Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

5.3 Die direkte Proportionalität

•**15.** Die Frage, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt, wurde schon von dem berühmten griechischen Mathematiker EUKLID* im IX. Buch seiner *Elemente* behandelt. Du kannst seine Überlegungen in den folgenden Schritten nachvollziehen:
Man geht aus von der Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_n$.
Aus ihnen denkt man sich die Zahl $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ gebildet.

a) Zeige: Wenn z eine Primzahl ist, dann handelt es sich bei ihr um eine neue, d.h. von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.

b) Falls z keine Primzahl ist, gilt: In der Primfaktorzerlegung von z kommt keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor. Weise zur Begründung nach, dass z durch keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar ist.

c) Erkläre nun, warum die anfangs gemachte Annahme falsch ist.

5.3 Die direkte Proportionalität

Im Mathematikunterricht hast du bereits direkt proportionale Größen kennen gelernt. Zur Wiederholung betrachten wir folgendes

Beispiel:

Inge lässt Wasser in die Badewanne laufen. Der voll aufgedrehte Hahn liefert in 1 Minute 15 Liter Wasser. Inge überlegt, wie viel Wasser in 2 Minuten, 3 Minuten, …, 10 Minuten in die Wanne läuft.
Da der Hahn in *jeder* Minute 15 l Wasser liefert, muss man lediglich 15 l mit der Zahl der Minuten multiplizieren, um die in dieser Zeit in die Wanne fließende Wassermenge zu erhalten. Bezeichnet man die Zeit mit x Minuten und die Wassermenge mit y l, so gilt $y = 15 \cdot x$.
Da so jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet ist, handelt es sich hier um eine Funktion, nämlich

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 15x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Sie hat die besondere Eigenschaft, dass der *Quotient* zusammengehöriger Werte von x und y konstant ist; es gilt ja $y : x = 15$. In einem solchen Fall sagt man: x und y sind zueinander *direkt proportional*.

> **Definition 103.1:** Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **direkte Proportionalität**.
> Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

In unserem Beispiel war $\mathbb{Q}^+$ die Definitionsmenge. Da der Funktionsterm $a \cdot x$ aber für jeden Wert von x definiert ist, kann man als Definitionsmenge

* EUKLID von Alexandria (um 300 v. Chr.); Satz 20 aus Buch IX der *Elemente*: »Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.«

einer direkten Proportionalität jede Zahlenmenge, also auch $\mathbb{Q}$ verwenden. Zu $x = 0$ gehört bei jeder solchen Funktion der Wert $y = 0$. Umgekehrt folgt aus $x \neq 0$ auch $y \neq 0$, da ja der Proportionalitätsfaktor a nicht 0 ist.
Wir betrachten nun zwei Wertepaare einer direkten Proportionalität, die wir in der Form $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$ schreiben, also durch sogenannte Indizes* unterscheiden. Es gelte $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Wegen $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2$ gilt dann auch

$$\frac{y_1}{x_1} = a, \quad \frac{y_2}{x_2} = a \quad \text{und damit} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit $\frac{x_1}{y_2}$ ergibt sich $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.
Es gilt also

> **Satz 104.1:** Bei einer direkten Proportionalität mit der Gleichung $y = ax$ verhalten sich die y-Werte wie die zugehörigen x-Werte. Der Quotient $y : x$ ist konstant, und zwar gleich dem Proportionalitätsfaktor.

Als nächstes untersuchen wir den Graphen einer direkten Proportionalität.

Beispiel: $f\colon x \mapsto y$ mit $y = 2x,\ x \in \mathbb{Q}$

Wertetabelle:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

Die Zeichnung (Abbildung 104.1) lässt vermuten, dass die zu den Tabellenwerten gehörenden Punkte auf einer Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems liegen. Ob das zutrifft, ob vielleicht sogar alle Punkte des Graphen auf dieser Geraden liegen und ob eine solche Feststellung für den Graphen einer jeden direkten Proportionalität gilt, muss noch geklärt werden.

