. Drehung (um M_1 mit φ_1):	$\triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$
2. Drehung (um M_2 mit φ_2):	$\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle A''B''C''$
Verkettung (um M mit $\varphi_1 + \varphi_2$):	$\triangle ABC \rightarrow \triangle A''B''C''$

Weil Bild P″ und Urbild P gleich weit vom Zentrum entfernt sind, muss M auf jeder Mittelsenkrechten $m_{PP''}$ liegen, zum Beispiel

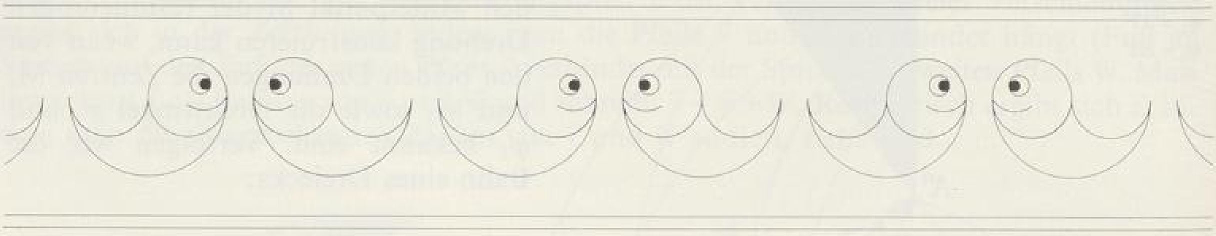
1. auf der Mittelsenkrechten $m_{AA''}$ von [AA″]
2. auf der Mittelsenkrechten $m_{CC''}$ von [CC″]

M ist also der Schnittpunkt von $m_{AA''}$ und $m_{CC''}$.
Im Fall $\varphi_1 + \varphi_2 = 360°$ (Verschiebung) sind diese Mittelsenkrechten parallel.

Mehrfachspiegelungen

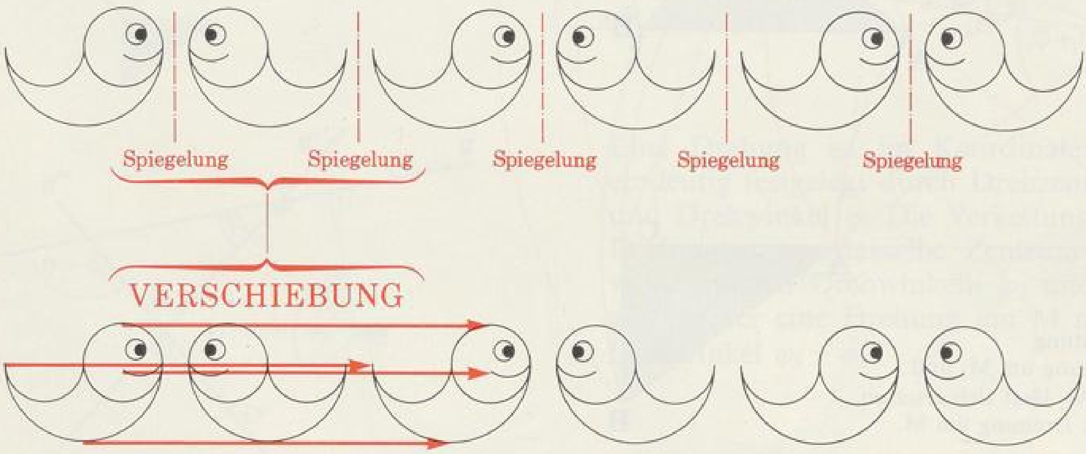
Die Verkettung zweier Verschiebungen ergibt also wieder eine Verschiebung, die Verkettung zweier Drehungen wieder eine Drehung (oder eine Verschiebung). Was aber ergibt die Verkettung zweier Achsenspiegelungen? Weil jede Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, kann die Verkettung zweier Achsenspiegelungen keine Achsenspiegelung sein. Tatsächlich ergibt sich entweder eine Verschiebung oder eine Drehung.

1. Verschiebung (Translation)



Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeiten auf:

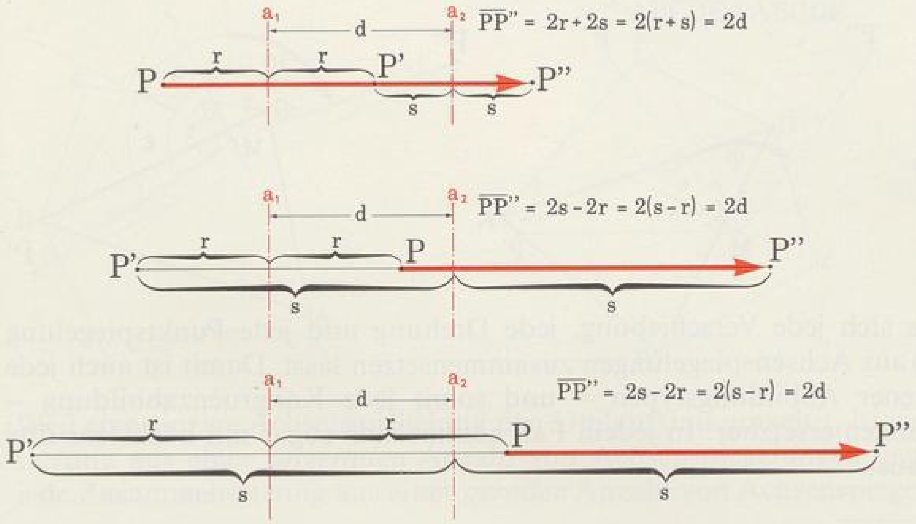
1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Verschiebung.



Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Verschiebung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an parallelen Achsen. Tatsächlich gilt der

Satz:
Eine Zweifachspiegelung an parallelen Achsen mit dem Abstand d ist gleichwertig mit einer Verschiebung um 2d senkrecht zu den Achsen.
(Verschiebungsrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

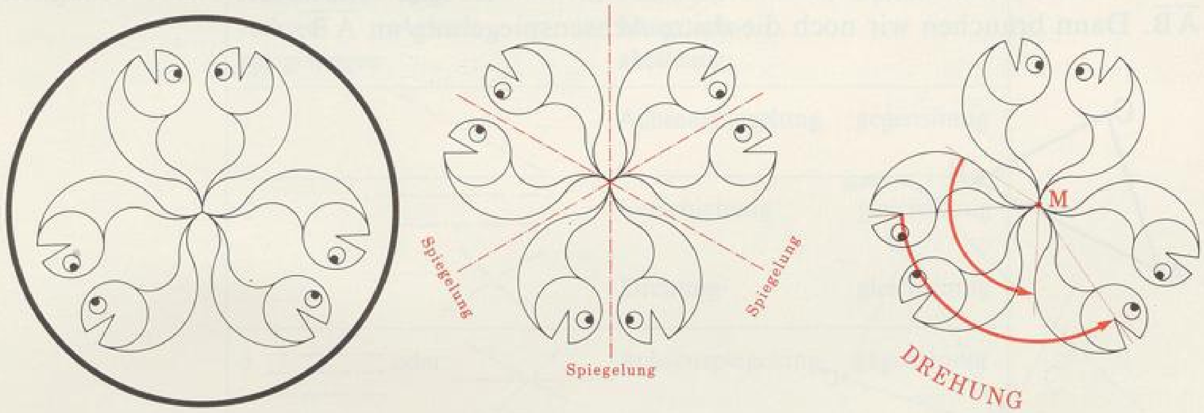
Die Begründung steht im Bild.



2. Drehung (Rotation)

Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeit auf:

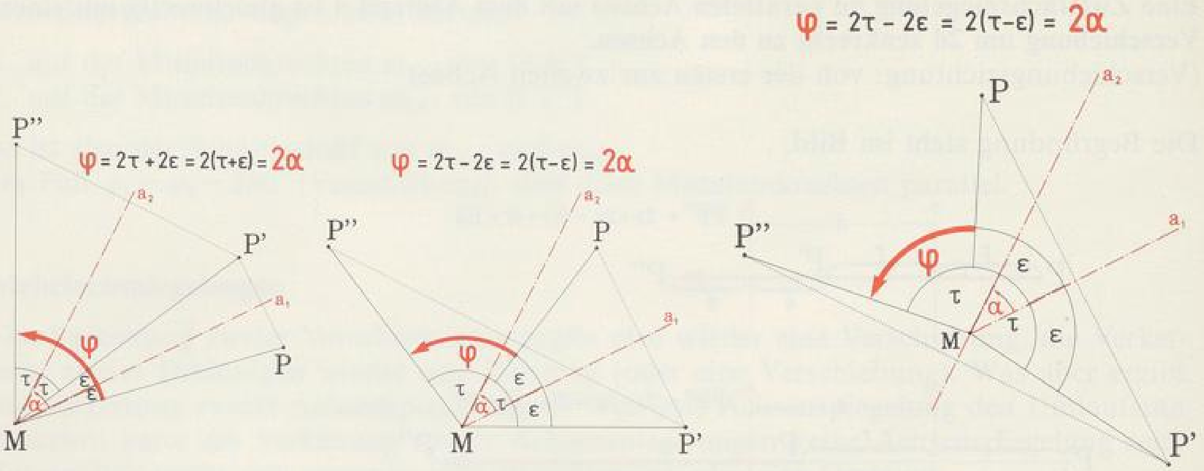
1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Drehung.



Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Drehung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an zwei Achsen, die sich im Drehpunkt schneiden. Tatsächlich gilt

Satz:
Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich in M unter dem Winkel α schneiden ist gleichwertig mit einer Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi = 2\alpha$.
(Drehrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

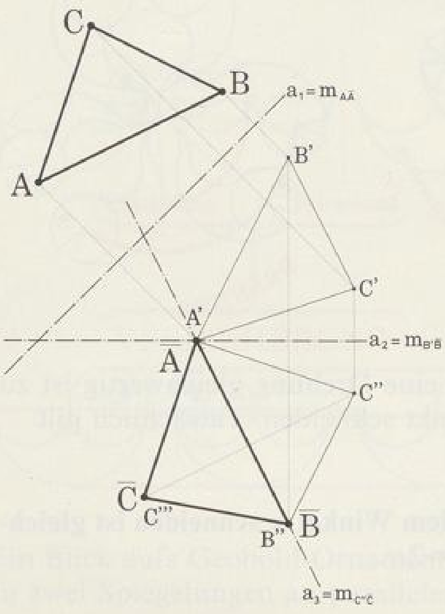
Die Begründung steht im Bild.



Wir wissen jetzt, dass sich jede Verschiebung, jede Drehung und jede Punktspiegelung (= Drehung um 180°) aus Achsenspiegelungen zusammensetzen lässt. Damit ist auch jede Verkettung verschiedener Abbildungstypen – und somit jede Kongruenzabbildung – durch Achsenspiegelungen ersetzbar. In jedem Fall kommt man sogar mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus.

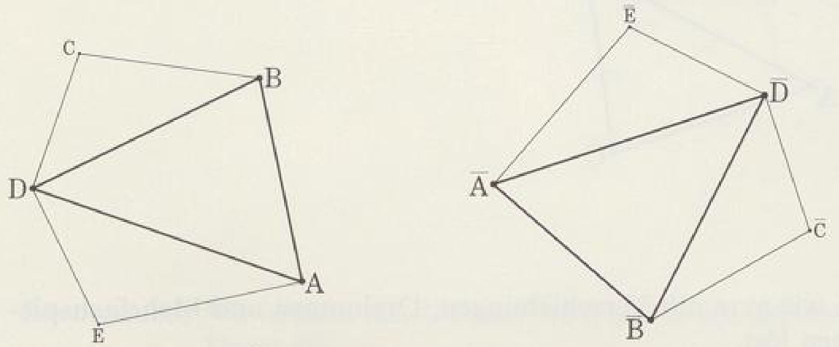
Beweis: Das Dreieck $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ist durch Kongruenzabbildung aus dem Dreieck ABC entstanden. Mit höchstens drei Achsenspiegelungen können wir das Dreieck ABC aufs Dreieck $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ abbilden.

Mit den ersten beiden bilden wir [AB] auf [$\overline{A}\overline{B}$] ab. Weil die Dreiecke kongruent sind, liegt C'' entweder schon auf $\overline{C}$ und wir sind fertig, oder C'' liegt symmetrisch zu $\overline{C}$ bezüglich $\overline{A}\overline{B}$. Dann brauchen wir noch die dritte Achsenspiegelung an $\overline{A}\overline{B}$.



Bei zwei kongruenten Vielecken mit mehr als drei Ecken kommt man auch mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus: Zuerst bildet man wie vorhin ein Teildreieck ab, die restlichen Punkte müssen dann wegen der Kongruenz der Figuren automatisch richtig liegen. Man teilt die Kongruenzabbildungen in zwei Sorten ein: Bei der einen Sorte ist der Umlaufsinn im Bild und Urbild der gleiche, bei der anderen entgegengesetzt. Deshalb nennt man dann die Kongruenzabbildung **gleichsinnig** oder **gegensinnig.**

$ABCDE \cong \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$

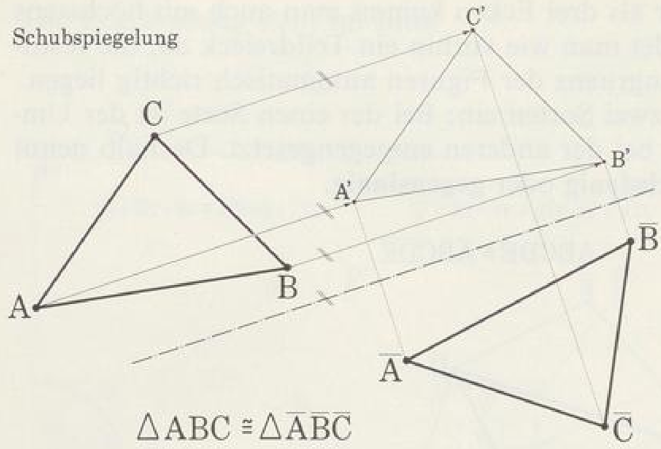


Weil eine einzige Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, ist sie und jede Zusammensetzung aus einer *ungeraden* Anzahl von Achsenspiegelungen gegensinnig. Dagegen ist jede Zusammensetzung aus einer *geraden* Anzahl von Achsenspiegelungen gleichsinnig.

