Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

4 Gleichungen mit Parametern

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

4 Gleichungen mit Parametern

Menora – der siebenarmige Leuchter

Die Menora ähnelt einem Baum. Ihre genaue Beschreibung im Alten Testament (2. Mose 25, 31–40) bedient sich vieler pflanzlicher Symbole. Nach der Eroberung Jerusalems 70 n. Chr. durch TITUS wurde sie als eines der bedeutenden Kultsymbole des Tempels nach Rom gebracht, wie das Relief auf dem Titusbogen zeigt. Die dort dargestellte Menora ist heute Bestandteil des Wappens des Staates Israel.
Titelseite einer hebräischen Bibel aus Nordspanien, Ende 13. Jh. Am Leuchter hängen Zange und Lichtputzerschere, links erkennt man den Ölberg, rechts steht der traditionelle Weinkrug. Der Leuchter brennt mit roten Flämmchen.

4 Gleichungen mit Parametern

4.1 Lineare Gleichungen mit Parametern

Wenn man sehr oft Probleme von derselben Art lösen muss, kann man sich die jedes Mal auftretende Rechenarbeit ersparen, wenn man eine Formel entwickelt, aus der man die Lösung schnell entnehmen kann.
Hätte man nacheinander z. B. die Gleichungen $3x + 5 = 0$, $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 7$ und $0{,}91x - 3 = 1\frac{5}{9}$ zu lösen, so weiß man, dass der Rechenweg jedes Mal derselbe sein wird; denn diese 3 Gleichungen haben dieselbe Bauart. Man sagt auch, sie sind vom selben Typ oder haben dieselbe Form. Man beschreibt nun in der Mathematik Gleichungen derselben Form, indem man an Stelle der speziellen Zahlen Buchstaben setzt. Um aber einen klaren Unterschied zur Unbekannten x zu machen, verwendet man zur Kennzeichnung der Form meist die ersten Buchstaben des Alphabets, wie es 1637 René Descartes (1596–1650) in *La Géométrie* eingeführt hat. Unsere oben angegebenen drei Gleichungen haben also die Form $ax + b = c$. Im Gegensatz zur Unbekannten x, die in diesem Zusammenhang auch **Gleichungsvariable** heißt, nennt man die Variablen a, b und c, da sie die Form der Gleichung bestimmen, **Formvariable** oder auch **Parameter***.
Um dir zu zeigen, wie man Gleichungen mit Parametern behandelt, betrachten wir in diesem Abschnitt den einfachsten Typ, der dadurch gekennzeichnet ist, dass x nur in der ersten Potenz und nicht im Nenner vorkommt. Eine solche Gleichung nennt man **lineare Gleichung****.
Wir entwickeln nun die Lösungsformel für die lineare Gleichung $ax + b = c$. Dazu gehen wir genauso vor, wie wir es bei Gleichungen mit Zahlen getan haben, stehen die Formvariablen doch für Zahlen.

$$\begin{aligned} ax + b &= c \qquad \| -b \\ ax &= c - b \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Nun müssen wir durch a teilen. Das geht aber nur, wenn a für eine von null verschiedene Zahl steht. Wir schreiben dafür kurz $a \neq 0$. Dann erhalten wir $x = \dfrac{c-b}{a}$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $\left\{\dfrac{c-b}{a}\right\}$.

Was ist aber los, wenn $a = 0$ ist? In diesem Fall sieht unsere Gleichung **(1)** folgendermaßen aus:

$$0 \cdot x = c - b \qquad \textbf{(2)}$$

Jetzt kommt es offensichtlich darauf an, was $c - b$ ist.

* der Parameter, betont auf dem zweiten *a*, entstanden aus *παρά* (pará) = *neben* und *τὸ μέτρον* (to métron) = *Maß*, eine durch ein Maß bestimmte *Größe*, sodass man auf Deutsch *Nebengröße* sagen könnte, 1631 von Claude Mydorge (1585–1647) eingeführt bei der Lehre von den Kegelschnitten, 1692 von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) im heutigen Sinn verwendet.

** Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean Prestet (1652–1690) in seinen *Nouveaux Élémens des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet.*

Gilt nämlich $c - b = 0$, d. h., $b = c$, dann lautet die Gleichung **(2)** $0 \cdot x = 0$. Diese Gleichung wird von jeder Zahl aus $\mathbb{Q}$ gelöst, d. h., sie ist allgemein gültig; ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$.
Gilt aber $c - b \neq 0$, d. h., $b \neq c$, dann steht auf der rechten Seite der Gleichung **(2)** eine von 0 verschiedene Zahl; die linke Seite liefert aber für jede Einsetzung den Wert 0. Die Gleichung ist also widersprüchlich; es gibt keine Zahl, die sie löst, somit ist $L = \{\ \}$.
Wir erkennen: Die Schwierigkeit beim Lösen von Gleichungen mit Parametern besteht darin, dass verschiedene Fälle auftreten können, je nachdem, welche Zahlen man an Stelle der Parameter einsetzen will. Man muss also während des Rechenvorgangs Unterscheidungen vornehmen, die verschiedene Fälle erzeugen. Man spricht daher von **Fallunterscheidungen**.

> **Merke:** Eine Fallunterscheidung ist nötig, wenn man durch einen Term dividiert, der auch null werden kann.

Bei der praktischen Durchführung der Fallunterscheidung geht man am besten so vor, dass man zunächst die Fälle behandelt, bei denen alle Divisoren von null verschieden sind. In einem zweiten Durchgang untersucht man dann die Sonderfälle, die vorher ausgeschlossen werden mussten. Dazu muss man bis zu der Zeile zurückgehen, bei der die Fallunterscheidung nötig wurde. Man erhält dann meist Gleichungen vom Typ $0 \cdot x = 0$ bzw. $0 \cdot x = A$, wobei $A \neq 0$ ist. Die erste Gleichung ist allgemein gültig mit $L = \mathbb{Q}$, die zweite ist widersprüchlich mit $L = \{\ \}$.
In unserem Ausgangsbeispiel $ax + b = c$ läuft die Fallunterscheidung so ab:

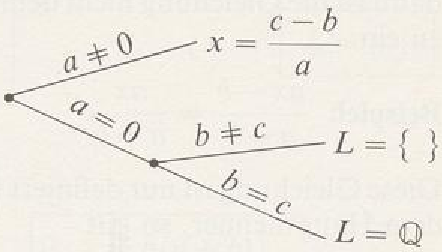
$$ax + b = c \qquad \| -b$$
$$ax = c - b \qquad \| : a, \quad \text{falls} \quad a \neq 0$$

$\boxed{a \neq 0}$ $\quad x = \dfrac{c - b}{a}$

$\boxed{a = 0}$ $\quad 0 \cdot x = c - b$

Für $\boxed{c - b \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$.

Für $\boxed{c - b = 0}$ ist $L = \mathbb{Q}$.

