Anschauliche Geometrie

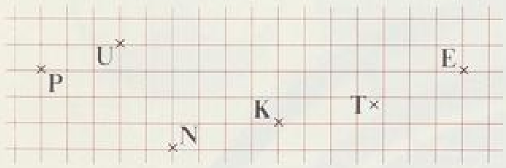
Barth, Friedrich

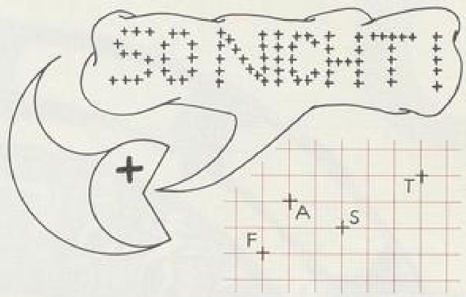
München, 2001

2.1 Punkt, Strecke, Gerade und Kreis

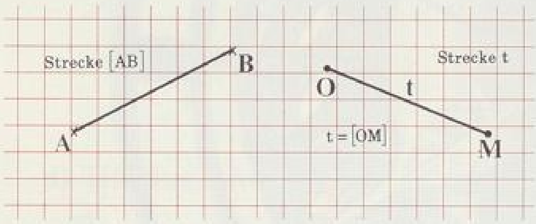
2.1 Punkt, Strecke, Gerade und Kreis

Jede Figur besteht aus Punkten, deswegen bezeichnet man sie manchmal auch als Punktmenge. Einzelne Punkte zeichnen wir als kleine Kreuze (×) oder als kleine Knödel (•). Als ihre Namen nehmen wir große lateinische Buchstaben, siehe Bild.

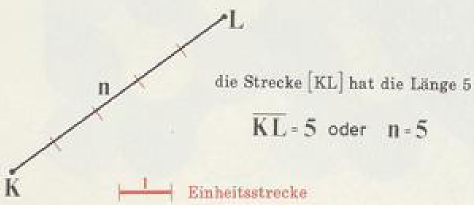




Die kürzeste Verbindung zweier Punkte nennt man **Strecke.** Heißen die beiden Punkte A und B, so bezeichnet man die Strecke mit [AB] oder auch kurz mit einem kleinen lateinischen Buchstaben. Die Strecke [AB] ist eine Menge unendlich vieler Punkte.

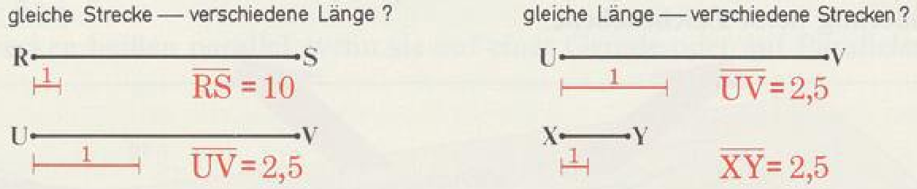


Dagegen ist die **Länge** der Strecke [AB] eine Zahl. Man bezeichnet sie mit $\overline{AB}$ oder auch mit kleinen lateinischen Buchstaben. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor: in »c = [AB]« bedeutet c eine Strecke, in »c = 7« bedeutet c eine Länge. Eine Strecke hat die Länge n, wenn sie n-mal so lang ist wie die Einheitsstrecke.

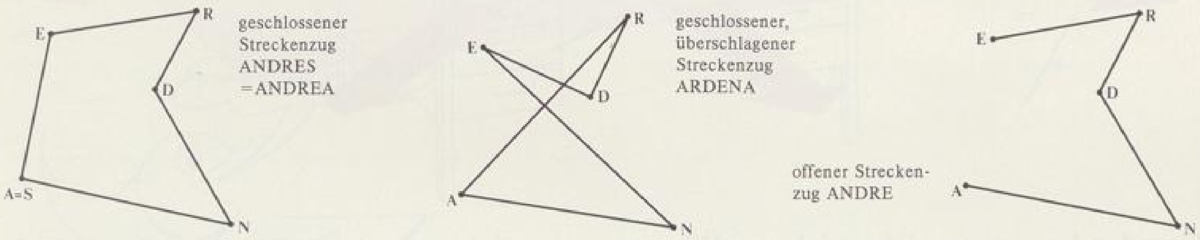


Beachte: In der Geometrie ist die Länge einer Strecke eine Zahl **ohne** Benennung. In der Wirklichkeit ist die Länge einer Strecke dagegen eine Zahl **mit** Benennung, zum Beispiel 5 cm.

