Anschauliche Geometrie

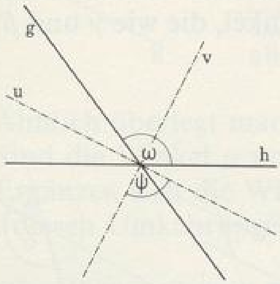
Barth, Friedrich

München, 2001

3.3 Doppelkreuzung mit einen Parallelenpaar

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

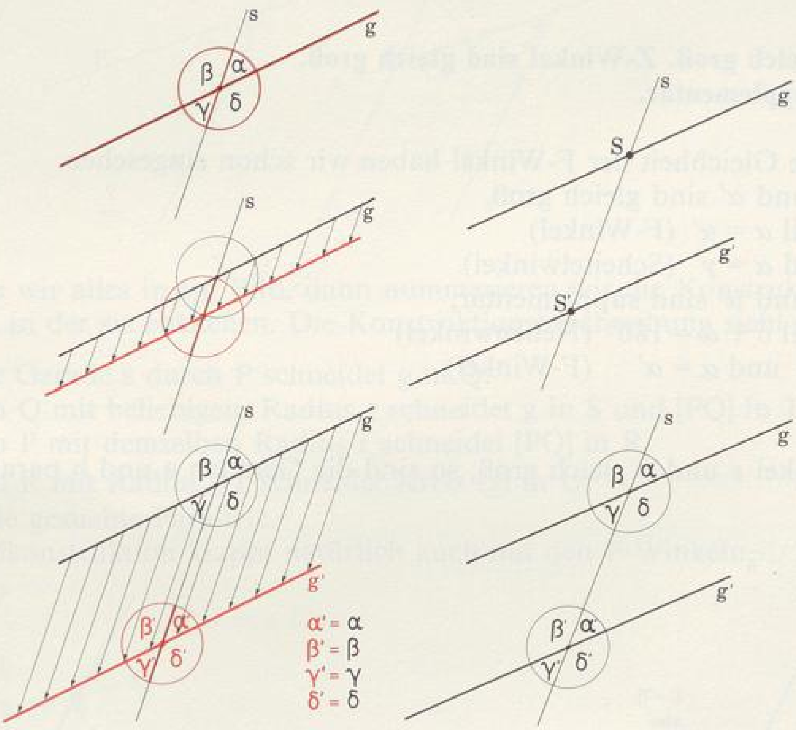
8. DIE WINKELHALBIERENDEN
Die Gerade v halbiert den Winkel ω, u halbiert den Nebenwinkel.
Wie groß ist der Winkel ψ zwischen u und v, falls
a) $\omega = 117°$ **b)** ω beliebig ist?



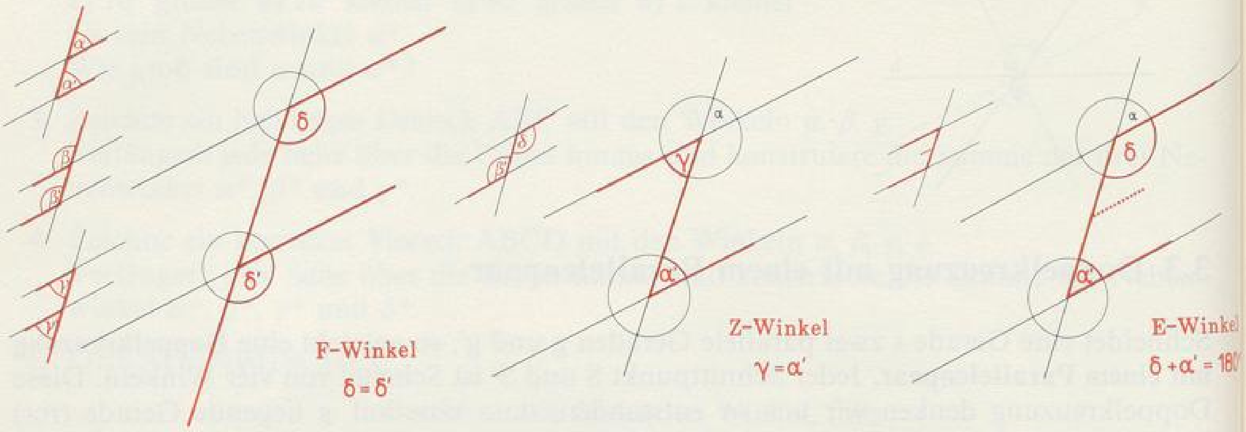
3.3 Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar