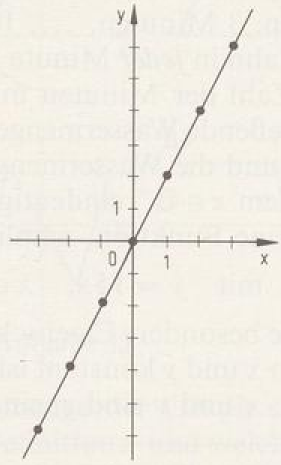

Abb. 104.1

* Die Idee, verschiedene Dinge der gleichen Sorte durch den gleichen Buchstaben zu bezeichnen, aber durch beigefügte Zahlen zu unterscheiden, findet man in *La Géométrie* (1637) von René DESCARTES (1596–1650), wo Punkte mit 2S, 3S und 2T, 3T bezeichnet werden. Da Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) die Gewohnheit hatte, Zahlen nur halb so groß wie große Buchstaben zu schreiben, sah in einer Abhandlung aus den Jahren 1675/1676 die Bezeichnungsweise für verschiedene Punkte einer Kurve so aus: 1C, 2C, 3C. Im Januar 1677 kam ihm die Idee, seine Schreibart zu einem Prinzip zu erheben, indem er expressis verbis vorschlug, die vorangestellten Zahlen wirklich klein zu schreiben. 1678 setzt er im Zusammenhang mit Determinanten (s. S. 139 ff.) die kleinen Zahlen rechts: 10, 11, 12. 1684 verwendet er gleich große Zahlen, stellt sie aber tiefer: 1_0, 1_1, 1_2. Nie aber gibt es bei ihm tiefer gestellte kleine Zahlen.
Auch Isaac NEWTON (1643–1727) erkannte die Nützlichkeit dieser Bezeichnungsweise. Wer als Erster rechts tiefer gestellte Zahlen verwendete, konnten wir nicht ermitteln. Bald waren sie aber aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Sie heißen **Indizes**, in der Einzahl **Index**, was im Lateinischen *Anzeiger* bedeutet.

Wenn man eine beliebige Proportionalität mit der Gleichung $y = ax$, $a \neq 0$, betrachtet, so sieht die entsprechende Wertetabelle so aus:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	…

Zum Graphen der Funktion gehört also stets der Punkt $\mathrm{O}(0|0)$. Von ihm aus gelangt man zum Punkt $\mathrm{P}_1(1|a)$, indem man um 1 in x-Richtung und um a in y-Richtung fortschreitet (Abbildung 105.1). Durch denselben Doppelschritt erreicht man von P_1 aus den Punkt $\mathrm{P}_2(2|2a)$, von dort aus den Punkt $\mathrm{P}_3(3|3a)$ usw.

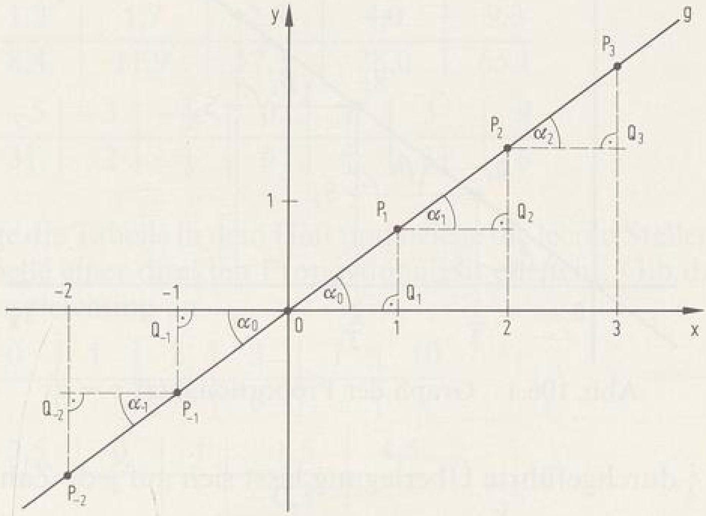

Abb. 105.1 Graph der Proportionalität $y = ax$

Mit den bei dem jeweils 1. Schritt erreichten Zwischenpunkten $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3, \ldots$ ergeben sich Dreiecke $\mathrm{OQ_1P_1}$, $\mathrm{P_1Q_2P_2}$, $\mathrm{P_2Q_3P_3}, \ldots$, die nach dem sws-Satz alle zueinander kongruent sind. Daher gilt für die Dreieckswinkel bei O, P_1, $\mathrm{P}_2, \ldots$: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$

