Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

5.1 Funktionen

5 Funktionen und ihre graphische Darstellung

5.1 Funktionen

Im Geometrieunterricht hast du schon gelernt, was man unter einer **Abbildung** versteht. Als Beispiele von Abbildungen sind dir sicher die Achsenspiegelung, die Punktspiegelung und die Verschiebung bekannt. Du weißt, dass man in der Geometrie immer dann von einer Abbildung spricht, wenn jedem Punkt P der Ebene *genau ein* Bildpunkt P′ zugeordnet wird.
Solche eindeutigen Zuordnungen kommen auch in anderen Teilgebieten der Mathematik, bei Naturvorgängen und in vielen anderen Zusammenhängen vor. Das zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Hans bietet Uli ein Würfelspiel nach folgender Regel an: Uli darf würfeln. Bei einer ungeraden Augenzahl erhält er von Hans, bei einer geraden Augenzahl zahlt er an Hans so viele €, wie die Augenzahl jeweils angibt.
Durch diese Spielregel ist tatsächlich Ulis Gewinn bzw. Verlust (= negativer Gewinn) für jede Augenzahl genau festgelegt. Man kann alle möglichen Fälle in einer Tabelle zusammenstellen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gewinn in €	1	−2	3	−4	5	−6

Bei diesem Spiel lässt sich die Regel, nach welcher einer Augenzahl x der Gewinn y € zugeordnet wird, auch kurz durch eine Gleichung ausdrücken: $y = (-1)^{x+1} \cdot x$.

Beispiel 2:

Wie viele Primzahlen befinden sich unter den ersten n natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$?
Bezeichnet man die gesuchte Anzahl mit m, so kann man folgende Tabelle aufstellen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
m	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	…

Diese Tabelle lässt sich – wenn auch mit wachsendem Rechenaufwand – beliebig weit fortsetzen. Zu jeder natürlichen Zahl n erhält man genau eine Zahl m.

Beispiel 3:

Den Flächeninhalt A eines Quadrats kann man aus der Quadratseite a berechnen: $A = a^2$. Jeder Seitenlänge a ist also eindeutig der Flächeninhalt A zugeordnet.

Beispiel 4:

Am Thermometer einer meteorologischen Station wurden im Laufe eines Tages folgende Temperaturen abgelesen:

Uhrzeit t in Std.	0	3	6	9	12	15		21	24
Temperatur ϑ in °C	7,1	5,0	8,3	14,9	19,0	22,2	18,8	12,5	9,8

Natürlich hätte man das Thermometer auch zu anderen Zeiten ablesen können; es zeigte zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Temperatur an.

Das Gemeinsame an diesen Beispielen lässt sich folgendermaßen beschreiben: Man hat jeweils zwei Mengen und eine Vorschrift, welche jedem Element der einen Menge genau ein Element der andern Menge zuordnet. In Abbildung 86.1 ist dieser Sachverhalt veranschaulicht; die Zuordnungsvorschrift wird dabei durch die Pfeile dargestellt. Wesentlich ist, dass von jedem Element der ersten Menge nur ein einziger Pfeil ausgeht; denn zu ihm gehört ja *genau ein* Element der zweiten Menge. Wohl aber können zwei oder mehr Pfeile auf dasselbe Element der zweiten Menge zeigen. Vergleiche dazu das Beispiel 2.

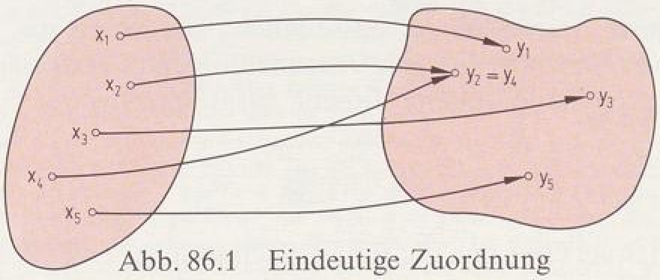

Abb. 86.1 Eindeutige Zuordnung

Da das Wesentliche an einer Abbildung die Eindeutigkeit der Zuordnung ist, spricht man auch in solchen Fällen, wo – wie in unseren Beispielen – nicht Punkten wieder Punkte zugeordnet werden, von einer Abbildung. Man sagt, dass die erste Menge in die zweite Menge abgebildet wird. Für eine solche nicht geometrische Abbildung gibt es aber noch eine andere Bezeichnung; man nennt sie auch **Funktion***.