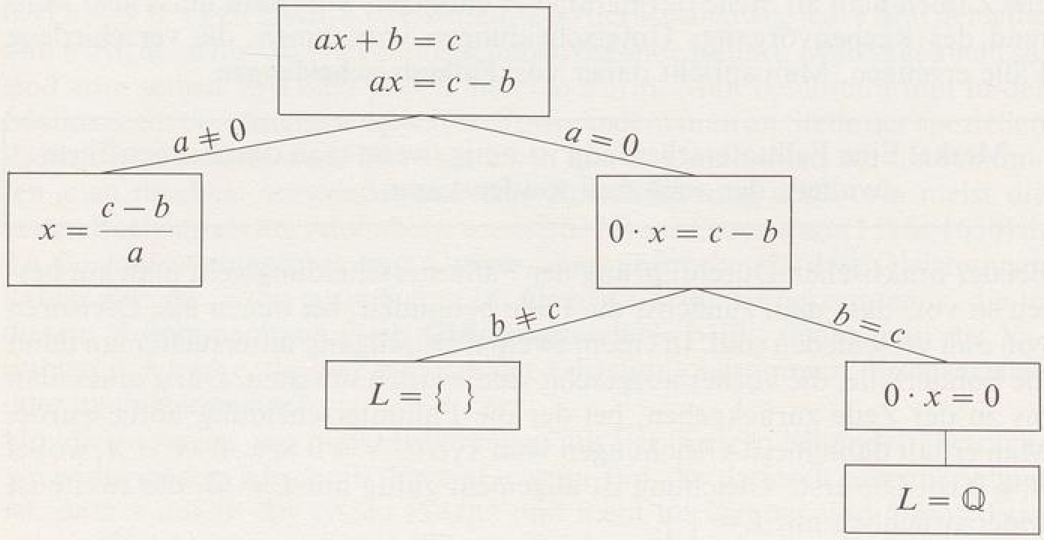


Eine Übersicht über die aufgetretenen Lösungen bietet der **Lösungsbaum**, auf dessen Äste man die Bedingungen schreibt, die die jeweiligen Fälle kennzeichnen. Der Lösungsbaum stellt also die eingangs gesuchte Formel dar. Unser Lösungsbaum steht rechts neben der Rechnung.

Wollen wir die Gleichung $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 7$ lösen, dann können wir wegen $-\frac{1}{2} \neq 0$ aus dem oberen Ast sofort die Lösung angeben zu

$$x = \frac{7 - \frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{56 - 3}{-4} = -\frac{53}{4}.$$

Für $0 \cdot x + 7 = -2$ müssen wir im Baum zuerst nach unten und dann nach oben gehen und erhalten $L = \{\ \}$.
Für $0 \cdot x + \frac{3}{8} = 0{,}375$ müssen wir jedes Mal nach unten gehen und erhalten $L = \mathbb{Q}$.
Rechnung und Lösung lassen sich auch zusammenfassen zu einem **Rechenbaum**. Hier arbeitet man zweckmäßig von oben nach unten. Wie beim Lösungsbaum schreibt man auf die Äste die Bedingungen für die verschiedenen Fälle und setzt die jeweils entstandenen Gleichungen in einen Rahmen, von dem aus man weiterrechnet. Der Rechenbaum für unser Beispiel sieht so aus:



Kommen bei einer Gleichung Parameter im Nenner vor, dann muss man von Anfang an gewisse Parameterwerte ausschließen. Ist nämlich ein Nenner null, dann ist die Gleichung nicht definiert und die Lösungsmenge daher leer. Hierzu ein

Beispiel: $\frac{ax-b}{a-b} = \frac{ax}{a+b}$

Diese Gleichung ist nur definiert für $a \neq b$ und $a \neq -b$. Multiplizieren wir mit dem Hauptnenner, so gilt

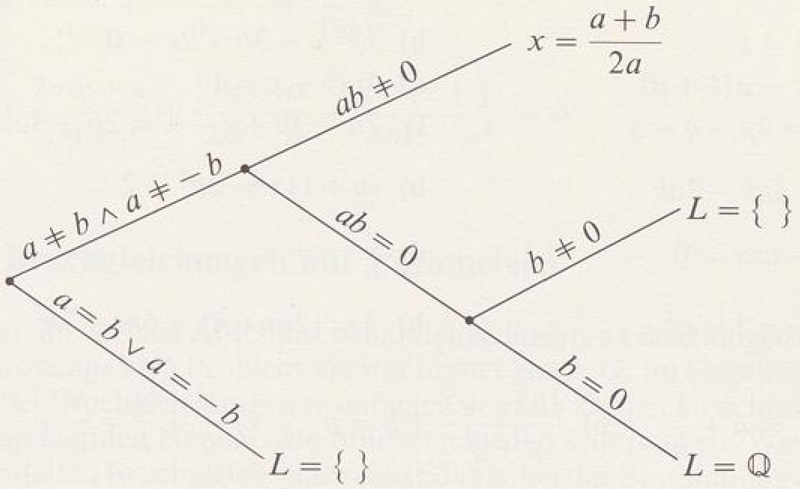
$$(ax-b)(a+b) = ax(a-b)$$
$$a^2x + abx - ab - b^2 = a^2x - abx$$
$$2abx = ab + b^2 \qquad \| : (2ab), \quad \text{falls} \quad ab \neq 0$$

$$\boxed{ab \neq 0} \quad x = \frac{b(a+b)}{2ab} \qquad\qquad \boxed{ab = 0} \quad 0 \cdot x = b(a+b)$$