Schneidet eine Gerade s zwei parallele Geraden g und g′, so entsteht eine **Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar.** Jeder Schnittpunkt S und S′ ist Scheitel von vier Winkeln. Diese Doppelkreuzung denken wir uns so entstanden, dass eine auf g liegende Gerade (rot) längs der Gerade s verschoben wird. Weil sich die Gerade dabei nicht dreht, ändern sich auch die Winkel nicht. Deshalb gilt:

$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$
$\gamma = \gamma'$
$\delta = \delta'$.



Je zwei dieser gleich liegenden und gleich großen Winkel heißen **F-Winkel** oder auch **Stufenwinkel.**
Die Winkel γ und α' erinnern an den Buchstaben Z. Sie heißen deshalb **Z-Winkel** oder auch **Wechselwinkel.** Auch die Winkel, die wie δ und β' liegen, nennen wir Z-Winkel.
Die Winkel δ und α' erinnern an ein E (wenn wir uns den Mittelstrich dazudenken). Sie heißen deshalb **E-Winkel** oder auch **Nachbarwinkel.** Auch die Winkel, die wie γ und β' liegen, nennen wir E-Winkel.

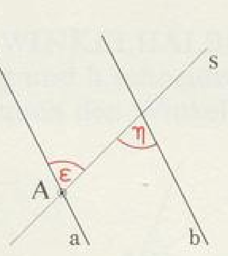


Bei einer Doppelkreuzung mit parallelen Geraden gilt der

Satz:
F-Winkel sind gleich groß. Z-Winkel sind gleich groß.
E-Winkel sind supplementär.

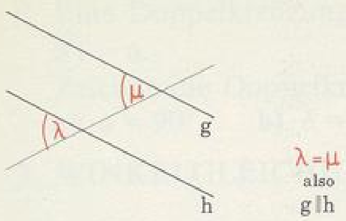
Begründung: Die Gleichheit der F-Winkel haben wir schon eingesehen.
γ und α' sind gleich groß,
weil $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel)
und $\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel).
δ und α' sind supplementär,
weil $\delta + \alpha = 180°$ (Nebenwinkel)
und $\alpha = \alpha'$ (F-Winkel).

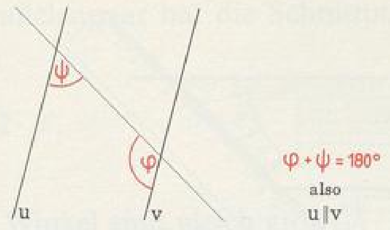
Umgekehrt gilt:
1. Sind alle Winkel ε und η gleich groß, so sind die Geraden a und b parallel.



$\varepsilon = \eta$
also
a∥b

Begründung: Denkt man sich durch A die Parallele zu b, so schließt sie mit der Gerade s einen Winkel der Größe $\eta (= \varepsilon)$ ein, weil der Z-Winkel-Satz gilt. Die Gerade a tut dasselbe, also ist a parallel zu b.





Ähnlich überlegt man sich:

2. Sind die Winkel μ und λ gleich groß, so sind die Geraden g und h parallel.

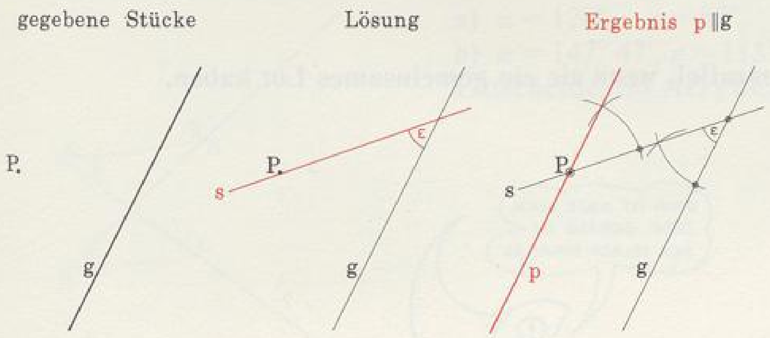
3. Ergänzen sich die Winkel φ und ψ zu 180°, so sind die Geraden u und v parallel.

