Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

Aufgaben

1. Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm folgende Punkte ein:

a) A(4|0) **b)** B(−4|0) **c)** C(0|−3) **d)** D(0|3) **e)** E(3|3)
f) F(−3|−3) **g)** G(−2,5|3) **h)** H(2,5|−3) **i)** I(−4|−2) **k)** K(−2|−4)

2. Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Menge aller Punkte $P(x|y)$ mit

a) $1 \leqq x \leqq 5$ und $y = 0$ **b)** $x = 3{,}2$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$
c) $1 \leqq x \leqq 5$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$ **d)** $-3 < x < -1$ und $-4 < y < 2$
e) $x \geqq 2$ und $y = -1$ **f)** $x = -1{,}8$ und $y \leqq 4{,}5$
g) $x \geqq 2$ und $y \geqq -1$ **h)** $x > -1{,}8$ und $y < 4{,}5$.

3. Die beiden Koordinatenachsen zerschneiden die Ebene in vier **Quadranten*** (Abbildung 100.1).

a) Begründe, dass der 1. Quadrant aus der Punktmenge $M_1 = \{(x|y) \mid x > 0 \wedge y > 0\}$ besteht.

b) Gib die entsprechende Beschreibung für die Punktmengen M_2, M_3 und M_4 der übrigen Quadranten an.

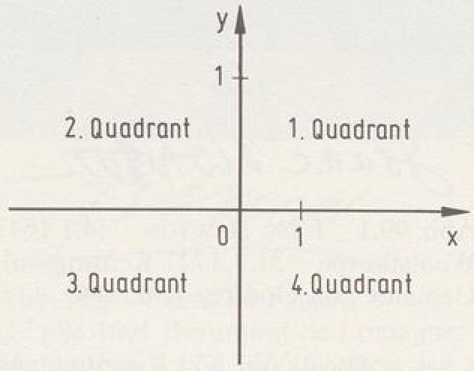

Abb. 100.1 Quadranteneinteilung

4. Zeichne in ein Koordinatensystem ein Rechteck ABCD von 5 cm Breite und 3 cm Höhe so ein, dass die Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und A(−2|−1) die linke untere Ecke ist.

a) Welche Koordinaten haben die Ecken B, C, D?

b) Gib die Bedingungen an, denen die Koordinaten der auf den einzelnen Seiten liegenden Punkte genügen.

c) Durch welche Bedingungen werden die Punkte im Innern des Rechtecks gekennzeichnet?

d) Wie lauten die Ergebnisse zu **a**, **b** und **c**, wenn ABCD ein Quadrat mit 6 cm Seitenlänge ist?

Zeichne den Graphen der durch die Wertetabelle festgelegten Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	−4	3	−2	1	0

* quadrans (lat.) = das Viertel einer Geldschuld, ein Viertel-As (römische Münze). Leonhard EULER (1707 bis 1783) und Gabriel CRAMER (1704–1752) beginnen bei ihren Betrachtungen stets mit dem oberen rechten Quadranten.

b)

x	-3	-2	$-0{,}5$	0	$1{,}5$	2	4
y	3	1	-2	-3	0	1	5

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	0	-1

d)

x	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

6. Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen im Bereich $|x| \leqq 5$.

a) $f\colon x \mapsto |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

b) $f\colon x \mapsto 2 - |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

c) $f\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{5}, \quad D = \mathbb{Z}$

d) $f\colon x \mapsto -\dfrac{(x-2)^2}{10}, \quad D = \mathbb{Z}$

e) $f\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{|x|+1}, \; D = \mathbb{Z}$

f) $f\colon x \mapsto (-1)^{1+|x|} \cdot \dfrac{2x}{1+|x|}, \; D = \mathbb{Z}$

7. Jeder natürlichen Zahl n im Bereich $2 \leqq n \leqq 10$ werde

a) der größte Primfaktor, **b)** die Anzahl der Primfaktoren

ihrer Primfaktorzerlegung zugeordnet. Zeichne für jede dieser beiden Funktionen den Graphen (Einheit 1 cm).

8. Im Krankenhaus wurden bei einem Patienten an fünf aufeinander folgenden Tagen jeweils um 6^{h} und um 18^{h} folgende Körpertemperaturen gemessen:

Zeitpunkt	1. Tag		2. Tag		3. Tag		4. Tag		5. Tag	
	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}	6^{h}	18^{h}
Temperatur in °C	38,7	39,5	39,3	39,8	38,9	39,2	38,1	38,0	37,2	37,4

Zeichne die Fieberkurve. Stelle dazu auf der Zeitachse je 12 h durch eine 1 cm lange Strecke dar. Zeichne von der Temperaturskala nur den Bereich von 36 °C bis 40 °C (Abbildung 101.1) und wähle dabei für 1 °C eine Strecke von 2 cm Länge. Verbinde benachbarte Punkte geradlinig.

