Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

5.2 Der Graph einer Funktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

15. Begründe folgende Aussagen durch die Angabe der entsprechenden Funktionsgleichungen:

a) In einem Stromkreis mit konstantem Widerstand R (z. B. $R = 100\,\Omega$) ist jedem Wert der angelegten Spannung U eindeutig ein Wert der Stromstärke I zugeordnet.

b) In einem Stromkreis, der mit einer konstanten Spannung U (z. B. $U = 220$ V) betrieben wird, benötigt man einen ganz bestimmten Widerstand R, um eine gewünschte Stromstärke I zu erreichen.

5.2 Der Graph einer Funktion

Bei sehr vielen Funktionen besteht sowohl die Definitionsmenge D als auch die Wertemenge W aus Zahlen. Da eine solche Funktion jeder Zahl $x \in D$ eine Zahl $y \in W$ zuordnet, kann man sagen: Die Funktion erzeugt **Zahlenpaare** $(x \mid y)$. Ein solches Paar besteht also jeweils aus einem Wert der unabhängigen Variablen an erster Stelle und dem dazugehörenden Wert der abhängigen Variablen an zweiter Stelle. Diese Zahlenpaare erkennt man besonders leicht, wenn die Funktion durch eine Wertetabelle beschrieben ist. Betrachte etwa die Funktion von Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts; zu ihr gehören die Zahlenpaare $(1 \mid 1)$, $(2 \mid -2)$, $(3 \mid 3)$, $(4 \mid -4)$, $(5 \mid 5)$ und $(6 \mid -6)$. Aber auch bei einer Funktion, die durch einen Term bzw. eine Gleichung definiert ist, lassen sich die entsprechenden Zahlenpaare leicht angeben. So erzeugt die im Beispiel 3 von **5.1** betrachtete Funktion unendlich viele Zahlenpaare $(x \mid x^2)$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

Mit Zahlenpaaren hast du auch schon bisher im Mathematikunterricht zu tun gehabt, vor allem in der Geometrie. Dort werden sie zur Beschreibung der Lage von Punkten benützt. Man benötigt dazu bekanntlich ein **Koordinatensystem**, also zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt, das so genannte Achsenkreuz.

Die eine Gerade, meist von links nach rechts laufend, bezeichnet man als x-Achse, die andere als y-Achse (Abbildung 92.1). Falls die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind, spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem***.

Zu einem Zahlenpaar $(a \mid b)$ erhält man eindeutig einen Punkt P, indem

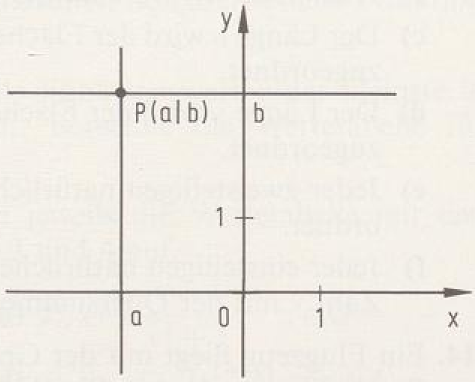

Abb. 92.1 Kartesisches Koordinatensystem; P hat die Abszisse a und die Ordinate b

* Bezeichnet zu Ehren des französischen Philosophen und Mathematikers René DESCARTES (1596–1650). Siehe auch »Zur Geschichte des Koordinatensystems« Seite 96ff.
τὸ σύστημα (tò sýstema) = Zusammenstellung, Gebilde

man durch den Punkt a auf der x-Achse und den Punkt b auf der y-Achse die Parallele zur jeweils anderen Achse zieht. a ist die **x-Koordinate** bzw. **Abszisse**, b die **y-Koordinate** bzw. **Ordinate*** des Schnittpunktes P. Diesen Zusammenhang zwischen dem Punkt und seinen Koordinaten bringt man durch die Schreibweise $P(a|b)$ zum Ausdruck.
Es liegt nun nahe, die von einer Funktion f erzeugten Zahlenpaare als Koordinaten von Punkten zu deuten. Dem Paar $(x|y)$ mit $y = f(x)$ wird damit in der Koordinatenebene der Punkt $(x|y)$ zugeordnet. Da zu jedem $x \in D$ genau ein Funktionswert y existiert, entspricht ihm auch genau ein Punkt. Die Menge aller Punkte, die auf diese Weise einer Funktion zugeordnet werden, heißt **Graph**** der Funktion; man bezeichnet ihn mit G oder auch G_f.

Abb. 93.1 René DESCARTES, latinisiert CARTESIUS (31.3.1596 La Haye bis 11.2.1650 Stockholm)***

Definition 93.1: Der **Graph G** einer Funktion f ist die Menge aller Punkte $(x|y)$ der Koordinatenebene, deren Koordinaten die Bedingungen $x \in D$ und $y = f(x)$ erfüllen; kurz:

$$G = \{(x|y) \mid x \in D \quad \text{und} \quad y = f(x)\}.$$

Der Graph einer Funktion wird oft auch als **Schaubild** bezeichnet. Wir wollen nun die Schaubilder der in den Beispielen von **5.1** besprochenen Funktionen zeichnen.

