Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

Aufgaben

1. Jeder natürlichen Zahl x wird zugeordnet

a) ihre Hälfte **b)** ihr Kehrwert

c) ihr Quadrat **d)** ihr größter Teiler.

Berechne jeweils für $x \leqq 10$ die zugeordneten Werte und schreibe die Wertetabelle auf.

2. Begründe, dass es sich bei allen Beispielen der Aufgabe **1** um Funktionen handelt. Beschreibe jede dieser Funktionen mithilfe eines Terms.

• **3.** Stelle bei den in Aufgabe **1** bzw. Aufgabe **2** betrachteten Funktionen fest, ob es in ihrer Definitionsmenge so genannte **Fixelemente** gibt, d.h. solche, die auf sich selbst abgebildet werden.

4. a) Veranschauliche für die im Beispiel 2 dieses Abschnitts beschriebene Funktion die Zuordnung zwischen den n- und m-Werten mithilfe zweier Zahlengeraden. Vergleiche dazu die Abbildungen 89.1 und 89.2.

b) Setze die im Beispiel 2 angegebene Wertetabelle bis $n = 30$ fort.

5. Begründe, dass es sich bei den folgenden Zuordnungen um Funktionen handelt, und gib jeweils die Definitions- und die Wertemenge an.

a) Jedem Dreieck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.

b) Jedem Dreieck wird die Summe seiner drei Außenwinkelmaße zugeordnet.

c) Jedem Viereck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.

d) Jedem konvexen* Viereck wird die Summe seiner vier Außenwinkelmaße zugeordnet.

• **e)** Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Innenwinkelmaße eines n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.

• **f)** Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Außenwinkelmaße eines konvexen* n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.

6. Jeder natürlichen Zahl $x > 1$ wird als Funktionswert y der kleinste in x enthaltene Primfaktor zugeordnet. Berechne die Wertetabelle für $15 \leqq x \leqq 25$.

7. Stelle für die folgenden Funktionen jeweils die Wertetabelle mit den x-Werten $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ und 4 auf.

a) $f\colon x \mapsto 2x + 3,\ x \in \mathbb{Q}$ **b)** $f\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{Q}$

c) $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1},\quad x \in \mathbb{Q}$ **d)** $f\colon x \mapsto (-2)^{1+|x|},\quad x \in \mathbb{Z}$

* *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

•**8.** Veranschauliche bei der Funktion von Aufgabe **7d** die Zuordnung zwischen x und $f(x)$ für $-4 \leqq x \leqq 4$. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm für x und eine mit der Längeneinheit 1 mm für $f(x)$.

•**9.** Bestimme die Wertemenge W:

a) $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **b)** $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}$

c) $f\colon x \mapsto x + 2, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **d)** $f\colon x \mapsto x - 2, \quad x \in \mathbb{Q}$

e) $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{Q}^+$ **f)** $f\colon x \mapsto \frac{1}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{Q}$

10. Dem Basiswinkel α eines gleichschenkligen Dreiecks wird

a) der an der Spitze liegende Innenwinkel γ zugeordnet

b) der an der Spitze liegende Außenwinkel γ^* zugeordnet.

Beschreibe jeweils den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen durch einen Funktionsterm und gib die Definitions- und Wertemenge an.

•**11.** Berechne bei den folgenden Funktionen zuerst die Funktionswerte für $x \leqq 5$. Beschreibe sodann die Wertemengen und bestimme die Fixelemente. (Hinweis zu **c** und **d**: Unterscheide zwischen geraden und ungeraden x-Werten!) [ggT = größter gemeinsamer Teiler]

a) $f\colon x \mapsto \operatorname{ggT}(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$ **b)** $f\colon x \mapsto \operatorname{kgV}(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$

c) $f\colon x \mapsto \operatorname{ggT}(2; x), \; x \in \mathbb{N}$ **d)** $f\colon x \mapsto \operatorname{kgV}(2; x), \quad x \in \mathbb{N}$

•**12.** Veranschauliche mithilfe zweier Zahlengeraden für x bzw. $f(x)$ die Zuordnung bei der Funktion von Aufgabe

a) **11a** **b)** **11b** **c)** **11c** **d)** **11d**.