Das bedeutet aber, dass die Strecken $[\mathrm{OP}_1]$, $[\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2]$, $[\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3], \ldots$ gleiche Winkel mit der x-Richtung einschließen und somit parallel sind. Sie liegen daher alle auf einer Geraden g. Indem man von $\mathrm{O}(0|0)$ aus jeweils um -1 in x-Richtung und um $-a$ in y-Richtung fortschreitet, erkennt man ganz entsprechend, dass auch die Strecken $[\mathrm{OP}_{-1}]$, $[\mathrm{P}_{-1}\mathrm{P}_{-2}]$, $[\mathrm{P}_{-2}\mathrm{P}_{-3}], \ldots$ auf der Geraden g liegen. Dies gilt damit insbesondere auch für die zum Graphen der Funktion gehörenden Punkte $\ldots, \mathrm{P}_{-3}, \mathrm{P}_{-2}, \mathrm{P}_{-1}, \mathrm{O}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$, also für alle Punkte $\mathrm{P}_k(k|ak)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Wo aber liegen die übrigen Punkte des Graphen, also die Punkte $(x|ax)$, bei denen x keine ganze Zahl ist? Auch sie liegen auf derselben Geraden g! Betrachten wir z.B. $x = \frac{1}{3}$, wozu $y = a \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{3}$ gehört. Den Punkt $\mathrm{R}_1\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{a}{3}\right)$ erreicht man von $\mathrm{O}(0|0)$ aus, indem man um $\frac{1}{3}$ in x-Richtung und um $\frac{a}{3}$ in

y-Richtung marschiert (Abbildung 106.1). Wiederholt man diesen Doppelschritt noch zweimal, so gelangt man über $R_2\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2a}{3}\right)$ zum Punkt $P_1(1|a)$. Weil die Dreiecke OS_1R_1, $R_1S_2R_2$ und $R_2S_3P_1$ wieder kongruent sind, gilt $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2$. Daraus folgt aber, dass die Punkte O, R_1, R_2, P_1 auf einer Geraden liegen, und zwar wieder auf $OP_1 = g$.

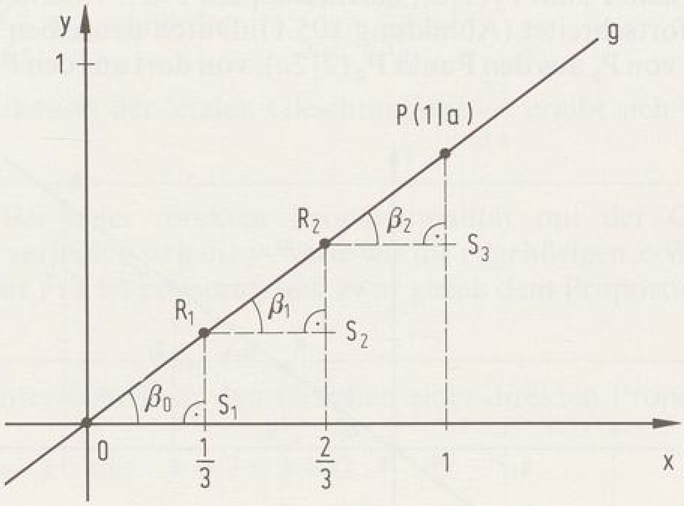

Abb. 106.1 Graph der Proportionalität $y = ax$

Die für $x = \frac{1}{3}$ durchgeführte Überlegung lässt sich auf jede Zahl $x \in \mathbb{Q}$ übertragen. x kann als Bruch $\frac{k}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$) geschrieben werden. Jeden Punkt $\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{ak}{n}\right)$ kann man von $O(0|0)$ aus durch Doppelschritte der Form »$\frac{1}{n}$ in x-Richtung und $\frac{a}{n}$ in y-Richtung« (im Fall $k > 0$) bzw. »$-\frac{1}{n}$ in x-Richtung und $-\frac{a}{n}$ in y-Richtung« (im Fall $k < 0$) erreichen. Aus der Kongruenz der zu den Schritten gehörenden Dreiecke folgt, dass alle diese Punkte auf der Geraden g liegen (vgl. auch Aufgabe 107/**3**). Es gilt also

> **Satz 106.1:** Die Punkte des Graphen einer direkten Proportionalität liegen auf einer Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

Um die zu einer Proportionalität gehörende Gerade zeichnen zu können, genügt im Prinzip die Berechnung eines einzigen von $O(0|0)$ verschiedenen Punktes P des Graphen. Zur Kontrolle empfiehlt es sich, einen weiteren Punkt zu berechnen und zu prüfen, ob er auf $g = OP$ liegt.