Bei jeder Zeichnung muss die Einheitsstrecke genannt sein. Um Zeichnungen zu vergleichen, geben wir die Einheitsstrecke oft in Zentimetern an (Maßstab); so bedeutet zum Beispiel 1 ≙ 2 cm, dass die Einheitsstrecke 2 cm misst. Gewöhnlich ist im Heft 1 ≙ 1 cm und an der Tafel 1 ≙ 10 cm. Aus Bequemlichkeit lassen wir dann diesen Maßstab weg.

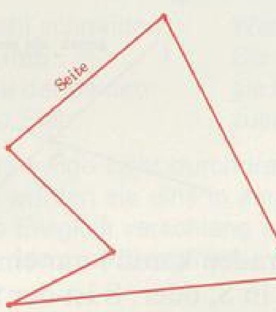


Aneinander stoßende Strecken, wie zum Beispiel [AN], [ND], [DR], [RE] und [ES], bilden den **Streckenzug** ANDRES. Der Streckenzug heißt **geschlossen,** wenn Anfangspunkt A und Endpunkt S zusammenfallen; sonst heißt er **offen.**

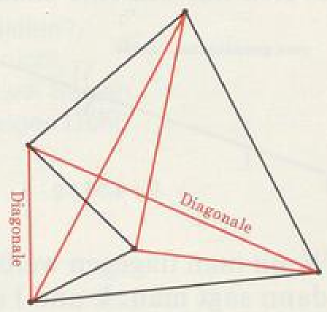


Geschlossene, nicht überschlagene Streckenzüge heißen **Vielecke** oder **Polygone;** wir nennen sie nach der Anzahl n ihrer Ecken **n-Ecke.** Da also n-Ecke immer geschlossen sind, wird jeder Eckpunkt nur einmal genannt. Wir durchlaufen die Eckpunkte der Reihe nach so, dass das Innere des Vielecks immer links liegt, z. B. von R über I nach A.

Die Strecken des geschlossenen Streckenzugs heißen **Seiten.** Jede Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, die keine Seite ist, nennt man **Diagonale** des Vielecks.