Wir haben gesehen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch höchstens drei Achsenspiegelungen darstellen lässt. Damit verschaffen wir uns eine Übersicht über alle Kongruenzabbildungen:

Anzahl der Achsen-spiegelungen	**Lage der Achsen:**	**Name der Kongruenz-abbildung:**	**Sorte:**
1		Achsenspiegelung	gegensinnig
2		Verschiebung	gleichsinnig
		Drehung	gleichsinnig
3	oder	Achsenspiegelung	gegensinnig
	oder	Schubspiegelung	gegensinnig

Der einzig neue Typ, die Schubspiegelung, besteht aus einer geradlinigen Verschiebung von Punkten (Translation) und einer Spiegelung, bei der die Achse parallel zur Verschiebungsrichtung ist.



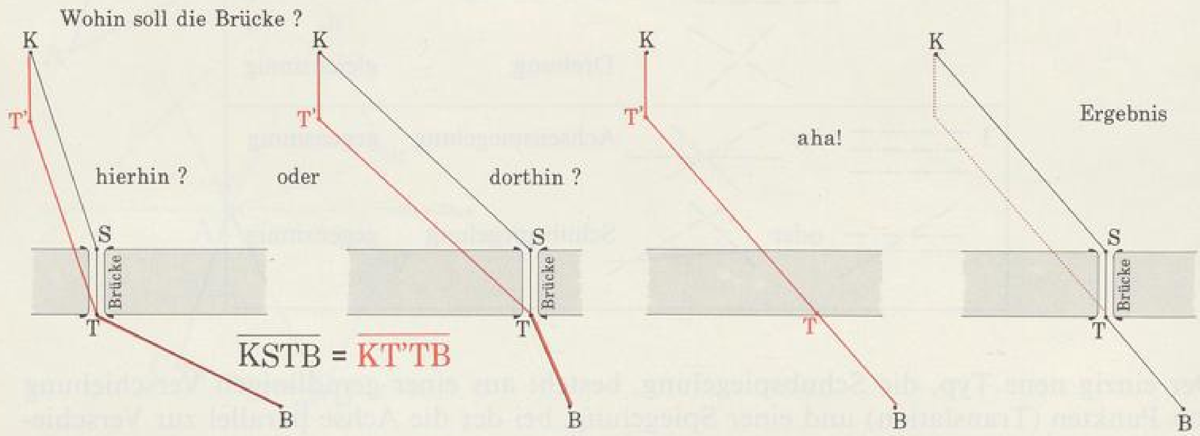
3. Anwendungen

In vier Beispielen sehen wir, wie man mit Verschiebungen, Drehungen und Mehrfachspiegelungen schwierige Aufgaben löst.

Brückenaufgabe (Translation):

Krachkirchen und Bröselbrunn sind durch einen Fluss getrennt. Eine Brücke soll senkrecht so über den Fluss gebaut werden, dass der Weg über die Brücke von Krachkirchen nach Bröselbrunn möglichst kurz wird.

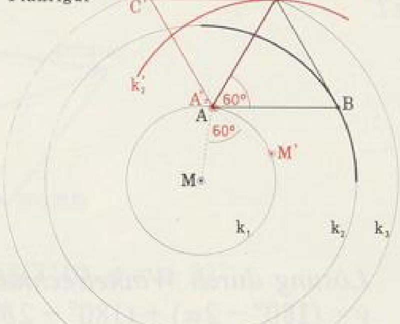
Lösungsidee: Wir verschieben die Brücke [ST] so, dass $S' = K$ wird. Weil Strecken auf gleich lange parallele Strecken abgebildet werden, ist $\overline{KT'} = \overline{ST}$ und $[KT'] \parallel [ST]$. T′ ist also für alle möglichen Brücken [ST] derselbe Punkt. Weil $\overline{T'T} = \overline{KS}$ ist, sind der rote und der schwarze Weg gleich lang. $\overline{T'TB}$ ist am kürzesten, wenn T′, T und B auf einer Gerade liegen. Der gesuchte Punkt T ist also der Schnittpunkt von [TB] und dem Flussufer. Jetzt schieben wir die Brücke wieder zurück zum Punkt T und haben damit den kürzesten Weg konstruiert.



Drei Ecken auf drei Kreisen (Rotation)

Gegeben sind drei Kreise k_1, k_2 und k_3 mit demselben Mittelpunkt M und ein Punkt A auf k_1. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf k_2 und C auf k_3.

Planfigur



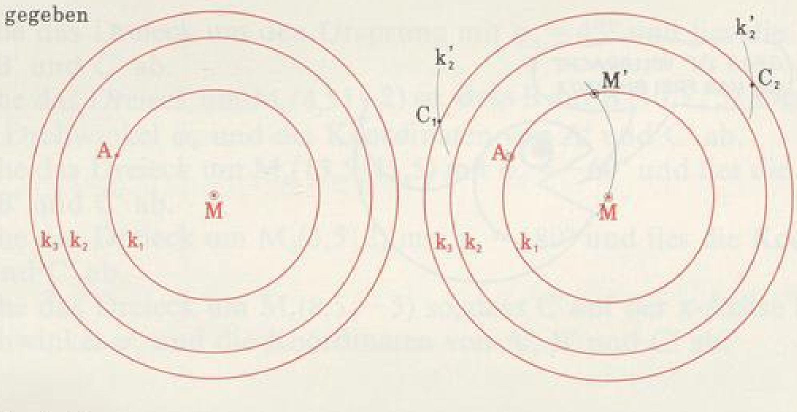
Lösungsidee: Wir drehen das Dreieck ABC um A mit dem Winkel 60° so, dass B' = C ist. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{r}\text{C liegt auf } k_3\\ B' = C \text{ liegt auf } k_2'\end{array}\right\} \begin{array}{l} k_2' \text{ und } k_3 \text{ schneiden}\\ \text{sich in C.}\end{array}$$