Aufgaben

1. Gehört die folgende Wertetabelle zu einer direkten Proportionalität? Gib, falls dies zutrifft, den Proportionalitätsfaktor und die Funktionsgleichung an.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	1	-3	-6	-9

b)

x	2	7	3	7	10	11,1
y	2,5	3,125	3,75	8,75	12,5	13,875

c)

x	1,2	1,7	2,5	4,0	9,3
y	8,4	11,9	17,5	28,0	65,1

d)

x	-5	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	5	9
y	$3\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	6

2. Übertrage die Tabelle in dein Heft und belege die leeren Stellen so, dass die Wertetabelle einer direkten Proportionalität entsteht. Gib dazu auch die Funktionsgleichung an.

a)

x	0	1	2	3	7	10
y				6		

b)

x	$-2{,}5$	0	1	1,5	4,5
y				$-0{,}3$	

c)

x	-6			0	1,5		5,5
y	9	6	0,5			$-3{,}3$	

d)

x	-4			0,8		6,4
y		$-1\frac{3}{8}$	-1		1,25	4

•3. Weise nach, dass die Punkte P und Q zum Graphen der Funktion f gehören, und begründe mithilfe von kongruenten Dreiecken, dass Q auf der Geraden OP liegt.

a) $f\colon x \mapsto 0{,}5x$ mit $x \in \mathbb{Q}$; $\mathrm{P}(-1 \mid -\frac{1}{2})$, $\mathrm{Q}(-\frac{3}{5} \mid -\frac{3}{10})$;
Zeichnung mit Längeneinheit 1 dm!

b) $f\colon x \mapsto 0{,}8x$ mit $x \in \mathbb{Q}$; $\mathrm{P}(1 \mid 0{,}8)$, $\mathrm{Q}(1\frac{3}{4} \mid 1{,}4)$;
Zeichnung mit Längeneinheit 4 cm!

4. Zeichne im angegebenen Intervall den Graphen der durch die Gleichung beschriebenen Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = 1 \cdot x$, $x \in [-5; 6]$ **b)** $y = -x$, $x \in [-5; 6]$

c) $y = 0{,}5x$, $x \in [-5; 6]$ **d)** $y = -0{,}2x$, $x \in [-5; 6]$

e) $y = 2{,}5x$, $x \in [-2; 3]$ **f)** $y = -4x$, $x \in [-2; 1{,}5]$

5. Bestimme die Gleichung derjenigen direkten Proportionalität, zu derem Graphen der folgende Punkt gehört. Fertige eine Zeichnung an.

a) $A(4|-2)$ **b)** $B(-1|5)$ **c)** $C(6|1)$
d) $D(-1{,}8|1\frac{4}{5})$ **e)** $E(3{,}5|1{,}5)$ **f)** $F(-4|-3)$

6. y_1 sei der zu x_1 gehörende Funktionswert einer direkten Proportionalität. Berechne den Proportionalitätsfaktor und den zu x_2 gehörenden Funktionswert y_2.

a) $x_1 = 1$; $y_1 = 1{,}5$; $x_2 = -1$ **b)** $x_1 = -10$; $y_1 = 4$; $x_2 = 2$
c) $x_1 = \frac{7}{8}$; $y_1 = 1{,}4$; $x_2 = -2{,}5$ **d)** $x_1 = 3{,}6$; $y_1 = -3$; $x_2 = 1\frac{1}{3}$

7. Ergänze die fehlende Koordinate so, dass die Punkte P und Q zum Graphen derselben direkten Proportionalität gehören. Überprüfe das Ergebnis an einer Zeichnung.

a) $P(-3|2)$, $Q(4{,}5|\ \ )$ **b)** $P(\ \ |-1{,}5)$, $Q(5|6)$
c) $P(\frac{9}{7}|6)$, $Q(\ \ |-2)$ **d)** $P(2{,}8|\ \ )$, $Q(4\frac{2}{3}|-2)$

•8. Welche direkte Proportionalität hat folgende Eigenschaft?

a) Die Summe der zu $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ gehörenden Funktionswerte ist 10.

b) Der Funktionswert $f(5)$ ist um 6 größer als $f(1)$.

c) Die Abstände der Punkte $A(2|f(2))$ und $B(6{,}5|f(6{,}5))$ des Graphen von der x-Achse unterscheiden sich um 1,5. (2 Lösungen!)