Zu Beispiel 1: Der Graph besteht aus den sechs Punkten $(1|1)$, $(2|-2)$, $(3|3)$, $(4|-4)$, $(5|5)$ und $(6|-6)$; vgl. Abbildung 93.2.

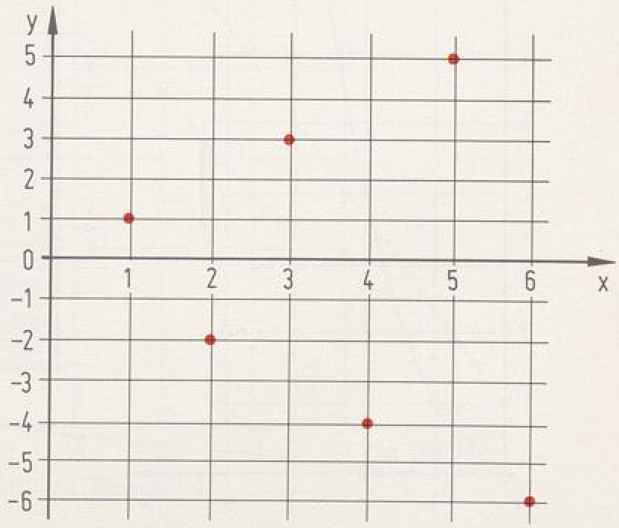

Abb. 93.2 Graph zu Beispiel 1

* abscissa (lat.) = die Abgeschnittene; ordinata (lat.) = die Geordnete (vgl. Seite 98)
** γράφειν (gráphein) = schreiben, zeichnen
*** gezeichnet von dem Mathematiker Frans VAN SCHOOTEN dem Jüngeren (um 1615–1660)

Zu Beispiel 2: Wir zeichnen den Graphen für $1 \leqq x \leqq 11$ (Abbildung 94.1). Die Zeichnung lässt gut erkennen, dass beim Übergang zu einem größeren x-Wert der Funktionswert y entweder gleich bleibt oder zunimmt. Dazu eine interessante Frage: Hört das Zunehmen einmal auf, d.h., liegen die Punkte von einem gewissen x-Wert ab alle in gleicher Höhe, oder trifft dies nicht zu? Mit anderen Worten: Gibt es endlich viele oder unendlich viele Primzahlen? Die richtige Antwort kannst du anhand der Aufgabe 103/**15** finden.