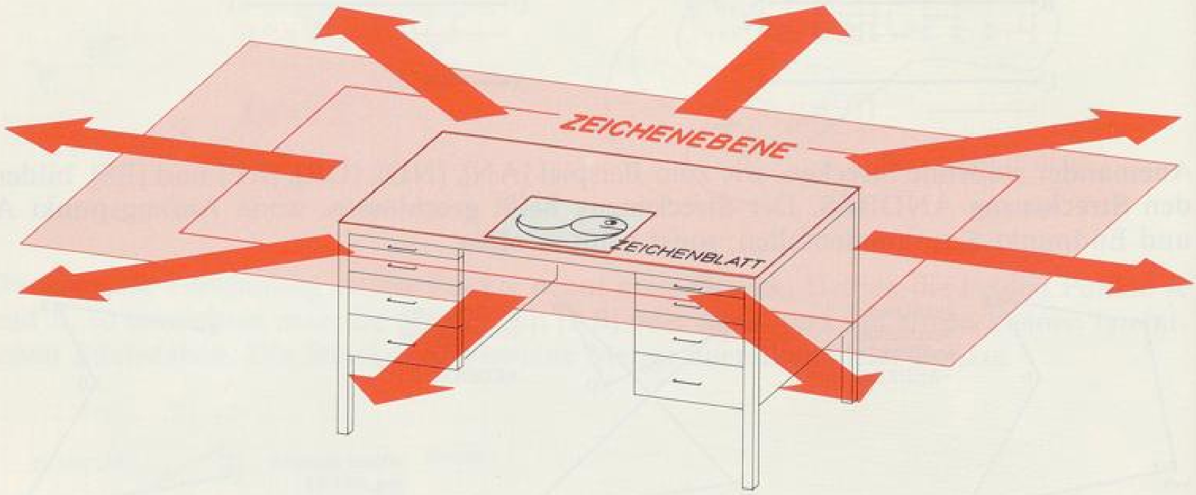


Seiten eines Fünfecks



Diagonalen eines Fünfecks

Mit dem Lineal lässt sich jede Strecke so verlängern, dass wieder eine Strecke entsteht. Denken wir uns diesen Vorgang nach beiden Seiten unbegrenzt ausgeführt, so entsteht eine **Gerade**. Geraden gibt es nur in unserer Vorstellung, nicht aber auf dem Zeichenblatt, auf dem wir ja nur über eine begrenzte Zeichenfläche verfügen. Um Geometrie zu treiben, um zum Beispiel Geraden unterzubringen, brauchen wir eine unbegrenzte Zeichenfläche. Wir denken sie uns so entstanden, dass die Zeichenblattfläche beliebig vergrößert ist; diese Vergrößerung heißt **Zeichenebene**.

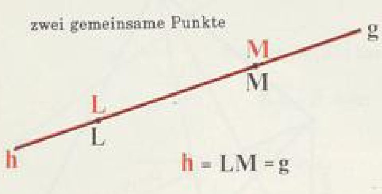


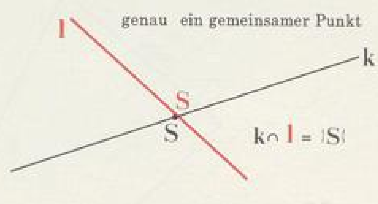
Geraden kann man nicht zeichnen. Wir veranschaulichen sie durch Strecken, deren Endpunkte nicht gekennzeichnet sind. Geraden bezeichnet man auch mit kleinen lateinischen Buchstaben.

Wählt man auf einer Gerade zwei beliebige Punkte P und Q, dann liegt die Strecke [PQ] auf der Gerade. Andererseits geht durch zwei Punkte P und Q immer eine Gerade, aber auch nur eine. Dazu sagt der Mathematiker:

Zwei (verschiedene) Punkte legen genau eine Gerade fest.

Deshalb genügt es, eine Gerade durch zwei ihrer Punkte zu kennzeichnen. Wenn man also weiß, dass zwei Geraden g und h zwei (oder mehr) Punkte gemeinsam haben, dann kann es sich nur um eine einzige Gerade handeln: g = h.