Als Zeichen für eine Funktion verwendet man im Allgemeinen einen kleinen lateinischen Buchstaben, zumeist f. Die erste Menge heißt **Definitionsmenge D** der Funktion. Ein Element von D wird in der Regel mit der Variablen x bezeichnet. Für das ihm zugeordnete Element der zweiten Menge verwendet man dann das Zeichen $f(x)$, gelesen »f von x«. Man nennt $f(x)$ den zu x gehörenden **Funktionswert**; x bezeichnet man oft als **Argument**** der Funktion f. Alle Funktionswerte einer Funktion fasst man zu ihrer **Wertemenge W** zusammen. Die Zuordnung zwischen den Elementen der Definitions- und der Wertemenge wird durch einen besonderen Pfeil, den Abbildungspfeil oder **Fußpfeil** $\mapsto$, dargestellt. Man schreibt kurz

$$f\colon\ x \mapsto f(x), \quad x \in D.$$

* functio (lat.) = Verrichtung   ** argumentum (lat.) = Gegenstand, Inhalt, der Gehalt

Wir fassen die neuen Begriffe zusammen in

> **Definition 87.1:** Unter einer **Funktion** f mit der **Definitionsmenge** D und der **Wertemenge** W versteht man eine Abbildung, die jedem Element x aus D genau ein Element $f(x)$ aus W als Funktionswert zuordnet.
> Man schreibt dafür $f\colon x \mapsto f(x),\ x \in D$.

Oft wird auch als Bezeichnung für ein Element der Wertemenge die Variable y verwendet. Man schreibt dann etwas ausführlicher $f\colon x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ und $x \in D$. Dabei ist zu beachten, dass den Variablen x und y ganz verschiedene Rollen zugeteilt sind. Für x darf ein beliebiger Wert aus der Definitionsmenge D gewählt werden. Für y muss dann der diesem x zugeordnete Funktionswert genommen werden. Wegen dieses Unterschiedes nennt man x die **unabhängige** und y die **abhängige Variable** der Funktion.

Das Wort *functio* hat 1692 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) bei geometrischen Betrachtungen in die Mathematik eingeführt. Die Bezeichnungen f und $f(x)$ für Funktion und Funktionswert gehen auf Leonhard EULER (1707–1783) zurück, bei dem sie erstmals 1734 in einer Abhandlung vorkommen. Die Schreibweise $y = f(x)$ wurde erstmals 1883 von dem italienischen Mathematiker Giuseppe PEANO (1858–1932) verwendet.

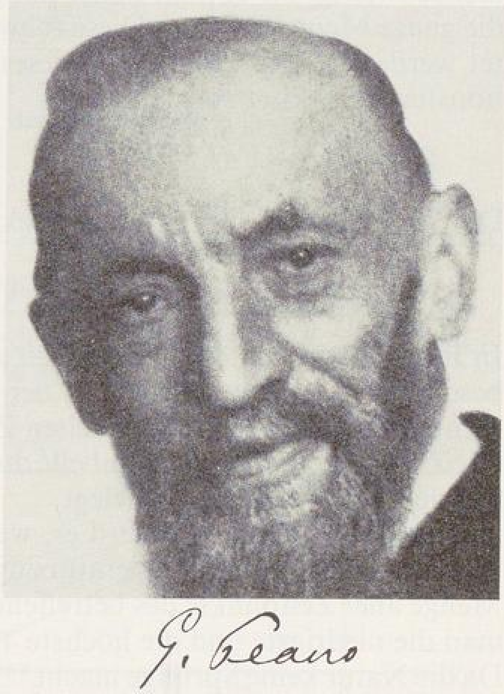

Abb. 87.1 Giuseppe PEANO (27.8.1858 Cuneo – 20.4.1932 Turin) hat das $\in$ als Abkürzung von ἐστί (estí) = *ist* 1889 in *Arithmetices principia* eingeführt.