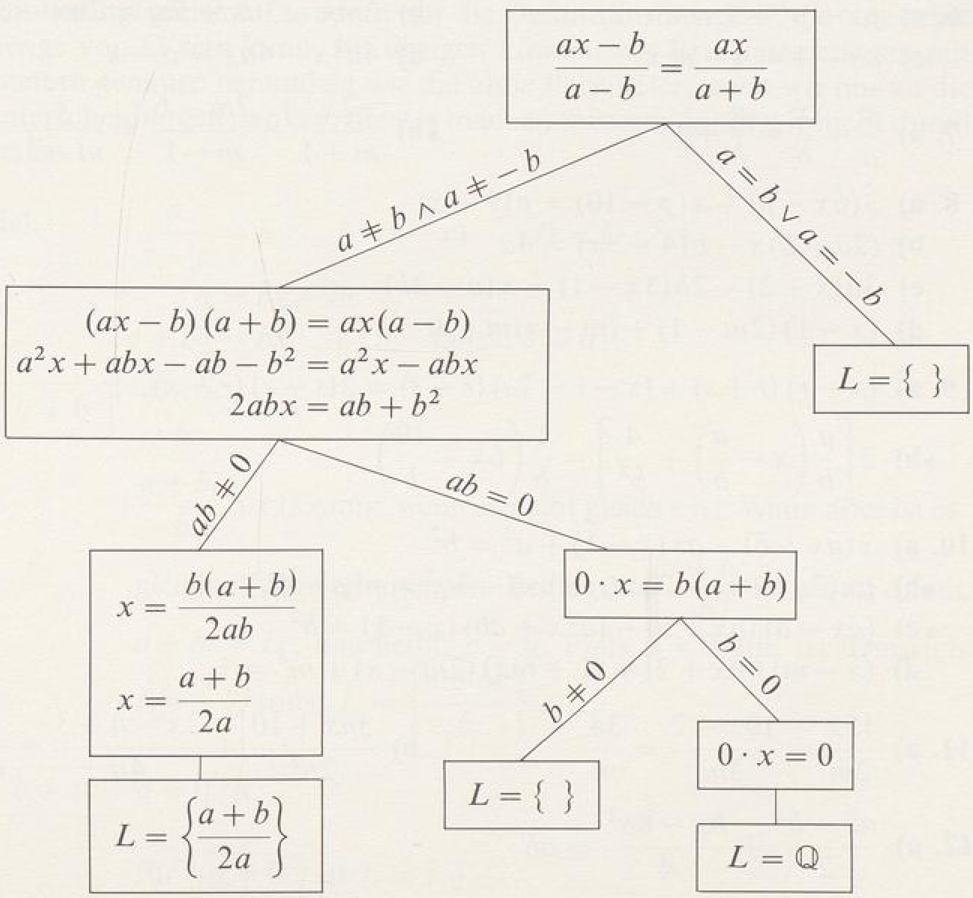
$$x = \frac{a+b}{2a} \qquad\qquad \text{Für } \boxed{b \neq 0} \text{ ist } L = \{\ \}. \quad \text{Für } \boxed{b = 0} \text{ ist } L = \mathbb{Q}.$$

Beachte: Wegen der oben gemachten Voraussetzung $a \neq -b$ ist $a + b \neq 0$.

Der Lösungsbaum sieht so aus:



Der Rechenbaum hat die folgende Gestalt:



Wenn du im Heft solche Rechenbäume entwickeln musst, ist es oft zweckmäßig, das Heft quer zu legen.