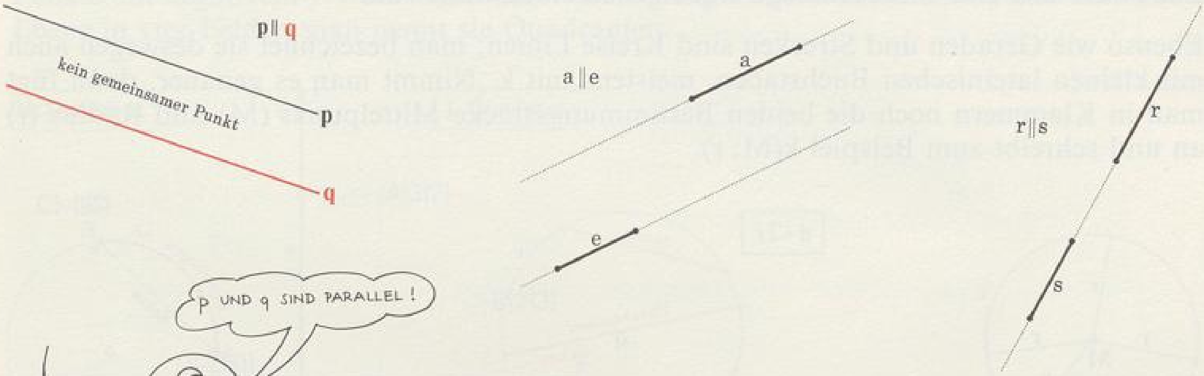


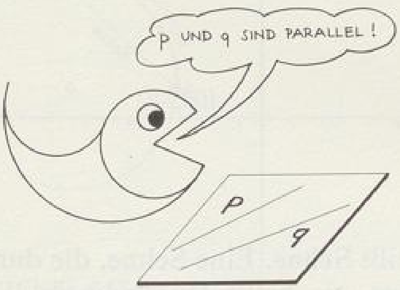
Wenn man dagegen weiß, dass zwei Geraden k und l nur einen Punkt S gemeinsam haben, dann sagt man: k und l schneiden sich in S, oder: S ist der Schnittpunkt von k und l. Dafür schreibt man auch: $k \cap l = \{S\}$.

In der Mathematik brauchen wir für bestimmte Sachverhalte eigene Fachwörter. Eine **Definition** erklärt die Bedeutung dieser Fachwörter.

Definition:

Haben zwei Geraden p und q keinen Punkt gemeinsam, dann sagt man: p und q sind **parallel:** $p \parallel q$. Zwei Strecken heißen parallel, wenn sie auf einer Gerade oder auf Parallelen liegen.





Unser Geobold meint, dass sich zwei Geraden nur dann schneiden, wenn er den Schnittpunkt auf dem Zeichenblatt noch sieht. Um zu klären, ob sich p und q schneiden, könnte er weitere Zeichenblätter anstückeln und darauf die gezeichneten Strecken verlängern. Schneiden sich die Verlängerungen, dann irrt Geobold. Dieses Verfahren ist recht umständlich und lässt sich meistens nicht handhaben. Die Geometrie weiß einen Ausweg, wir werden ihn im nächsten Abschnitt zeigen.

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da ward's dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten's selber nicht, –
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

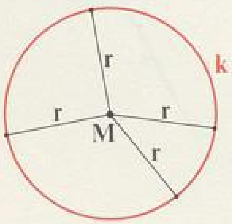
Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

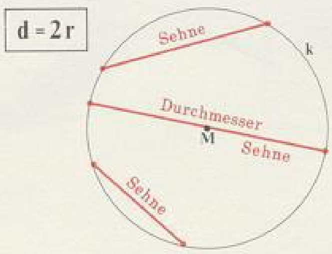
Christian Morgenstern (1871 bis 1914)

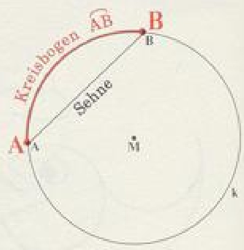
Wenn wir einen Zirkel fest eingestellt lassen, dann bestimmen Spitze und Mine eine Streckenlänge r. Mit einem solchen Zirkel ist es dann möglich, jede Strecke dieser Länge auf dem Zeichenblatt festzulegen. Deshalb nennen wir den Zirkel auch Streckenträger. Halten wir nun den einen Endpunkt fest, indem wir die Spitze im Punkt M einstechen, dann trägt die Mine die Strecke um die Spitze herum, sie zieht einen Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r. Dazu sagt man auch: »Die Spitze beschreibt einen Kreis um M mit Radius r.« Die mechanische Erzeugung der Kreislinie zeigt: Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Mittelpunkt M) gleiche Entfernung (Radius r) haben.

Ein Punkt und eine Streckenlänge legen genau einen Kreis fest.

Ebenso wie Geraden und Strecken sind Kreise Linien; man bezeichnet sie deswegen auch mit kleinen lateinischen Buchstaben, meistens mit k. Nimmt man es genauer, dann fügt man in Klammern noch die beiden Bestimmungsstücke Mittelpunkt (M) und Radius (r) an und schreibt zum Beispiel k(M; r).