Betrachten wir noch einmal unsere vier Beispiele, um darauf die neuen Begriffe anzuwenden und einige Ergänzungen zu erläutern.

In **Beispiel 1** handelt es sich um eine Funktion mit der Definitionsmenge $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Der zu $x \in D$ gehörende Funktionswert y kann, wie wir festgestellt haben, mithilfe der Gleichung $y = (-1)^{x+1} \cdot x$ berechnet werden. Eine solche Gleichung heißt **Funktionsgleichung**; sie hat die Form $y = f(x)$.
Der auf ihrer rechten Seite für $f(x)$ stehende Term, hier also $(-1)^{x+1} \cdot x$, heißt **Funktionsterm**. Damit lässt sich die Funktion schreiben als

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = (-1)^{x+1} \cdot x \quad \text{und} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

oder kürzer

$$f\colon x \mapsto (-1)^{x+1} \cdot x \quad \text{und} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

In **Beispiel 2** handelt es sich um eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$. Die Zuordnungsvorschrift lässt sich hier nur in Worten ausdrücken: Jedem $x \in \mathbb{N}$ wird als Funktionswert $f(x)$ die Anzahl aller Primzahlen p zugeordnet, für welche $p \leq x$ gilt. Der kleinste Funktionswert ist 0. Lässt man x die natürlichen Zahlen durchlaufen, so wird jedes Mal, wenn x eine Primzahl ist, der Funktionswert um 1 größer, sodass $f(x)$ entweder eine Zahlenmenge $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oder die ganze Menge $\mathbb{N}_0$ durchläuft, je nachdem, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt*.

In **Beispiel 3** können wir für Längen bzw. Flächeninhalte die Maßeinheiten 1 m bzw. 1 m² verwenden. Setzt man dann $a = x\,\text{m}$ und $A = y\,\text{m}^2$, so sind x und y unbenannte Zahlen, und es gilt: $y = x^2$. Diese Gleichung beschreibt die Zuordnungsvorschrift der Funktion; es handelt sich also wieder um eine Funktionsgleichung. Die Definitionsmenge D besteht in diesem Fall aus allen positiven rationalen Zahlen, also $D = \mathbb{Q}^+$. Die Angabe der Wertemenge W ist hier schwierig! Sie enthält sicher nur positive rationale Zahlen. Stellt sie aber die ganze Menge $\mathbb{Q}^+$ dar? Diese schwierige Frage kann erst später beantwortet werden**. Die Funktion f dieses Beispiels lässt sich mithilfe des Funktionsterms x^2 kurz so schreiben:

$$f\colon\ x \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Die Wertemenge können wir indirekt in der Form

$$W = \{\, y \mid y = x^2 \wedge x \in \mathbb{Q}^+ \} \text{ angeben.}$$

In **Beispiel 4** stellen, wenn man sich auf die in der Tabelle enthaltenen Werte beschränkt, die Zeitangaben in der ersten Zeile die Definitionsmenge, die Temperaturangaben in der zweiten Zeile die Wertemenge der Funktion dar. Die Zuordnung wird in der Tabelle durch das Untereinanderschreiben zusammengehörender Werte festgelegt.
Wesentlich komplizierter wird es, wenn man sich vorstellt, dass *jedem* Zeitpunkt eine bestimmte Temperatur zugeordnet ist. Für diese Funktion ist D die Menge aller Zeitpunkte des betreffenden Tages. Um W zu bestimmen, müsste man die niedrigste und die höchste Temperatur an diesem Tag ermitteln***. Da die Natur keine Sprünge macht****, gehören auch alle dazwischen liegenden Temperaturwerte zu W.