Aufgaben

1. a) $x + a^2 = 1$ **b)** $x - a - 3b + 2c = 0$
c) $a^2 = x - a(1 + a)$ **d)** $4m^2 - x = 1$
e) $-4p = 2p - q - x$ **f)** $7a - 3b + c - x = 2b - 3c$

2. a) $a^2 x = 3a^2 - 2ab$ **b)** $(b + 1)x = 2b^2 - 2$
c) $3u^2 v - uvx = 0$ **d)** $\frac{a}{b} \cdot x = c$

3. a) $\frac{x}{1 + a^2} = 1 - a^2$ **b)** $3x : (2m + n) = 6m - 3n$

4. a) $\frac{1 + ax}{b} = a + \frac{1}{b}$ **b)** $\frac{2px - q^2}{p + q} + q = p$ **c)** $\frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{x}{c} + \frac{c}{a}$

5. a) $6x + 3a + 5b = 9x - a + 3b$ **b)** $4m - 7x + n = 10m - 5x + 3n$
c) $2ax - 5a^2 = 3ab + ax$ **d)** $7cdx + 16c^2 = 4cd - cdx$

6. a) $px - p^2 - 1 = x - 2p$ **b)** $2mx - 3nx + 5m = 2nx - 3mx + 5n$
c) $ax - 1 = a - a^2 x$ **d)** $4a^2 x - 4ax = a - x$

7. a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{a}{b} + 1$ **•b)** $\frac{2x}{m + 1} - \frac{2m - 6}{m - 1} = \frac{x}{m - 1}$

8. a) $3(6x - p) + x(p - 10) = p(9 + x)$
b) $(2a - b)x - b(4 - 3x) = 4a$
c) $3a(x + 2) - 2b(3x - 1) = x(a - 2b)$
d) $(x - 1)(2m - 1) + (m - x)m = 0$

9. a) $(x - r)(r + s) + (x - r - 2s)(r - s) = 2(s - r)(r - x)$
•b) $2\left[\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}\right) + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{1}{b}\left(6x - \frac{10}{b}\right)$

10. a) $x(ax + b) - ax(x - 1) + a^2 = b^2$
•b) $px(2qx + r) - 2qx(r + px) - 4q^2 = p(p - 4q)$
•c) $(ax - a)(ax - b) - (a^2 x + ab)(x - 1) = b^2$
d) $(x - m)(mx + 2) + (1 + mx)(2m - x) + m^4 = 1$

11. a) $\frac{15x}{2m} - \frac{10x - 2}{3m} = \frac{34}{m}$ **b)** $\frac{3nx + 10}{2n^2} + \frac{2x - n + 3}{4n} = \frac{5}{n^2}$

•12. a) $\frac{ax - b^2}{2} + \frac{bx - 8a^2}{4} = ab$

b) $\frac{2p^2 - pq + qx}{3} - \frac{pq - 2q^2 - px}{5} = \frac{p^2 + 22pq - 19q^2}{15}$

•13. a) $\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{ax-b^2}{b^2} = \dfrac{a^4+b^4}{(ab)^2}$

b) $\dfrac{2mx+n}{2m+n} + \dfrac{2m-nx}{2m-n} + \dfrac{2n^2(x+1)}{4m^2-n^2} = 0$

4.2 Bruchgleichungen mit Parametern

Bei den im vorigen Abschnitt behandelten linearen Gleichungen war die Definitionsmenge kein Problem: sie war immer gleich $\mathbb{Q}$. Im Gegensatz dazu muss man bei Bruchgleichungen womöglich gewisse Zahlen ausschließen, weil alle vorkommenden Nenner von null verschieden sein müssen. Wie bei den in **3** behandelten Bruchgleichungen muss daher bei der Bestimmung der Lösungsmenge jetzt auch die Definitionsmenge beachtet werden, die natürlich auch noch von den Parametern abhängen kann. Ergibt sich am Ende der Rechnung z.B. die allgemein gültige Gleichung $0 \cdot x = 0$, dann ist die Lösungsmenge nicht unbedingt gleich $\mathbb{Q}$, sondern nur die Definitionsmenge D, die eine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ sein kann. Im übrigen können wir Bruchgleichungen mit Parametern genauso behandeln wie die ohne Parameter, wenn wir nur an die Fallunterscheidungen denken, die wir machen müssen, damit wir nicht durch null teilen.