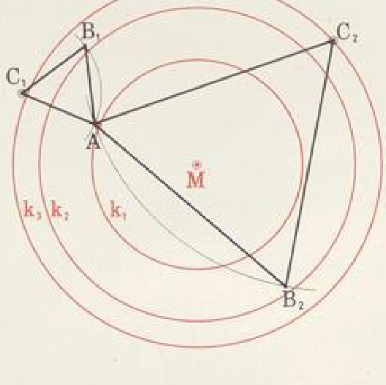
[AC] ergänzt man zum gleichseitigen Dreieck ABC.

Je nach Größe der Radien schneidet $k_{2'}$ den Kreis k_3 zweimal, einmal oder gar nicht, das heißt, es gibt zwei Lösungsdreiecke, nur ein Lösungsdreieck oder gar keines.

gegeben

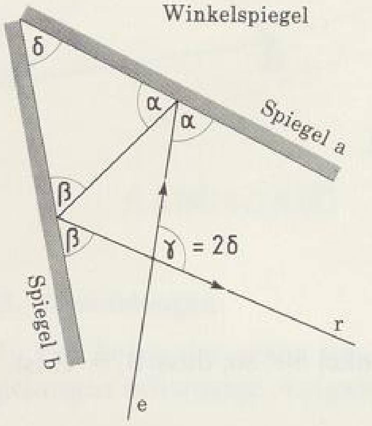


Ergebnis



Winkelspiegel (Mehrfachspiegelung):

Zwei Spiegel, die den Winkel δ einschließen, nennt man einen Winkelspiegel. Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel α auf den Spiegel und verlässt den Winkelspiegel nach zweimaliger Reflexion. Wie groß ist der Winkel γ zwischen dem einfallenden Strahl e und dem reflektierten Strahl r?



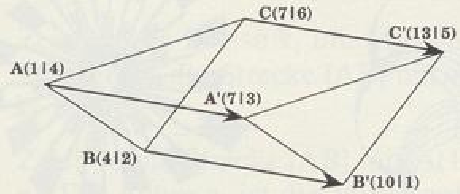
Lösung durch Winkelrechnung:

$$\gamma = (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) \quad \text{(Außenwinkel am Dreieck)}$$
$$= 360° - 2\alpha - 2\beta$$
$$= 2\underbrace{(180° - \alpha - \beta)}_{\delta}$$
$$\gamma = 2\delta$$

Unabhängig von α dreht sich also der Lichtstrahl um den doppelten Winkelspiegelwinkel. Das kann man auch ohne Rechnung sofort einsehen: Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich unter dem Winkel δ schneiden, ist gleichwertig mit einer Drehung um $\gamma = 2\delta$, γ ist auch der Winkel zwischen Gerade (e) und Bildgerade (r).

Aufgaben zu 7.3

1. $A(1|4)$, $B(4|2)$, $C(7|6)$, $A'(7|3)$
Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht durch Verschiebung des Dreiecks ABC. Konstruiere B' und C' und gib die Koordinaten an.



10
0 0 10
1

2. $A(1|4)$, $B(5|4)$, $C(1|7)$, $M(7|0)$, $\varphi = -53°$

Das Dreieck $A'B'C'$ entsteht durch Drehung des Dreiecks ABC um M mit dem Drehwinkel φ. Konstruiere A', B' und C' und gib die Koordinaten an.

15
0 0 17
0

3. $A(0{,}5|3{,}5)$, $B(8|3{,}5)$, $A'(0|14)$, $B'(6|9{,}5)$

$[A'B']$ ist das Bild von $[AB]$ bei einer Drehung um M mit dem Drehwinkel φ. Konstruiere M und seine Koordinaten sowie den Drehwinkel φ.

14
3 0 15
5

4. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(8{,}5|0)$, $B(13{,}5|0)$ und $C(13{,}5|3{,}5)$. $A'B'C'$ sei das gedrehte Dreieck.

   a) Drehe das Dreieck um den Ursprung mit $\varphi_a = 45°$ und lies die Koordinaten von A', B' und C' ab.

