Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

Aufgaben

1. a) $x + a^2 = 1$ **b)** $x - a - 3b + 2c = 0$
c) $a^2 = x - a(1 + a)$ **d)** $4m^2 - x = 1$
e) $-4p = 2p - q - x$ **f)** $7a - 3b + c - x = 2b - 3c$

2. a) $a^2x = 3a^2 - 2ab$ **b)** $(b + 1)x = 2b^2 - 2$
c) $3u^2v - uvx = 0$ **d)** $\frac{a}{b} \cdot x = c$

3. a) $\frac{x}{1 + a^2} = 1 - a^2$ **b)** $3x : (2m + n) = 6m - 3n$

4. a) $\frac{1 + ax}{b} = a + \frac{1}{b}$ **b)** $\frac{2px - q^2}{p + q} + q = p$ **c)** $\frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{x}{c} + \frac{c}{a}$

5. a) $6x + 3a + 5b = 9x - a + 3b$ **b)** $4m - 7x + n = 10m - 5x + 3n$
c) $2ax - 5a^2 = 3ab + ax$ **d)** $7cdx + 16c^2 = 4cd - cdx$

6. a) $px - p^2 - 1 = x - 2p$ **b)** $2mx - 3nx + 5m = 2nx - 3mx + 5n$
c) $ax - 1 = a - a^2x$ **d)** $4a^2x - 4ax = a - x$

7. a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{a}{b} + 1$ **•b)** $\frac{2x}{m + 1} - \frac{2m - 6}{m - 1} = \frac{x}{m - 1}$

8. a) $3(6x - p) + x(p - 10) = p(9 + x)$
b) $(2a - b)x - b(4 - 3x) = 4a$
c) $3a(x + 2) - 2b(3x - 1) = x(a - 2b)$
d) $(x - 1)(2m - 1) + (m - x)m = 0$

9. a) $(x - r)(r + s) + (x - r - 2s)(r - s) = 2(s - r)(r - x)$
•b) $2\left[\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}\right) + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{1}{b}\left(6x - \frac{10}{b}\right)$

10. a) $x(ax + b) - ax(x - 1) + a^2 = b^2$
•b) $px(2qx + r) - 2qx(r + px) - 4q^2 = p(p - 4q)$
•c) $(ax - a)(ax - b) - (a^2x + ab)(x - 1) = b^2$
d) $(x - m)(mx + 2) + (1 + mx)(2m - x) + m^4 = 1$

11. a) $\frac{15x}{2m} - \frac{10x - 2}{3m} = \frac{34}{m}$ **b)** $\frac{3nx + 10}{2n^2} + \frac{2x - n + 3}{4n} = \frac{5}{n^2}$

•12. a) $\frac{ax - b^2}{2} + \frac{bx - 8a^2}{4} = ab$

b) $\frac{2p^2 - pq + qx}{3} - \frac{pq - 2q^2 - px}{5} = \frac{p^2 + 22pq - 19q^2}{15}$

•13. a) $\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{ax-b^2}{b^2} = \dfrac{a^4+b^4}{(ab)^2}$

b) $\dfrac{2mx+n}{2m+n} + \dfrac{2m-nx}{2m-n} + \dfrac{2n^2(x+1)}{4m^2-n^2} = 0$

4.2 Bruchgleichungen mit Parametern

Bei den im vorigen Abschnitt behandelten linearen Gleichungen war die Definitionsmenge kein Problem: sie war immer gleich $\mathbb{Q}$. Im Gegensatz dazu muss man bei Bruchgleichungen womöglich gewisse Zahlen ausschließen, weil alle vorkommenden Nenner von null verschieden sein müssen. Wie bei den in **3** behandelten Bruchgleichungen muss daher bei der Bestimmung der Lösungsmenge jetzt auch die Definitionsmenge beachtet werden, die natürlich auch noch von den Parametern abhängen kann. Ergibt sich am Ende der Rechnung z.B. die allgemein gültige Gleichung $0 \cdot x = 0$, dann ist die Lösungsmenge nicht unbedingt gleich $\mathbb{Q}$, sondern nur die Definitionsmenge D, die eine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ sein kann. Im übrigen können wir Bruchgleichungen mit Parametern genauso behandeln wie die ohne Parameter, wenn wir nur an die Fallunterscheidungen denken, die wir machen müssen, damit wir nicht durch null teilen.

Beispiel:

$$\frac{a}{x-c} = b \qquad \| \cdot (x-c) \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$$

$$a = bx - bc$$

$$a + bc = bx \qquad \| : b, \quad \text{falls} \quad b \neq 0$$

$\boxed{b \neq 0}$ $\quad \dfrac{a+bc}{b} = x$

$\dfrac{a+bc}{b}$ ist Lösung, wenn es nicht gleich c ist. Wann aber ist es gleich c? Wir erhalten die Bedingung $\dfrac{a+bc}{b} = c$ und damit $a + bc = bc$, das heißt, $a = 0$. Falls $a = 0$ gilt, ist demnach $L = \{\ \}$, sonst $L = \left\{\dfrac{a+bc}{b}\right\}$.

$\boxed{b = 0}$ $\quad a = 0 \cdot x$

für $\boxed{a \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$

für $\boxed{a = 0}$ ist $L = D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$.