Beispiel:

$$\frac{a}{x-c} = b \qquad \| \cdot (x-c) \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$$

$$a = bx - bc$$

$$a + bc = bx \qquad \| : b, \quad \text{falls} \quad b \neq 0$$

$\boxed{b \neq 0}$ $\quad \dfrac{a+bc}{b} = x$

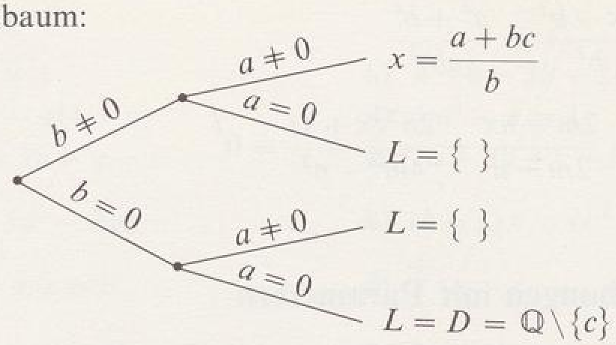
$\dfrac{a+bc}{b}$ ist Lösung, wenn es nicht gleich c ist. Wann aber ist es gleich c? Wir erhalten die Bedingung $\dfrac{a+bc}{b} = c$ und damit $a + bc = bc$, das heißt, $a = 0$. Falls $a = 0$ gilt, ist demnach $L = \{\ \}$, sonst $L = \left\{\dfrac{a+bc}{b}\right\}$.

$\boxed{b = 0}$ $\quad a = 0 \cdot x$

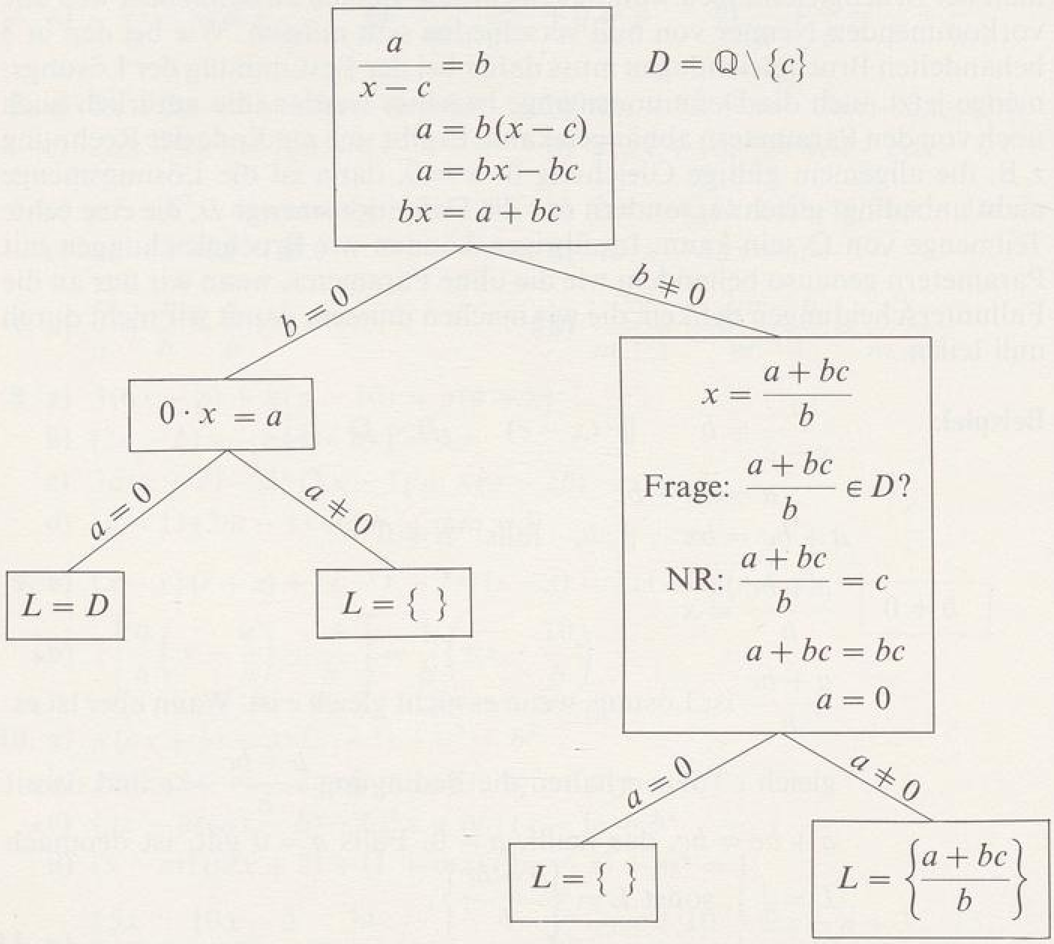
für $\boxed{a \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$