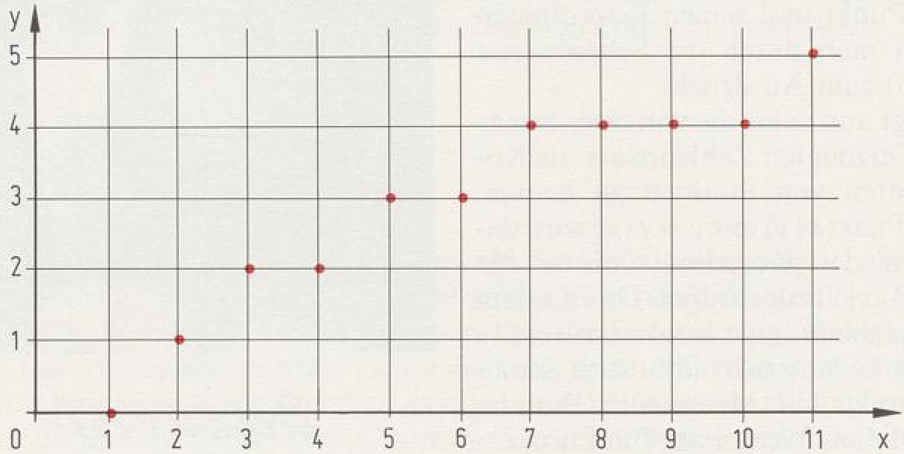

Abb. 94.1 Graph zu Beispiel 2

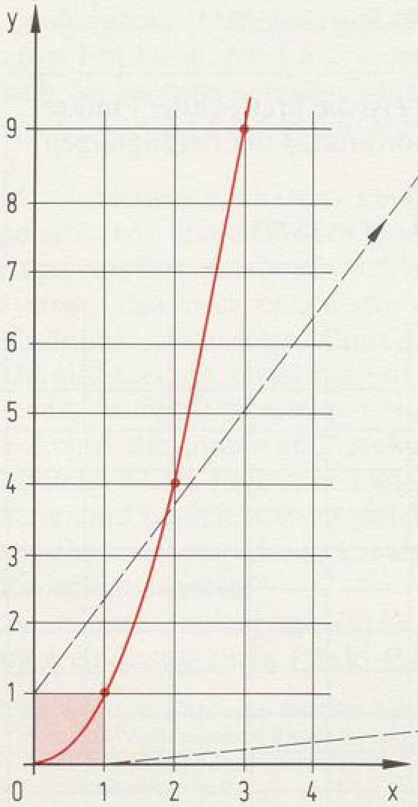

Abb. 94.2 $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{Q}^+$

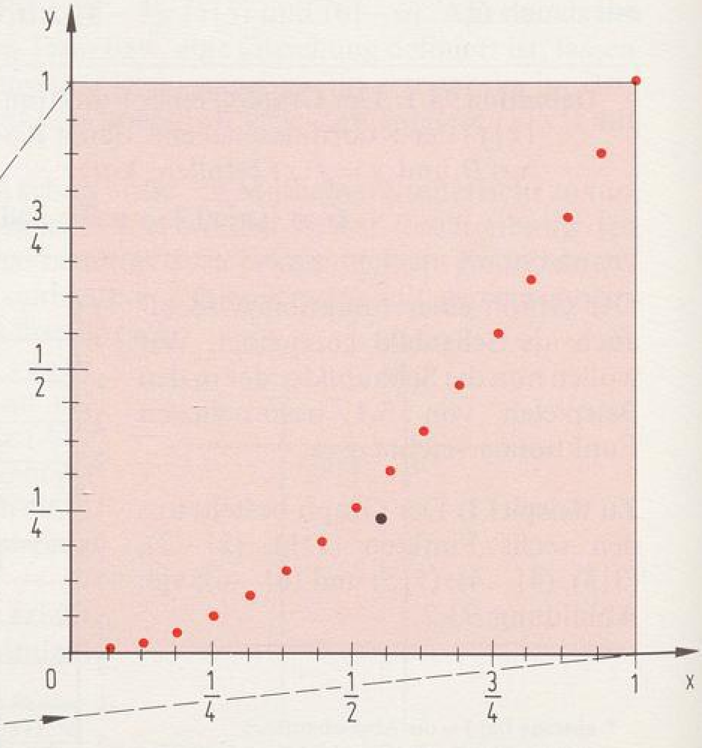

Abb. 94.3 Ausschnittvergrößerung zu Abbildung 94.2

Zu Beispiel 3: Hier wird man zuerst die Punkte (1|1), (2|4), (3|9), (4|16), … berechnen und, soweit der verfügbare Platz es zulässt, in das Koordinatensystem einzeichnen (Abbildung 94.2). Aber natürlich gibt es zwischen je zwei von ihnen schon unendlich viele Zwischenpunkte, z. B. zwischen (1|1) und (2|4) die Punkte mit den x-Werten $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{15}{8}$; $\frac{17}{16}$, $\frac{19}{16}$, … Auch links von $x = 1$ gibt es noch Punkte des Graphen. Abbildung 94.3 zeigt in 8-facher Vergrößerung einen Ausschnitt aus Abbildung 94.2 mit den zu den x-Werten $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$, …, $\frac{15}{16}$ und 1 gehörenden Punkten.
Natürlich muss man mit dem Berechnen und Einzeichnen von Zwischenpunkten bald aufhören; es sind ja unendlich viele. Offensichtlich liegen alle Punkte des Graphen auf einer gekrümmten Linie. In solchen Fällen berechnet und zeichnet man eine passende Anzahl von Punkten und verbindet sie dann freihändig oder mit einem Kurvenlineal durch eine möglichst glatte Linie (Abbildung 94.2).

Zu Beispiel 4: Die dick eingezeichneten Punkte in Abbildung 95.1 ergeben sich aus den Tabellenwerten auf Seite 86. Beachte, dass bei einer Funktion die Variablen nicht immer x und y heißen müssen. In diesem Beispiel haben wir die unabhängige Variable mit t (Zeitpunkt in h), die abhängige mit ϑ (Temperatur in °C) bezeichnet und dementsprechend den Graphen in einem (t, ϑ)-Koordinatensystem gezeichnet.
Die Funktion, welche jedem Zeitpunkt seine Temperatur zuordnet, hat als Graphen wieder eine zusammenhängende Linie. Solche Temperaturkurven kann man mit so genannten Thermographen* aufzeichnen (Abbildung 96.1). Kennt man jedoch, wie in unserem Beispiel, nur wenige Punkte der Kurve, möchte aber ihren Verlauf wenigstens grob darstellen, so verbindet man einfach benachbarte Punkte geradlinig. Auf diese Weise entstehen auch die so genannten Fieberkurven (vgl. Aufgabe 101/**8**).