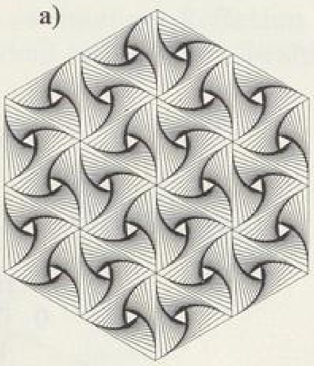
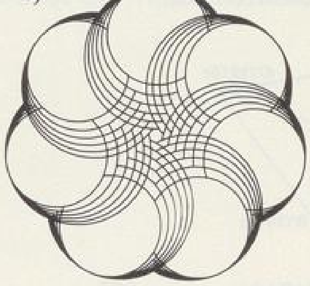
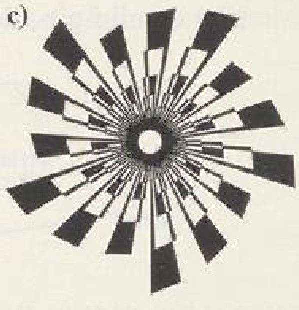
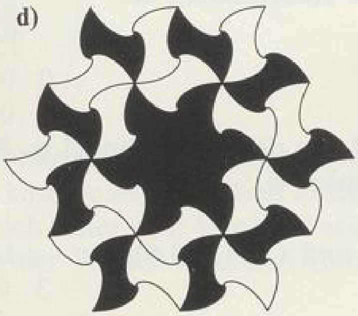
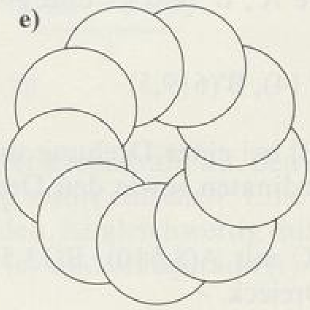
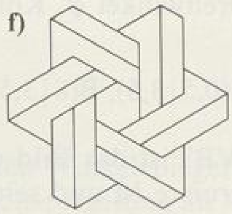
   b) Drehe das Dreieck um $M_b(4{,}5|-2)$ so, dass B auf $B'(10{,}5|5)$ abgebildet wird. Lies den Drehwinkel φ_b und die Koordinaten von A' und C' ab.

   c) Drehe das Dreieck um $M_c(13{,}5|11{,}5)$ mit $\varphi_c = -60°$ und lies die Koordinaten von A', B' und C' ab.

   d) Drehe das Dreieck um $M_d(5{,}5|2)$ mit $\varphi_d = 180°$ und lies die Koordinaten von A', B' und C' ab.

   e) Drehe das Dreieck um $M_e(8{,}5|-5)$ so, dass C' auf der x-Achse liegt und lies den Drehwinkel φ_e und die Koordinaten von A', B' und C' ab.

5. Die sechs Figuren sind alle drehsymmetrisch.
Gib den kleinsten Drehwinkel φ an, bei dem die Figur mit sich zusammenfällt.

a)

b)

c)

d)

e)

f)


6. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(4 | 3) und C(5 | 2).

a) Verschiebe das Dreieck so, dass A auf A′(7 | 4) abgebildet wird. Gib den Verschiebungspfeil $\vec{v}$ sowie die Koordinaten von B′ und C′ an.

b) Verschiebe das Dreieck mit $\vec{w} = \binom{2}{2}$ und gib die Koordinaten von A′, B′ und C′ an.

c) Verschiebe das Dreieck mit $\vec{r} = \binom{3}{1}$ zu A′B′C′ und verschiebe A′B′C′ mit $\vec{s} = \binom{-2}{2}$ zu A″B″C″. Gib die Koordinaten von A″, B″ und C″ und den Pfeil $\vec{k}$ der Verkettung der beiden Verschiebungen an.

:7. Die Drehung um $M_1(6|0)$ mit φ_1 bildet $M_2(6|10)$ auf $M_2'(0|8)$ ab; die Drehung um M_2 mit φ_2 bildet M_2' auf $M_2''(4|4)$ und $M_1' = M$ auf $M_1''(14|4)$ ab. Miss φ_1 und φ_2 und konstruiere das Zentrum M der Verkettung der beiden Drehungen. 11 0 0 15 0

8. Zeichne das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(5 | 0) und C(4 | 2).

a) Spiegle das Dreieck an $a_1 = h_c$ und das Bild an $a_2 = m_c$.

b) Wie lang ist der Verschiebungspfeil der durch die Zweifachspiegelung festgelegten Translation?

c) Das Dreieck A*B*C* entsteht aus dem Dreieck ABC durch Doppelspiegelung an $a_1 = m_c$ und $a_2 = h_c$.
Konstruiere A*B*C*, ohne zu spiegeln.

9. Gegeben sind die Punkte S(8 | 5), T(10 | 3), U(12 | 7), A(0 | 3) und B(3 | 6). Verschiebe die Strecke [AB] so, dass A′ und B′ auf den Geraden SU bzw. ST liegen.

10. Zeichne den Kreis k um M(7 | 3) mit r = 2. A(7 | 5) und B(5 | 8) bestimmen die Strecke [AB]. Auf welcher Kurve läuft B, wenn [AB] so verschoben wird, dass A immer auf k liegt?