für $\boxed{a = 0}$ ist $L = D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$.

Lösungsbaum:



Der Rechenbaum sieht folgendermaßen aus:



Aufgaben

1. **a)** $\frac{a}{x} = b$ **b)** $\frac{a}{x-1} = b$ **c)** $\frac{a}{x-b} = b$

2. **a)** $\frac{x-1}{x+1} = a$ **b)** $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = a + b$ **c)** $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{2}{x}$

3. a) $\dfrac{x-1}{x-a}+\dfrac{x+1}{x+a}=2$ **b)** $\dfrac{x+2}{x-a}-\dfrac{x-2}{x+a}=0$

4. a) $\dfrac{x+a}{x-a}=\dfrac{a+b}{a-b}$ **b)** $\dfrac{2a-b}{a-2b}=\dfrac{x-a}{a-x}$

5. a) $\dfrac{x-a}{x+a}=2-\dfrac{x+a}{x-a}$ **•b)** $\dfrac{x-2a}{x+2b}-\dfrac{x+2a}{x-2b}=-\dfrac{a+b}{x^2-4b^2}$

6. a) $\dfrac{1+ax}{1+2ax}=2$ **b)** $\dfrac{2}{a-x}=\dfrac{2a}{b(b-x)}$

7. •a) $\dfrac{a+b}{b-ax}+\dfrac{b-a}{a+bx}=0$ **b)** $\dfrac{a-b}{x-b}+\dfrac{a+b}{x+b}=\dfrac{1-2b^2}{x^2-b^2}$

8. a) $\dfrac{5b}{x-a}+\dfrac{2b}{a+x}=\dfrac{4ab}{a^2-x^2}$ **•b)** $\dfrac{a}{a^2-x^2}-\dfrac{1}{a+x}=\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{b+1}{a+x}$

9. $\dfrac{1}{a-2x}-\dfrac{a-1}{a^2+2ax}=\dfrac{4a-1}{a^2-4x^2}$ **10.** $\dfrac{1}{1-a^2x^2}=\dfrac{1}{1+ax}-\dfrac{1}{1-ax}$

⁚11. $\dfrac{4x+b}{4x-b}-\dfrac{4x-b}{4x+b}=\dfrac{bx-15}{16x^2-b^2}$

⁚12. $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{4a-x}{x^2-a^2x}+\dfrac{x-a}{x}=2+\dfrac{ax+a^2}{x^2-ax}$

⁚13. $\dfrac{a-x}{x}-\dfrac{2ab^2-2b^2x}{a^2x+b^2x-2abx}=\dfrac{bx+a^2}{x(a-b)}-\dfrac{a+b}{a-b}$

•14. $\left(\dfrac{3x^2-ax}{a+x}+a-3x\right):\dfrac{3ax-a^2}{x^2-a^2}=(a-x)a$

15. $\dfrac{x-a}{a}-\dfrac{2x}{a-x}=2+\dfrac{1}{\dfrac{a^2+ax}{x^2}}$

⁚16. $\dfrac{1-\dfrac{a}{a+x}}{1+\dfrac{a}{a+x}}=\dfrac{2x+a}{2a+x}$ **⁚17.** $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+c}}=\dfrac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+x}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+x}}$