Eindeutige Zuordnungen zwischen zwei Mengen, also Funktionen bzw. Abbildungen, treten besonders häufig auf und haben in der Mathematik eine sehr große Bedeutung. Es gibt daneben aber auch mehrdeutige Zuordnungen:

* Vgl. dazu Aufgabe 103/**15**   ** Vgl. Algebra 9

*** Es gibt sog. Minimum-Maximum-Thermometer, auf denen diese beiden Temperaturen angezeigt werden.

**** Natura non facit saluts (lat.) = Die Natur macht keine Sprünge (Karl von Linné 1707–1778, schwedischer Botaniker). Der Gedanke dieses Ausspruchs geht auf Aristoteles (384–322 v. Chr.) zurück; er findet sich in ähnlicher Form schon bei anderen Schriftstellern vor Linné.

Beispiel 5:

Jeder Zahl x aus der Menge $\mathbb{Q}^+$ werden diejenigen Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zugeordnet, deren Betrag den Wert x hat.
Man erkennt leicht, dass man hier der Zahl x sowohl x selbst als auch die Zahl $-x$ zuordnen muss. Zu jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ gibt es also zwei verschiedene Zahlen aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, welche die Bedingung erfüllen; diese lässt sich als Gleichung $|y| = x$ schreiben. Wir veranschaulichen den Sachverhalt mithilfe zweier Zahlengeraden für x bzw. y (Abbildung 89.1):

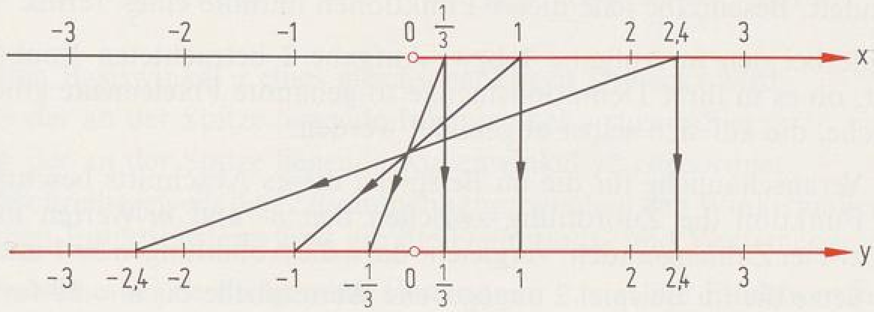

Abb. 89.1 Zuordnung mit der Eigenschaft $|y| = x$

Beispiel 6:

Jeder natürlichen Zahl x werden alle Zahlen y zugeordnet, die Teiler von x sind.
Zu $x = 1$ gehört eindeutig $y = 1$. Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, besitzt aber mindestens zwei verschiedene Teiler. Abbildung 89.2 zeigt die Zuordnungen für die x-Werte 1, 2, 4 und 8.

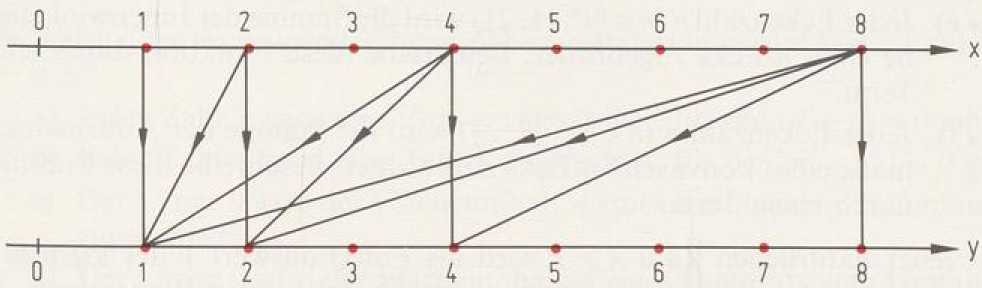

Abb. 89.2 Zur Zuordnung »y ist Teiler von x«

Für eine beliebige Zuordnung zwischen zwei Mengen verwendet man in der Mathematik die Bezeichnung **Relation** *. Funktionen sind besondere Relationen, nämlich solche, bei denen die Zuordnung eindeutig ist. In den Beispielen 5 und 6 sind Relationen beschrieben, die keine Funktionen sind.

* *relatio* (lat.) = ursprünglich *das Zurücktragen*, später auch *die Beziehung*, *das Verhältnis*

Aufgaben

1. Jeder natürlichen Zahl x wird zugeordnet

a) ihre Hälfte **b)** ihr Kehrwert

c) ihr Quadrat **d)** ihr größter Teiler.