Abb. 95.1 Graph zu Beispiel 4

* Thermograph = Temperaturschreiber; von θερμός (thermós) = *warm, heiß*

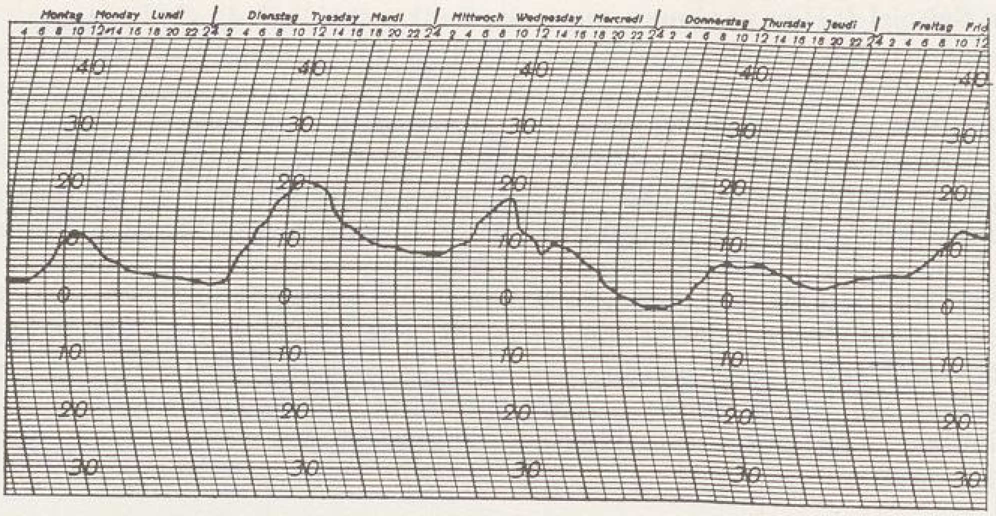

Abb. 96.1 Aufzeichnung des Temperaturverlaufs durch einen Thermographen. Die Schreibspitze befindet sich am Ende eines Hebels, der sich bei Temperaturänderung um einen festen Punkt dreht. Auf ebener Fläche würde die Spitze dabei Kreisbögen beschreiben. Da das Koordinatenpapier aber auf einen Zylinder gespannt ist, handelt es sich bei den Ordinatenlinien (t konstant und $-35\,°\mathrm{C} \leqq \vartheta \leqq 45\,°\mathrm{C}$) um kompliziertere Kurven, die als Schnittlinien der Zylinderfläche mit einer Kugel entstehen.

Auch bei einer Relation zwischen zwei Zahlenmengen werden Zahlenpaare erzeugt. Die Menge der ihnen in einem Koordinatensystem entsprechenden Punkte heißt dann Graph der Relation. Im Unterschied zu einem Funktionsgraphen können beim Graphen einer Relation auch mehrere Punkte mit derselben x-Koordinate auftreten. Abbildung 97.1 zeigt den Graphen der Relation von Beispiel 6 aus Abschnitt **5.1** für den Bereich $1 \leqq x \leqq 10$.

**Zur Geschichte des Koordinatensystems

Die Idee, Punkte und Linien mithilfe von Gitternetzen festzulegen, hatten bereits die Ägypter, wie uns Funde aus der Zeit um 2800 v. Chr. bezeugen. Griechische Astronomen und Geographen orteten Punkte am Himmel und auf der Erde mittels Gradnetzen, wie wir es auch heute noch machen. Vergleiche dazu das Bild auf Seite 121. Bereits HIPPARCHOS aus Nicäa (um 190 – um 125 v. Chr.) benützte die dir von jedem Atlas her vertrauten Begriffe: Als *Länge** bezeichnete man die Ausdehnung der damals bekannten Welt von Ost nach West entlang des Mittelmeers, als *Breite*** die Ausdehnung von Nord nach Süd. Die Kunst der Landvermessung erreichte ihren Höhepunkt in der Antike bei den Römern, die ihrer Stadtplanung mit dem meist von Ost nach West laufenden *decumanus* und dem dazu senkrechten *cardo* als Hauptstraßen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legten.
Erstaunlicherweise findet sich in der antiken Mathematik kaum ein Niederschlag dieser Gedankengänge. Zur Weiterentwicklung bedurfte es eines neuen Anstoßes. Dieser kam aus der Naturphilosophie, als sich NIKOLAUS VON ORESME (1320/25 – 1382) fragte,

* τὸ μῆκος (to mêkos) = longitudo (lat.) = die Länge
** τὸ πλάτος (to plátos) = latitudo (lat.) = die Breite