Mit diesen Umkehrungen ist es möglich, Parallelen zu konstruieren.

3. Grundkonstruktion: Parallele durch einen Punkt

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Durch P soll die Parallele p zu g konstruiert werden. Die gegebenen Stücke sind gezeichnet.

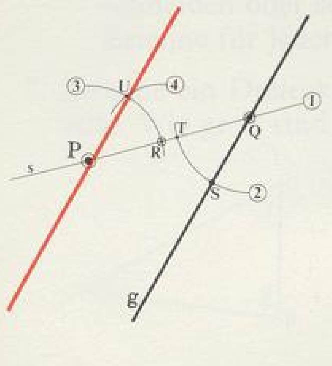
Lösung: 1. Zeichne durch P irgendeine Gerade s, die g schneidet.
2. Konstruiere in P den Z-Winkel zu ε.

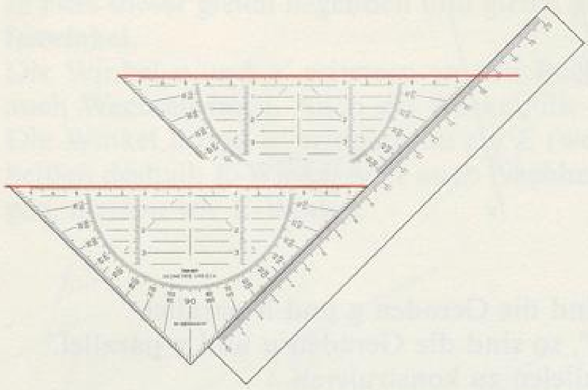


Konstruieren wir alles in ein Bild, dann nummerieren wir die Konstruktionslinien in der Reihenfolge, in der sie entstehen. Die Konstruktionsbeschreibung sieht so aus:

① Beliebige Gerade s durch P schneidet g in Q.
② Kreis um Q mit beliebigem Radius r schneidet g in S und [PQ] in T.
③ Kreis um P mit demselben Radius r schneidet [PQ] in R.
④ Kreis um R mit Radius $\overline{ST}$ schneidet Kreis ③ in U.
⑤ PU ist die gesuchte Parallele.

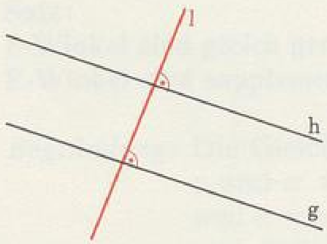
Diese Grundkonstruktion klappt natürlich auch mit den F-Winkeln.





Zum schnellen Zeichnen gehen wir so vor: Mit dem Geodreieck und einem festgehaltenen Lineal verschieben wir einen F-Winkel und zeichnen damit eine Parallele zu einer gegebenen Gerade. Streng genommen ist dies keine Konstruktion, sondern nur ein Behelf, weil wir dabei einen starren Winkel verschieben. Trotzdem werden wir künftig Parallelen meistens so zeichnen, es geht schneller und ist genauso genau.
Der Sonderfall, dass die Schnittgerade s senkrecht auf den Parallelen steht, enthält ein wichtiges Kennzeichen für Parallelen:

Satz:
Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot haben.



$g \perp l$ und $h \perp l$ also $g \parallel h$

Aufgaben zu 3.3

1. Bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelpaar ist bekannt:
a) $\alpha = 35°$ **b)** $\beta = 135°$ **c)** $\gamma' = 87{,}7°$ **d)** $\delta = 123°\,45'$
Berechne alle übrigen Winkel.