⁝11. Zeichne die Kreise k_1 um $M_1(7 | 3)$ mit $r_1 = 2$ und k_2 um $M_2(3 | 9)$ mit $r_2 = 3$. Verschiebe die Strecke [AB] mit A(0 | 2) und B(−2 | 5) so, dass A′ auf k_1 und B′ auf k_2 liegt.

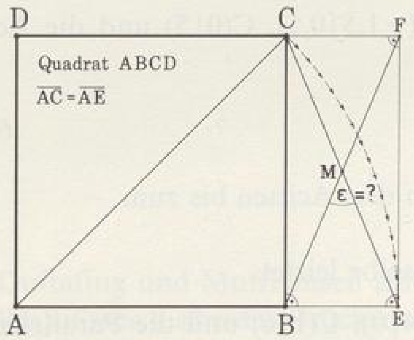
12. Zeichne die Strecke [AB] mit A(1 | 1) und B(6 | 2).

a) Die Achse a_1 ist die Mittelsenkrechte von [AB], die Achse a_2 ist diejenige Winkelhalbierende von [AB] und a_1, die die y-Achse unterhalb der x-Achse (bei einem negativen y-Wert) schneidet.
Konstruiere das Bild der Strecke [AB] bei der Doppelspiegelung an a_1 und a_2.
Wo liegt der Drehpunkt, wie groß ist der Drehwinkel?

b) Löse **a)**, wenn a_1 die Gerade AB und a_2 die x-Achse ist.

13. Gegeben sind die Punkte A(2 | 1) und A′(6 | 5) sowie die Achse a_1, die in S(3 | 0) senkrecht auf der x-Achse steht.
Konstruiere a_2 so, dass die Doppelspiegelung an a_1 und a_2 A auf A′ abbildet.
Wo liegt der Drehpunkt, wie groß ist der Drehwinkel?

•14. Eine Drehung um M bildet A auf D ab. Auf welche Geraden werden dabei AC und EC abgebildet? Wie groß ist der Drehwinkel? Wie groß ist ε?



•15. k ist ein Kreis um M mit r = 4. Zeichne einen Punkt P mit $\overline{MP} = 2{,}5$.
Konstruiere eine Sehne der Länge 7, die durch P geht.
(Tipp: Zeichne zuerst in den Kreis eine beliebige Sehne der Länge 7 und drehe dann.)

⁝16. Zeichne R(2 | 1), S(3 | 6), T(6 | −1,5) und C(4 | 1). Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC, dessen Ecken A und B auf SR bzw. ST liegen.
(Tipp: Drehe das Lösungsdreieck um C so, dass A′ = B ist).

•17. Zeichne das Dreieck ABC mit A(4 | 5), B(10 | 5) und C(5,5 | 9,5). Konstruiere über jeder Seite nach außen ein gleichseitiges Dreieck, das sind die Dreiecke BSC, CTA und AUB.
Begründe: Die Strecken [AS], [BT] und [CU] sind gleich lang. Unter welchem Winkel schneiden sich AS und BT?
(Tipp: Drehe um C, sodass B′ = S ist.)

18. Zeichne die Strecken [AB] und [$\overline{A}\,\overline{B}$] mit A(12 | −1,5), B(4,5 | −3), $\overline{A}$ 12
(6 | 10,5), $\overline{B}$(4,5 | 3). 0 0 13
Konstruiere zwei Spiegelachsen so, dass [AB] in [$\overline{A}\,\overline{B}$] übergeht. 5

19. Zeichne die Dreiecke ABC und $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ mit A(−6 | 0), B(9 | 5), C(−3 | 11) 12
und $\overline{A}$(9 | 0), $\overline{B}$(−6 | 5), $\overline{C}$(0 | −7). 7 0 10
8
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass $\triangle$ABC in $\triangle\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ übergeht.

20. Zeichne die Dreiecke ABC und $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ mit A(12,5 | 10), B(2 | 13,5), 22
C(7,5 | 20) und 0 0 19
$\overline{A}$(7,5 | 0), $\overline{B}$(18 | 4,5), $\overline{C}$(12,5 | 10). 0
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass $\triangle$ABC in $\triangle\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ übergeht.

21. Zeichne die Fünfecke ABCDE und $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ mit A(3 | 9), B(12 | 11), 22
C(7 | 16), D(7 | 21), E(1 | 18) und $\overline{A}$(6 | 12), $\overline{B}$(0 | 5), 0 0 15
$\overline{C}$(7 | 4), $\overline{D}$(10 | 0), $\overline{E}$(13 | 6). 0
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass ein Fünfeck ins andere übergeht.

22. Zeichne zwei Dreiecke ABC und $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ so, daß
a) $\triangle ABC \cong \triangle\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (gleichsinnig)
b) $\triangle ABC \cong \triangle\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (gegensinnig) ist.
Konstruiere die Spiegelachsen so, dass ein Dreieck ins andere übergeht.