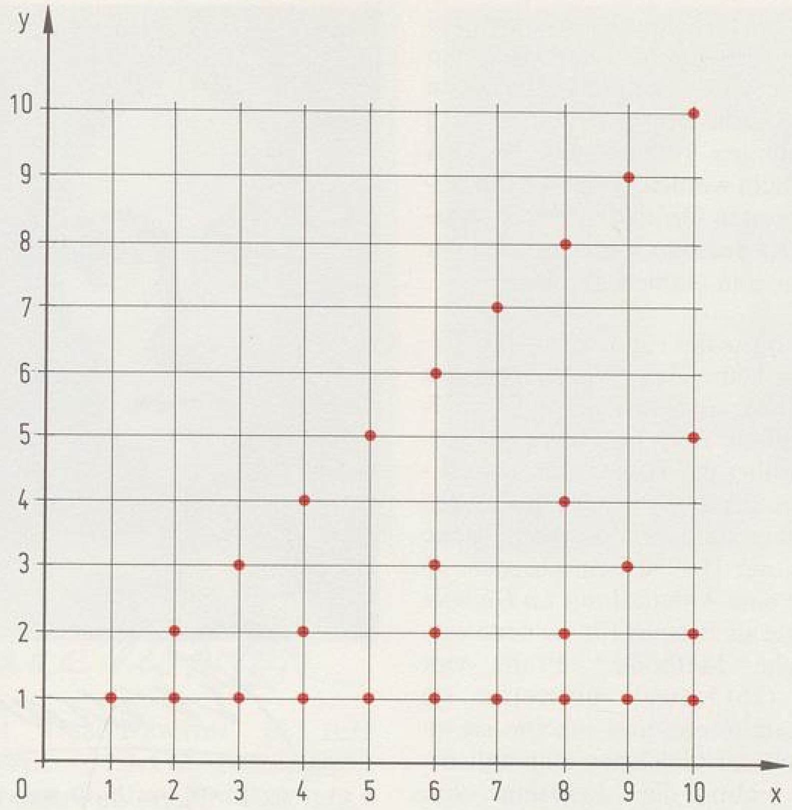

Abb. 97.1 Graph der Relation von Beispiel 6

wie die Veränderungen in der Natur vor sich gingen. »Da [diese]«, so beginnt sein um 1350 entstandener *tractus de latitudinibus formarum**, »vielfältig variieren und diese Vielfalt nur mit größter Schwierigkeit erkannt werden kann, es sei denn, man übertrage sie auf eine Betrachtung durch geometrische Figuren«**, veranschaulichte er sie, indem er über einer Zeitachse als »Länge« die jeweilige Stärke einer Erscheinung als »Breite« auftrug. Damit war gewissermaßen die Idee der Funktion und ihrer graphischen Darstellung in einem Koordinatensystem geboren. Seine Abhandlung – siehe die Abbildung auf Seite 84 – wurde an den Universitäten gelehrt, 130 Jahre später mehrmals gedruckt und beeinflusste noch Galileo GALILEI (1564–1642) und Johannes KEPLER (1571–1630).

Wie so oft, wenn eine Zeit reif ist für eine neue Entdeckung, haben mehrere fast gleichzeitig daran gearbeitet. Pierre de FERMAT (1601–1665) vollendete spätestens 1636 seine Schrift *Ad locos planos et solidos isagoge* – »Einführung in die ebenen und räumlichen Örter«***. Dort schreibt er:

* wörtlich: Abhandlung über die Breiten der Formen – sinngemäß: Abhandlung über die Intensitäten der Variablen

** Quia formarum latitudines multipliciter variantur et multiplicitas difficillime discernitur nisi ad figuras geometricas consideratio referatur

*** Gemeint sind Gerade und Kreis als loci plani und die Kegelschnitte als loci solidi. Die lateinischen Termini sind Übersetzungen der von PAPPOS von Alexandria (300 n. Chr.) eingeführten Ausdrücke *τόποι ἐπίπεδοι* (tópoi epípedoi) und *τόποι στερεοί* (tópoi stereói). *Στερεός* bedeutet eigentlich *fest*, *hart*, *starr*.

»Sobald in einer Schlussgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine [...] Linie. [...] Die Gleichungen können aber bequem versinnbildlicht werden, wenn wir die beiden unbekannten Größen in einem gegebenen Winkel aneinander setzen, den wir meist als rechten wählen, [...]«

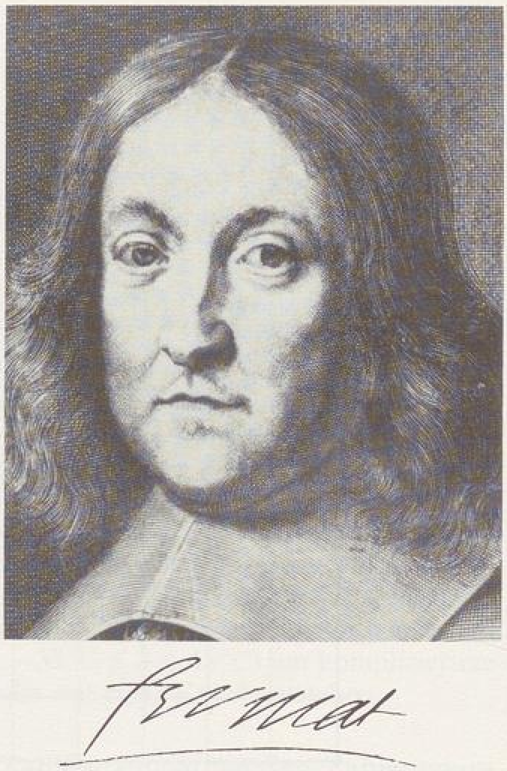

Abb. 98.1 Pierre de FERMAT (17.(?)8.1601 Beaumont de Lomagne/Montauban – 12.1.1665 Castres [Toulouse])

Aber leider hatte der viel beschäftigte Jurist FERMAT keine Zeit, seine Arbeit zu veröffentlichen; erst sein Sohn Samuel-Clément gab sie 1679 im Druck heraus. Und so gebührt der Ruhm, das Koordinatensystem geschaffen zu haben, dem Mathematiker und Philosophen René DESCARTES, der 1637 seinem *Discours de la Méthode* eine Abhandlung *La Géométrie* anhängte als Beispiel für die neue wissenschaftliche Methode.* Frans VAN SCHOOTEN (1615–1660) übersetzte sie 1649 ins Lateinische und machte sie so erst der Welt der Gelehrten zugänglich!
Was war nun die Leistung von DESCARTES? Er verband die Geometrie der Griechen mit der Algebra VIÈTES zu etwas Neuem: Um die Gleichung $y = f(x)$ einer Kurve zu finden, wählte er eine beliebige Gerade a, die »Achse«, auf ihr einen Punkt A und zog dann – meist rechtwinklig zu a – eine Parallelenschar (Abbildung 99.3). Diese parallelen Geraden hatte APOLLONIOS von Perge (etwa 262–190 v. Chr.) eingeführt; er nannte sie *τεταγμένως κατηγμέναι* (tetagménos kategménai), was etwas ungenau mit *ordinatim applicatae* (*lineae*) ins Lateinische übersetzt wurde** und wofür DESCARTES *appliquées par ordre* sagte, zu deutsch *geordnet gezogene* (*Linien*). Darüber hinaus bezeichnete er mit diesem Ausdruck auch die auf einer solchen Linie zwischen einem Kurvenpunkt P und der Achse liegende Strecke, die er mit y abkürzte. Der aus dem Baskischen stammende Pierre HÉRIGONE († um 1643 Paris) prägte dafür in seinem *Cursus mathematicus* (1634/42) das Fachwort **ordinata**. Die Parallele schneidet auf der Achse eine von A aus gemessene Strecke ab, die DESCARTES mit x bezeichnete. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) nannte sie 1676 **abscissa** = *die Abgeschnittene*, x und y zusammen 1692 **coordinates**. Als Fremdwörter Abszisse, Ordinate und Koordinaten gingen sie ins Deutsche ein. – DESCARTES' großes Verdienst war es, gezeigt zu haben, dass man Kurven durch eine Gleichung zwischen dem Abszissenwert x und dem Ordinatenwert