9. Eine Quelle liefert stündlich 5 m³ Wasser.

a) Welche Wassermenge erhält man von dieser Quelle in einer Minute bzw. an einem Tag bzw. in einer Woche?

b) In welcher Zeit liefert diese Quelle den durchschnittlichen täglichen Wasserbedarf einer 4-köpfigen Familie, nämlich 400 l?

c) Wie lange dauert es, bis mit dem Wasser dieser Quelle ein Vorratsbecken von 4,5 m Breite, 7,5 m Länge und 6 m Tiefe gefüllt ist?

10. Ein Arbeiter hebt einen Graben aus, in dem eine Telefonleitung verlegt werden soll. Pro Stunde bewältigt er ein Grabenstück von 2,5 m Länge. Sein Stundenlohn beträgt 20 €.

a) Wie lange (y Std.) dauert es, bis der Mann einen Graben von x m Länge ausgehoben hat?

b) Welcher Arbeitslohn (z €) ist für das Ausheben eines Grabens von x m Länge zu bezahlen?

•c) Beweise: Wenn z zu y direkt proportional ist und ebenso y zu x, dann ist auch z zu x direkt proportional.

11. Ein Auto fährt mit der konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h und benötigt dabei 8,2 Liter Benzin für je 100 km. Beschreibe durch eine Gleichung den Zusammenhang

a) zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem zurückgelegten Weg s (in km);

b) zwischen der Fahrstrecke s (in km) und dem Benzinverbrauch b (in l);

• **c)** zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem Benzinverbrauch b (in l).

12. a) Ein Kapital $K = 7500$ € ist zu 4% angelegt. Wie hoch ist der Zins für 180 (210, 300) Tage?

b) Wie hängt allgemein der Zins Z

1) vom Kapital K, **2)** vom Zinsfuß p, **3)** von der Zinszeit T ab?

5.4 Die lineare Funktion

Sehr häufig hat man es mit Funktionen zu tun, deren Funktionsterm die Summe aus dem Term ax einer direkten Proportionalität und einer Zahl b ist, also die Form $f(x) = ax + b$ hat.

Beispiel:

Inge wird von ihrer Mutter ermahnt, nicht unnötig viel Wasser zu verbrauchen. Sie zeigt ihr die letzte Jahresrechnung der städtischen Wasserwerke. Darauf findet Inge folgende Angaben:
Wasserverbrauch 140 m^3; Preis für 1 m^3 Wasser 1,25 €;
Grundpreis 32 €; Rechnungsbetrag 207 €.
Inge erkennt, dass sich der Rechnungsbetrag ergibt, wenn man $140 \cdot 1{,}25$ € $+ 32$ € berechnet.
Allgemein lautet, wenn man die verbrauchte Wassermenge mit x m^3 und den Rechnungsbetrag mit y € bezeichnet, die Berechnungsregel so: $y = 1{,}25 \cdot x + 32$. Durch sie wird jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Es handelt sich also um die Funktion

$$f\colon x \mapsto 1{,}25 \cdot x + 32,\ x \in \mathbb{Q}^+.$$

> **Definition 109.1:** Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = ax + b$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$ beschrieben werden kann, heißt **lineare Funktion**.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax + b$ nennt man heute oft **affine*** Funktion. Unter einer linearen Funktion versteht man dann nur den Sonderfall mit der Gleichung $y = ax$.

Als Definitionsmenge einer linearen Funktion soll, wenn nichts anderes angegeben ist, stets die ganze Zahlenmenge, also $\mathbb{Q}$, verwendet werden.

* affinis (lat.) = angrenzend, (durch Heirat) verwandt, in etwas verwickelt. Leonhard Euler (1707–1783) führte das Wort *affin* in die Mathematik ein.