Berechne jeweils für $x \leqq 10$ die zugeordneten Werte und schreibe die Wertetabelle auf.

2. Begründe, dass es sich bei allen Beispielen der Aufgabe **1** um Funktionen handelt. Beschreibe jede dieser Funktionen mithilfe eines Terms.

• **3.** Stelle bei den in Aufgabe **1** bzw. Aufgabe **2** betrachteten Funktionen fest, ob es in ihrer Definitionsmenge so genannte **Fixelemente** gibt, d.h. solche, die auf sich selbst abgebildet werden.

4. a) Veranschauliche für die im Beispiel 2 dieses Abschnitts beschriebene Funktion die Zuordnung zwischen den n- und m-Werten mithilfe zweier Zahlengeraden. Vergleiche dazu die Abbildungen 89.1 und 89.2.

b) Setze die im Beispiel 2 angegebene Wertetabelle bis $n = 30$ fort.

5. Begründe, dass es sich bei den folgenden Zuordnungen um Funktionen handelt, und gib jeweils die Definitions- und die Wertemenge an.

a) Jedem Dreieck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.

b) Jedem Dreieck wird die Summe seiner drei Außenwinkelmaße zugeordnet.

c) Jedem Viereck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.

d) Jedem konvexen* Viereck wird die Summe seiner vier Außenwinkelmaße zugeordnet.

• **e)** Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Innenwinkelmaße eines n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.

• **f)** Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Außenwinkelmaße eines konvexen* n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.

6. Jeder natürlichen Zahl $x > 1$ wird als Funktionswert y der kleinste in x enthaltene Primfaktor zugeordnet. Berechne die Wertetabelle für $15 \leqq x \leqq 25$.

7. Stelle für die folgenden Funktionen jeweils die Wertetabelle mit den x-Werten $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ und 4 auf.

a) $f\colon x \mapsto 2x + 3,\ x \in \mathbb{Q}$ **b)** $f\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{Q}$

c) $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1},\quad x \in \mathbb{Q}$ **d)** $f\colon x \mapsto (-2)^{1+|x|},\quad x \in \mathbb{Z}$

* *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

•**8.** Veranschauliche bei der Funktion von Aufgabe **7d** die Zuordnung zwischen x und $f(x)$ für $-4 \leqq x \leqq 4$. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm für x und eine mit der Längeneinheit 1 mm für $f(x)$.

•**9.** Bestimme die Wertemenge W:

a) $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **b)** $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}$
c) $f\colon x \mapsto x+2, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **d)** $f\colon x \mapsto x-2, \quad x \in \mathbb{Q}$
e) $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{Q}^+$ **f)** $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{Q}$

10. Dem Basiswinkel α eines gleichschenkligen Dreiecks wird

a) der an der Spitze liegende Innenwinkel γ zugeordnet
b) der an der Spitze liegende Außenwinkel γ^* zugeordnet.

Beschreibe jeweils den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen durch einen Funktionsterm und gib die Definitions- und Wertemenge an.

•**11.** Berechne bei den folgenden Funktionen zuerst die Funktionswerte für $x \leqq 5$. Beschreibe sodann die Wertemengen und bestimme die Fixelemente. (Hinweis zu **c** und **d**: Unterscheide zwischen geraden und ungeraden x-Werten!) [ggT = größter gemeinsamer Teiler]

a) $f\colon x \mapsto \mathrm{ggT}\,(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$ **b)** $f\colon x \mapsto \mathrm{kgV}\,(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$
c) $f\colon x \mapsto \mathrm{ggT}\,(2; x), \ x \in \mathbb{N}$ **d)** $f\colon x \mapsto \mathrm{kgV}\,(2; x), \quad x \in \mathbb{N}$

•**12.** Veranschauliche mithilfe zweier Zahlengeraden für x bzw. $f(x)$ die Zuordnung bei der Funktion von Aufgabe

a) **11a** **b)** **11b** **c)** **11c** **d)** **11d**.