* Wegen der 1633 erfolgten Verurteilung GALILEIS durch das Heilige Offizium ließ DESCARTES sein Werk nur anonym im protestantischen Leiden (Niederlande) drucken. Nach seinem Tode wurde es auf den päpstlichen Index der verbotenen Bücher gesetzt. Der volle Titel lautet *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* – »Abhandlung über die Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Naturwissenschaften zu suchen«.

** korrekt wäre *ordinate* = *regelmäßig geordnet*; denn *ordinatim* bedeutet *der Reihe nach*. (Apolloniosübersetzung von 1566 des Federigo COMMANDINO [1509–1575]).

1689

Abb. 99.1 Isaac NEWTON (4.1.1643 Woolsthorpe – 31.3.1727 Kensington), Gemälde von Godfrey KNELLER

1703

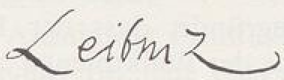

Abb. 99.2 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1.7.1646 Leipzig – 14.11.1716 Hannover), Gemälde von Andreas SCHEITS

y beschreiben kann. Ein Koordinatensystem mit zwei Achsen findet man aber noch nicht bei ihm. 1679 erkannte zunächst Philippe DE LA HIRE (1640–1718), dass Abszisse und Ordinate gleichwertig sind. Wenngleich sich bereits bei Pierre de FERMAT (1601–1665) Andeutungen von negativen Werten für die Koordinaten finden, so war es dem großen Isaac NEWTON (1643–1727) vorbehalten, mit dem Tabu negativer Koordinaten endgültig zu brechen, und zwar in seiner 1668/69 niedergeschriebenen *Enumeratio linearum tertii ordinis*, die 1704 als Anhang zu seinem großen Werk *Opticks* erschien. Dort gibt es dann auch die zwei Achsen. Gleichwertig in unserem Sinne werden sie aber erst im *Cours de Mathématiques* (Bd. 4; 1798/99) von Sylvester François LACROIX (1765–1843).

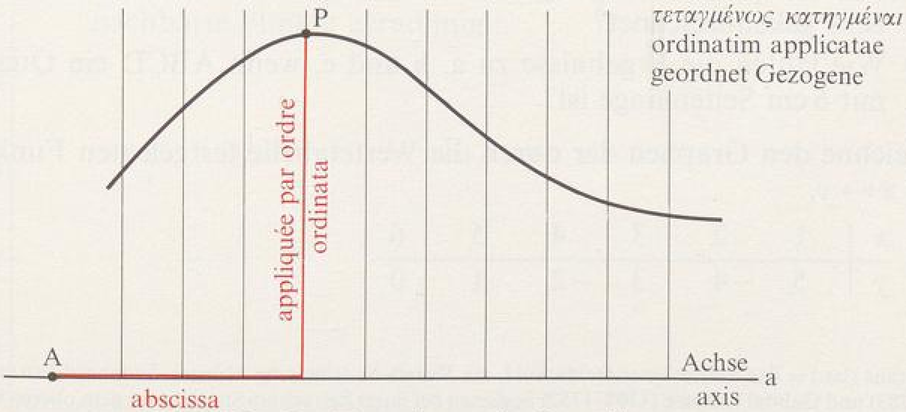

Abb. 99.3 Zur Entstehung des Koordinatensystems

Aufgaben

1. Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm folgende Punkte ein:

a) A(4|0) **b)** B(−4|0) **c)** C(0|−3) **d)** D(0|3) **e)** E(3|3)
f) F(−3|−3) **g)** G(−2,5|3) **h)** H(2,5|−3) **i)** I(−4|−2) **k)** K(−2|−4)

2. Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Menge aller Punkte $P(x|y)$ mit

a) $1 \leqq x \leqq 5$ und $y = 0$
b) $x = 3{,}2$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$
c) $1 \leqq x \leqq 5$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$
d) $-3 < x < -1$ und $-4 < y < 2$
e) $x \geqq 2$ und $y = -1$
f) $x = -1{,}8$ und $y \leqq 4{,}5$
g) $x \geqq 2$ und $y \geqq -1$
h) $x > -1{,}8$ und $y < 4{,}5$.