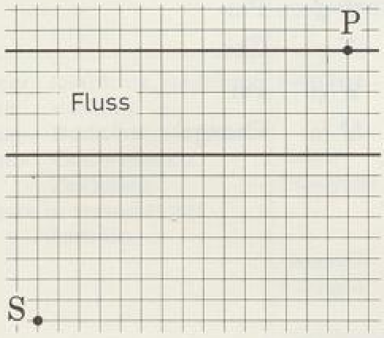
23. Zeichne das Dreieck ABC mit A(−4,5 | 1,5), B(−1,5 | 0,5), C(0 | 5) und die Achsen durch den Ursprung O:
a_1 = OP mit P(1 | −1) 6
a_2 = OQ mit Q(1 | 2) 6 0 6
a_3 = OR mit R(2 | 0) 5
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.
Konstruiere eine einzige Spiegelachse a, die dasselbe leistet.

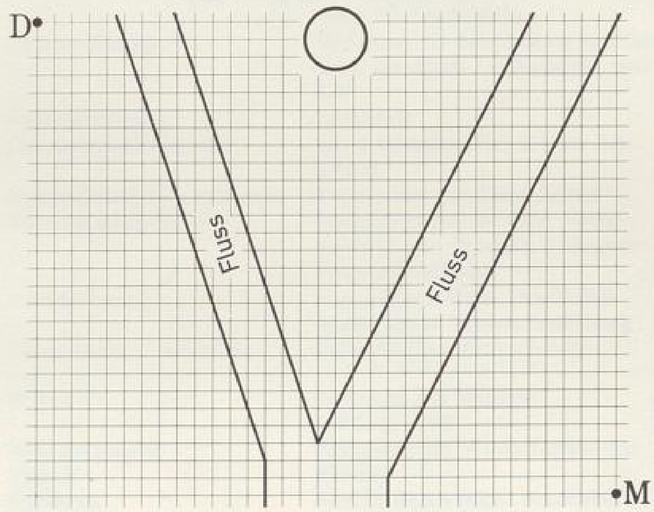
24. Zeichne das Dreieck ABC mit A(−1,5 | 3,5), B(4 | 0), C(1 | 6) und die Parallelen zur y-Achse:
a_1 durch (0 | 0) 7
a_2 durch (3 | 0) 2 0 13
a_3 durch (8 | 0) 1
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.
Konstruiere eine einzige Spiegelachse a, die dasselbe leistet.

:25. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 6), B(4,5 | 11,5), C(4,5 | 6,5) und die Achsen:
a_1 = UV mit U(5,5 | 4,5) und V(7 | 1,5) 13
a_2 = WU mit W(1 | 0) 0 0 15
a_3 = XV mit X(5,5 | 0) 4
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.
Gib eine Schubspiegelung an, die dasselbe leistet.

⁝26. Zeichne das Dreieck ABC mit A(3 | 6,5), B(0,5 | 4), C(5 | 5) und die Achsen:
a_1 = UC mit U(7,5 | 0)   9
a_2 = OC mit O(0 | 0)   0 0 10
a_3 = OU   9
Spiegle das Dreieck ABC der Reihe nach an den drei Achsen bis zum Endbild $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.
Gib eine Schubspiegelung an, die dasselbe leistet.

27. Plumsbüttel liegt am Ufer eines Flusses. Wo muss senkrecht über den Fluss eine Brücke gebaut werden, damit der Weg von Plumsbüttel nach Schnödsted möglichst kurz wird?
Miss den kürzesten Weg.





⁝28. Duftafing und Muffhausen sind durch zwei Flüsse getrennt.
Wo müssen die beiden Brücken senkrecht zum Flussufer gebaut werden, damit der Weg zwischen beiden Ortschaften möglichst kurz wird?

•29. Zeichne drei Parallelen a, b und c; b liegt zwischen a und c so, dass der Abstand von b und a 2 und der Abstand von b und c 3 ist. Wähle auf a einen beliebigen Punkt A und konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf b und C auf c.

⁝30. Zeichne die Punkte X(3 | 0), Y(13 | 2) und Z(5 | 9). A ist der Mittelpunkt von [XY]. Beschreibe dem Dreieck XYZ ein gleichseitiges Dreieck ABC ein.

⁝31. Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(3|3)$ mit $r_1 = 3$, den Kreis k_2 um $M_2(7|3)$ mit $r_2 = 2{,}5$ und den Kreis k_3 um $M_3(4|8)$ mit $r_3 = 4$. Punkt A(3 | 6) liegt auf k_1.
Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf k_2 und C auf k_3. (Zwei Lösungen!)

⁝32. Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(10|8)$ mit $r_1 = 3$, den Kreis k_2 um $M_2(8{,}5|2)$ mit $r_2 = 2{,}5$ und den Kreis k_3 um $M_3(5|6)$ mit $r_3 = 2$. Punkt A(6 | 2) liegt auf k_2.
Konstruiere ein Quadrat ABCD mit B auf k_1 und D auf k_3.