13. Welche der im Folgenden beschriebenen Relationen sind keine Funktionen?

a) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x - y| = 0$ gilt.

b) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x| - |y| = 0$ gilt.

c) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Rechtecks vom Umfang u zugeordnet.

d) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Quadrats vom Umfang u zugeordnet.

e) Jeder zweistelligen natürlichen Zahl x wird ihre Quersumme y zugeordnet.

f) Jeder einstelligen natürlichen Zahl x wird eine zweistellige natürliche Zahl y mit der Quersumme x zugeordnet.

14. Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 900$ km/h.
Beschreibe durch eine Gleichung die Funktion, welche

a) der Flugzeit $t = x$ min den zurückgelegten Weg $s = y$ km zuordnet,

b) der Flugstrecke $s = x$ km die benötigte Flugzeit $t = y$ min zuordnet.

15. Begründe folgende Aussagen durch die Angabe der entsprechenden Funktionsgleichungen:

a) In einem Stromkreis mit konstantem Widerstand R (z. B. $R = 100\,\Omega$) ist jedem Wert der angelegten Spannung U eindeutig ein Wert der Stromstärke I zugeordnet.

b) In einem Stromkreis, der mit einer konstanten Spannung U (z. B. $U = 220$ V) betrieben wird, benötigt man einen ganz bestimmten Widerstand R, um eine gewünschte Stromstärke I zu erreichen.

5.2 Der Graph einer Funktion

Bei sehr vielen Funktionen besteht sowohl die Definitionsmenge D als auch die Wertemenge W aus Zahlen. Da eine solche Funktion jeder Zahl $x \in D$ eine Zahl $y \in W$ zuordnet, kann man sagen: Die Funktion erzeugt **Zahlenpaare** $(x|y)$. Ein solches Paar besteht also jeweils aus einem Wert der unabhängigen Variablen an erster Stelle und dem dazugehörenden Wert der abhängigen Variablen an zweiter Stelle. Diese Zahlenpaare erkennt man besonders leicht, wenn die Funktion durch eine Wertetabelle beschrieben ist. Betrachte etwa die Funktion von Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts; zu ihr gehören die Zahlenpaare $(1|1)$, $(2|-2)$, $(3|3)$, $(4|-4)$, $(5|5)$ und $(6|-6)$. Aber auch bei einer Funktion, die durch einen Term bzw. eine Gleichung definiert ist, lassen sich die entsprechenden Zahlenpaare leicht angeben. So erzeugt die im Beispiel 3 von **5.1** betrachtete Funktion unendlich viele Zahlenpaare $(x|x^2)$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

Mit Zahlenpaaren hast du auch schon bisher im Mathematikunterricht zu tun gehabt, vor allem in der Geometrie. Dort werden sie zur Beschreibung der Lage von Punkten benützt. Man benötigt dazu bekanntlich ein **Koordinatensystem**, also zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt, das so genannte Achsenkreuz.

Die eine Gerade, meist von links nach rechts laufend, bezeichnet man als x-Achse, die andere als y-Achse (Abbildung 92.1). Falls die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind, spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem***.

Zu einem Zahlenpaar $(a|b)$ erhält man eindeutig einen Punkt P, indem

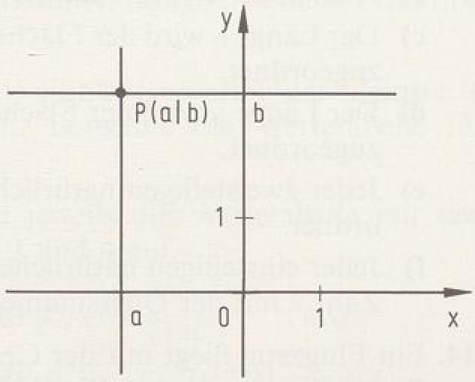

Abb. 92.1 Kartesisches Koordinatensystem; P hat die Abszisse a und die Ordinate b

* Bezeichnet zu Ehren des französischen Philosophen und Mathematikers René DESCARTES (1596–1650). Siehe auch »Zur Geschichte des Koordinatensystems« Seite 96ff.
τὸ σύστημα (tò sýstema) = Zusammenstellung, Gebilde