3. Die beiden Koordinatenachsen zerschneiden die Ebene in vier **Quadranten*** (Abbildung 100.1).

a) Begründe, dass der 1. Quadrant aus der Punktmenge
$M_1 = \{(x|y) \mid x > 0 \wedge y > 0\}$
besteht.

b) Gib die entsprechende Beschreibung für die Punktmengen M_2, M_3 und M_4 der übrigen Quadranten an.

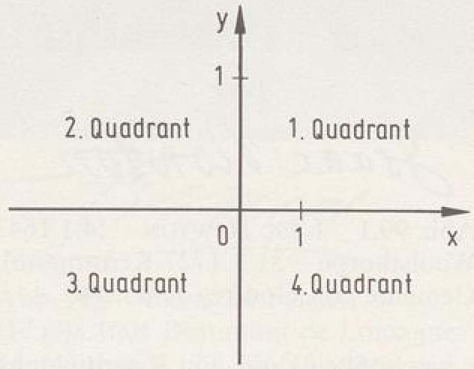

Abb. 100.1 Quadranteneinteilung

4. Zeichne in ein Koordinatensystem ein Rechteck ABCD von 5 cm Breite und 3 cm Höhe so ein, dass die Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und A(−2|−1) die linke untere Ecke ist.

a) Welche Koordinaten haben die Ecken B, C, D?

b) Gib die Bedingungen an, denen die Koordinaten der auf den einzelnen Seiten liegenden Punkte genügen.

c) Durch welche Bedingungen werden die Punkte im Innern des Rechtecks gekennzeichnet?

d) Wie lauten die Ergebnisse zu **a**, **b** und **c**, wenn ABCD ein Quadrat mit 6 cm Seitenlänge ist?

Zeichne den Graphen der durch die Wertetabelle festgelegten Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	−4	3	−2	1	0

* quadrans (lat.) = das Viertel einer Geldschuld, ein Viertel-As (römische Münze). Leonhard Euler (1707 bis 1783) und Gabriel Cramer (1704–1752) beginnen bei ihren Betrachtungen stets mit dem oberen rechten Quadranten.

b)

x	-3	-2	$-0{,}5$	0	$1{,}5$	2	4
y	3	1	-2	-3	0	1	5

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	0	-1

d)

x	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

6. Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen im Bereich $|x| \leqq 5$.

a) $f\colon x \mapsto |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

b) $f\colon x \mapsto 2 - |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

c) $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{5}, \quad D = \mathbb{Z}$

d) $f\colon x \mapsto -\dfrac{(x-2)^2}{10}, \quad D = \mathbb{Z}$

e) $f\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{|x|+1}, D = \mathbb{Z}$

f) $f\colon x \mapsto (-1)^{1+|x|} \cdot \dfrac{2x}{1+|x|}, D = \mathbb{Z}$

7. Jeder natürlichen Zahl n im Bereich $2 \leqq n \leqq 10$ werde

a) der größte Primfaktor,

b) die Anzahl der Primfaktoren

ihrer Primfaktorzerlegung zugeordnet. Zeichne für jede dieser beiden Funktionen den Graphen (Einheit 1 cm).

8. Im Krankenhaus wurden bei einem Patienten an fünf aufeinander folgenden Tagen jeweils um 6^{h} und um 18^{h} folgende Körpertemperaturen gemessen:

Zeitpunkt	1. Tag		2. Tag		3. Tag		4. Tag		5. Tag	
	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}
Temperatur in °C	38,7	39,5	39,3	39,8	38,9	39,2	38,1	38,0	37,2	37,4

Zeichne die Fieberkurve. Stelle dazu auf der Zeitachse je 12 h durch eine 1 cm lange Strecke dar. Zeichne von der Temperaturskala nur den Bereich von 36 °C bis 40 °C (Abbildung 101.1) und wähle dabei für 1 °C eine Strecke von 2 cm Länge. Verbinde benachbarte Punkte geradlinig.

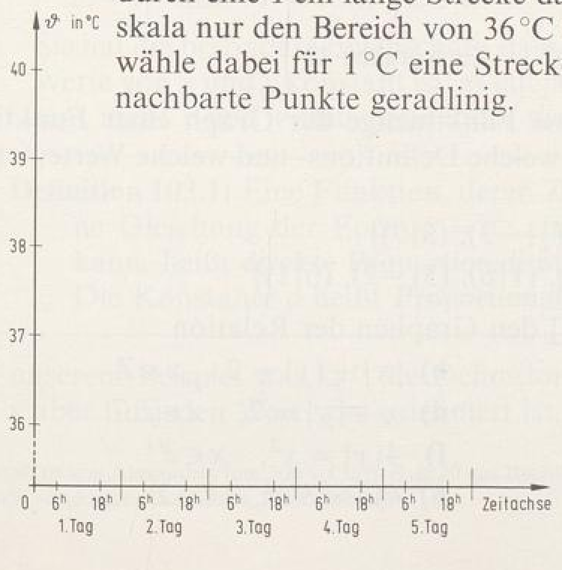

Abb. 101.1 Zu Aufgabe **8**

•9. Die folgenden Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{Q}$ sind durch ihre Funktionsgleichung $y = f(x)$ definiert. Berechne für $x \in \{-3; -2; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 2; 3; 5\}$ die Funktionswerte und skizziere den Graphen im Intervall $[-3; 5]$.

a) $y = \dfrac{10}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$

10. Zeichne das Schaubild der Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = \text{ggT}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$
b) $y = \text{kgV}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$
c) $y = \text{ggT}(x; x+2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$
d) $y = \text{kgV}(x; 2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$

11. Begründe folgende Aussagen:

a) Auf einer zur y-Achse parallelen Geraden liegt immer nur höchstens ein Punkt des Graphen einer Funktion.

b) Auf einer Parallelen zur x-Achse können mehrere Punkte des Graphen einer Funktion liegen.