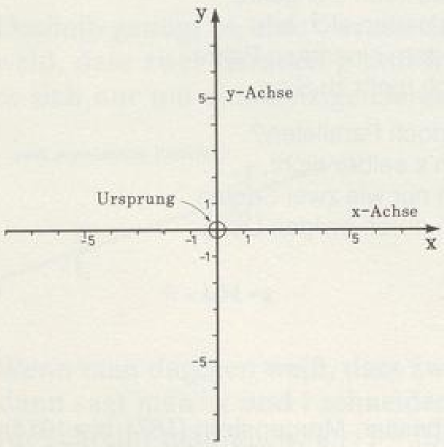




Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, heißt **Sehne.** Eine Sehne, die durch den Kreismittelpunkt geht, hat die größtmögliche Länge, sie heißt **Durchmesser.** Der Durchmesser d ist doppelt so lang wie der Radius r.
Eine Sehne zerschneidet den Kreis in zwei Kreisbögen. Einen Kreisbogen über der Sehne [AB] bezeichnen wir mit $\overset{\frown}{AB}$. Gewöhnlich meinen wir damit den kleineren der beiden Kreisbögen.

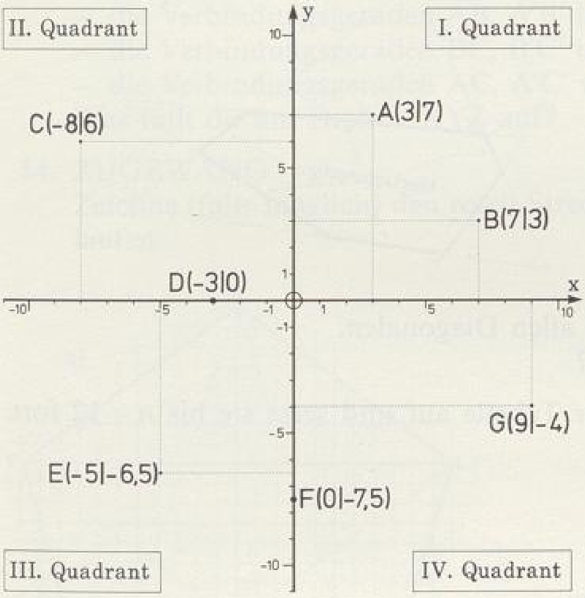
Koordinatensystem

Seit René Descartes (1596 bis 1650) beschreibt man die Lage von Punkten in der Zeichenebene mit zwei Zahlen, den »kartesischen Koordinaten«. Dazu zeichnet man zwei zu-



Kartesisches Koordinatensystem

einander senkrechte Zahlengeraden (Koordinatenachsen) mit gemeinsamem Nullpunkt (Ursprung); eine heißt x-Achse, die andere heißt y-Achse. Von einem Punkt der Zeichenebene fällt man die Lote auf die beiden Koordinatenachsen. Die Zahlen auf den Achsen, auf die die Lote treffen, heißen Koordinaten des Punkts. A(3 | 7) bedeutet: Der Punkt A hat die x-Koordinate 3, kurz den x-Wert 3, und die y-Koordinate 7, kurz den y-Wert 7.
Im Unterschied zum Koordinatensystem, das du in der 5. Klasse kennen gelernt hast, verlängern wir die Achsen über den Ursprung hinaus. Die Zahlen, die auf diesen Verlängerungen sitzen, unterscheidet man mit einem Minuszeichen von den bisherigen Zahlen. Sie heißen negative Zahlen. Punkte mit negativem x-Wert liegen links von der y-Achse, Punkte mit negativem y-Wert liegen unter der x-Achse. Das Koordinatensystem zerlegt die Ebene in vier Felder, man nennt sie Quadranten.



Falls nötig, kennzeichnen wir den Platzbedarf für ein Koordinatensystem symbolisch mit einem Zahlenkreuz.

3
Steht zum Beispiel da 7 0 5, dann muss das Koordinatensystem sein wie im Bild.
2