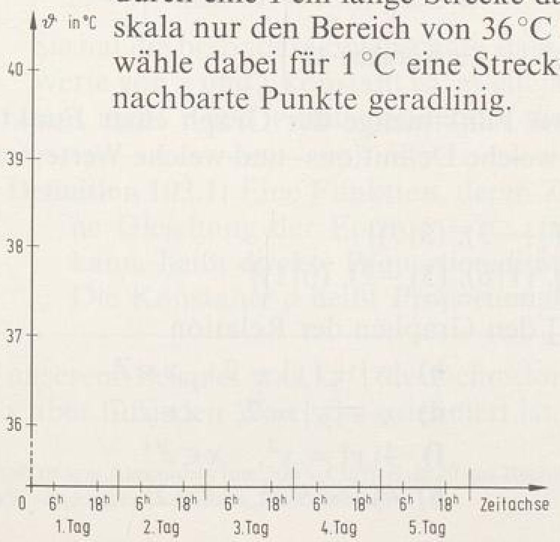

Abb. 101.1 Zu Aufgabe **8**

•**9.** Die folgenden Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{Q}$ sind durch ihre Funktionsgleichung $y = f(x)$ definiert. Berechne für $x \in \{-3; -2; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 2; 3; 5\}$ die Funktionswerte und skizziere den Graphen im Intervall $[-3; 5]$.

a) $y = \dfrac{10}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$

10. Zeichne das Schaubild der Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = \operatorname{ggT}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$
b) $y = \operatorname{kgV}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$
c) $y = \operatorname{ggT}(x; x+2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$
d) $y = \operatorname{kgV}(x; 2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$

11. Begründe folgende Aussagen:

a) Auf einer zur y-Achse parallelen Geraden liegt immer nur höchstens ein Punkt des Graphen einer Funktion.

b) Auf einer Parallelen zur x-Achse können mehrere Punkte des Graphen einer Funktion liegen.

12. Welche der in Abbildung 102.1 gezeigten Kurven **a** bis **h** können als Graphen von Funktionen $f\colon x \mapsto y$ aufgefasst werden? Begründung!

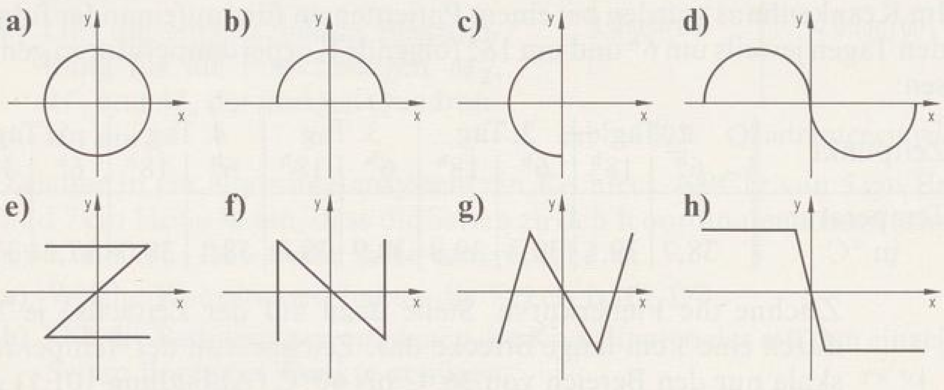

Abb. 102.1 Zu Aufgabe **12**

13. Stelle fest, ob die angegebene Punktmenge der Graph einer Funktion $f\colon x \mapsto y$ sein kann. Wenn ja, welche Definitions- und welche Wertemenge hat die Funktion?

a) $\{(-2|0), (-1|7), (0|0), (\tfrac{1}{2}|-3), (5|7)\}$
b) $\{(8|-4), (3|0), (-2|-2), (1|6), (3|-2), (6|1)\}$

•**14.** Zeichne im Intervall $[-4; 4]$ den Graphen der Relation

a) $|y| = |x|, \quad x \in \mathbb{Z}$ **b)** $|x| + |y| = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$
c) $|x| + y = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **d)** $x + |y| = 2, \quad x \in \mathbb{Z}$
e) $4y = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **f)** $4|y| = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$
g) $y^2 = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$ **h)** $4y^2 = 9x^2, \quad x \in \mathbb{Z}$.

•**15.** Die Frage, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt, wurde schon von dem berühmten griechischen Mathematiker EUKLID* im IX. Buch seiner *Elemente* behandelt. Du kannst seine Überlegungen in den folgenden Schritten nachvollziehen:
Man geht aus von der Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_n$.
Aus ihnen denkt man sich die Zahl $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ gebildet.

a) Zeige: Wenn z eine Primzahl ist, dann handelt es sich bei ihr um eine neue, d.h. von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.

b) Falls z keine Primzahl ist, gilt: In der Primfaktorzerlegung von z kommt keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor. Weise zur Begründung nach, dass z durch keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar ist.

c) Erkläre nun, warum die anfangs gemachte Annahme falsch ist.

5.3 Die direkte Proportionalität

Im Mathematikunterricht hast du bereits direkt proportionale Größen kennen gelernt. Zur Wiederholung betrachten wir folgendes

Beispiel:

Inge lässt Wasser in die Badewanne laufen. Der voll aufgedrehte Hahn liefert in 1 Minute 15 Liter Wasser. Inge überlegt, wie viel Wasser in 2 Minuten, 3 Minuten, …, 10 Minuten in die Wanne läuft.
Da der Hahn in *jeder* Minute 15 l Wasser liefert, muss man lediglich 15 l mit der Zahl der Minuten multiplizieren, um die in dieser Zeit in die Wanne fließende Wassermenge zu erhalten. Bezeichnet man die Zeit mit x Minuten und die Wassermenge mit y l, so gilt $y = 15 \cdot x$.
Da so jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet ist, handelt es sich hier um eine Funktion, nämlich

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 15x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Sie hat die besondere Eigenschaft, dass der *Quotient* zusammengehöriger Werte von x und y konstant ist; es gilt ja $y : x = 15$. In einem solchen Fall sagt man: x und y sind zueinander *direkt proportional*.

Definition 103.1: Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **direkte Proportionalität**.
Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

In unserem Beispiel war $\mathbb{Q}^+$ die Definitionsmenge. Da der Funktionsterm $a \cdot x$ aber für jeden Wert von x definiert ist, kann man als Definitionsmenge

* EUKLID von Alexandria (um 300 v. Chr.); Satz 20 aus Buch IX der *Elemente*: »Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.«