12. Welche der in Abbildung 102.1 gezeigten Kurven **a** bis **h** können als Graphen von Funktionen $f\colon x \mapsto y$ aufgefasst werden? Begründung!

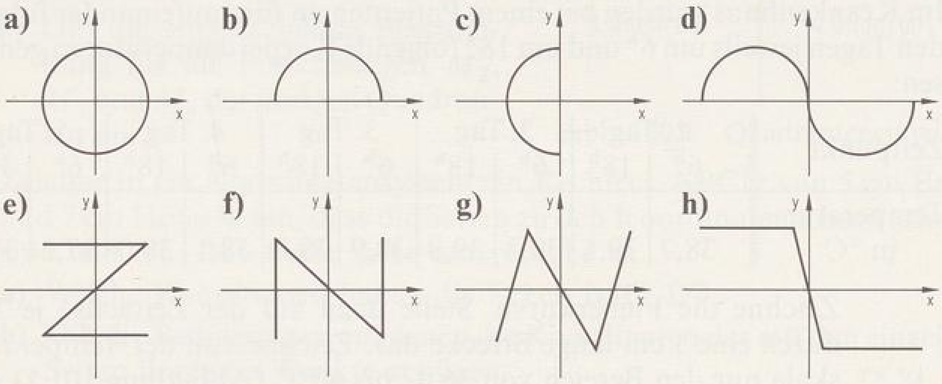

Abb. 102.1 Zu Aufgabe **12**

13. Stelle fest, ob die angegebene Punktmenge der Graph einer Funktion $f\colon x \mapsto y$ sein kann. Wenn ja, welche Definitions- und welche Wertemenge hat die Funktion?

a) $\{(-2|0), (-1|7), (0|0), (\tfrac{1}{2}|-3), (5|7)\}$
b) $\{(8|-4), (3|0), (-2|-2), (1|6), (3|-2), (6|1)\}$

•14. Zeichne im Intervall $[-4; 4]$ den Graphen der Relation

a) $|y| = |x|, \quad x \in \mathbb{Z}$ **b)** $|x| + |y| = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$
c) $|x| + y = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **d)** $x + |y| = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$
e) $4y = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **f)** $4|y| = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$
g) $y^2 = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **h)** $4y^2 = 9x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$.

•**15.** Die Frage, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt, wurde schon von dem berühmten griechischen Mathematiker EUKLID* im IX. Buch seiner *Elemente* behandelt. Du kannst seine Überlegungen in den folgenden Schritten nachvollziehen:
Man geht aus von der Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_n$.
Aus ihnen denkt man sich die Zahl $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ gebildet.

a) Zeige: Wenn z eine Primzahl ist, dann handelt es sich bei ihr um eine neue, d.h. von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.

b) Falls z keine Primzahl ist, gilt: In der Primfaktorzerlegung von z kommt keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor. Weise zur Begründung nach, dass z durch keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar ist.

c) Erkläre nun, warum die anfangs gemachte Annahme falsch ist.

5.3 Die direkte Proportionalität

Im Mathematikunterricht hast du bereits direkt proportionale Größen kennen gelernt. Zur Wiederholung betrachten wir folgendes

Beispiel:

Inge lässt Wasser in die Badewanne laufen. Der voll aufgedrehte Hahn liefert in 1 Minute 15 Liter Wasser. Inge überlegt, wie viel Wasser in 2 Minuten, 3 Minuten, ..., 10 Minuten in die Wanne läuft.
Da der Hahn in *jeder* Minute 15 l Wasser liefert, muss man lediglich 15 l mit der Zahl der Minuten multiplizieren, um die in dieser Zeit in die Wanne fließende Wassermenge zu erhalten. Bezeichnet man die Zeit mit x Minuten und die Wassermenge mit y l, so gilt $y = 15 \cdot x$.
Da so jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet ist, handelt es sich hier um eine Funktion, nämlich

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 15x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Sie hat die besondere Eigenschaft, dass der *Quotient* zusammengehöriger Werte von x und y konstant ist; es gilt ja $y : x = 15$. In einem solchen Fall sagt man: x und y sind zueinander *direkt proportional*.

Definition 103.1: Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **direkte Proportionalität**.
Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

In unserem Beispiel war $\mathbb{Q}^+$ die Definitionsmenge. Da der Funktionsterm $a \cdot x$ aber für jeden Wert von x definiert ist, kann man als Definitionsmenge

* EUKLID von Alexandria (um 300 v. Chr.); Satz 20 aus Buch IX der *Elemente*: »Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.«