13. Welche der im Folgenden beschriebenen Relationen sind keine Funktionen?

a) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x-y| = 0$ gilt.
b) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x| - |y| = 0$ gilt.
c) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Rechtecks vom Umfang u zugeordnet.
d) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Quadrats vom Umfang u zugeordnet.
e) Jeder zweistelligen natürlichen Zahl x wird ihre Quersumme y zugeordnet.
f) Jeder einstelligen natürlichen Zahl x wird eine zweistellige natürliche Zahl y mit der Quersumme x zugeordnet.

14. Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 900$ km/h.
Beschreibe durch eine Gleichung die Funktion, welche

a) der Flugzeit $t = x$ min den zurückgelegten Weg $s = y$ km zuordnet,
b) der Flugstrecke $s = x$ km die benötigte Flugzeit $t = y$ min zuordnet.

15. Begründe folgende Aussagen durch die Angabe der entsprechenden Funktionsgleichungen:

a) In einem Stromkreis mit konstantem Widerstand R (z. B. $R = 100\,\Omega$) ist jedem Wert der angelegten Spannung U eindeutig ein Wert der Stromstärke I zugeordnet.

b) In einem Stromkreis, der mit einer konstanten Spannung U (z. B. $U = 220$ V) betrieben wird, benötigt man einen ganz bestimmten Widerstand R, um eine gewünschte Stromstärke I zu erreichen.

5.2 Der Graph einer Funktion

Bei sehr vielen Funktionen besteht sowohl die Definitionsmenge D als auch die Wertemenge W aus Zahlen. Da eine solche Funktion jeder Zahl $x \in D$ eine Zahl $y \in W$ zuordnet, kann man sagen: Die Funktion erzeugt **Zahlenpaare** $(x \mid y)$. Ein solches Paar besteht also jeweils aus einem Wert der unabhängigen Variablen an erster Stelle und dem dazugehörenden Wert der abhängigen Variablen an zweiter Stelle. Diese Zahlenpaare erkennt man besonders leicht, wenn die Funktion durch eine Wertetabelle beschrieben ist. Betrachte etwa die Funktion von Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts; zu ihr gehören die Zahlenpaare $(1 \mid 1)$, $(2 \mid -2)$, $(3 \mid 3)$, $(4 \mid -4)$, $(5 \mid 5)$ und $(6 \mid -6)$. Aber auch bei einer Funktion, die durch einen Term bzw. eine Gleichung definiert ist, lassen sich die entsprechenden Zahlenpaare leicht angeben. So erzeugt die im Beispiel 3 von **5.1** betrachtete Funktion unendlich viele Zahlenpaare $(x \mid x^2)$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

Mit Zahlenpaaren hast du auch schon bisher im Mathematikunterricht zu tun gehabt, vor allem in der Geometrie. Dort werden sie zur Beschreibung der Lage von Punkten benützt. Man benötigt dazu bekanntlich ein **Koordinatensystem**, also zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt, das so genannte Achsenkreuz.

Die eine Gerade, meist von links nach rechts laufend, bezeichnet man als x-Achse, die andere als y-Achse (Abbildung 92.1). Falls die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind, spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem***.

Zu einem Zahlenpaar $(a \mid b)$ erhält man eindeutig einen Punkt P, indem

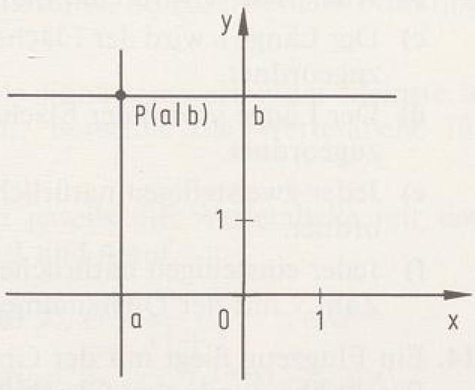

Abb. 92.1 Kartesisches Koordinatensystem; P hat die Abszisse a und die Ordinate b

* Bezeichnet zu Ehren des französischen Philosophen und Mathematikers René DESCARTES (1596–1650). Siehe auch »Zur Geschichte des Koordinatensystems« Seite 96ff.
τὸ σύστημα (tò sýstema) = Zusammenstellung, Gebilde