Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

5.4 Die lineare Funktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

a) zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem zurückgelegten Weg s (in km);

b) zwischen der Fahrstrecke s (in km) und dem Benzinverbrauch b (in l);

•**c)** zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem Benzinverbrauch b (in l).

12. a) Ein Kapital $K = 7500$ € ist zu 4% angelegt. Wie hoch ist der Zins für 180 (210, 300) Tage?

b) Wie hängt allgemein der Zins Z

1) vom Kapital K, **2)** vom Zinsfuß p, **3)** von der Zinszeit T ab?

5.4 Die lineare Funktion

Sehr häufig hat man es mit Funktionen zu tun, deren Funktionsterm die Summe aus dem Term ax einer direkten Proportionalität und einer Zahl b ist, also die Form $f(x) = ax + b$ hat.

Beispiel:

Inge wird von ihrer Mutter ermahnt, nicht unnötig viel Wasser zu verbrauchen. Sie zeigt ihr die letzte Jahresrechnung der städtischen Wasserwerke. Darauf findet Inge folgende Angaben:
Wasserverbrauch 140 m^3; Preis für 1 m^3 Wasser 1,25 €;
Grundpreis 32 €; Rechnungsbetrag 207 €.
Inge erkennt, dass sich der Rechnungsbetrag ergibt, wenn man $140 \cdot 1{,}25$ € $+ 32$ € berechnet.
Allgemein lautet, wenn man die verbrauchte Wassermenge mit x m^3 und den Rechnungsbetrag mit y € bezeichnet, die Berechnungsregel so: $y = 1{,}25 \cdot x + 32$. Durch sie wird jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Es handelt sich also um die Funktion

$$f\colon x \mapsto 1{,}25 \cdot x + 32,\ x \in \mathbb{Q}^+.$$

> **Definition 109.1:** Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = ax + b$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$ beschrieben werden kann, heißt **lineare Funktion**.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax + b$ nennt man heute oft **affine*** Funktion. Unter einer linearen Funktion versteht man dann nur den Sonderfall mit der Gleichung $y = ax$.

Als Definitionsmenge einer linearen Funktion soll, wenn nichts anderes angegeben ist, stets die ganze Zahlenmenge, also $\mathbb{Q}$, verwendet werden.

* affinis (lat.) = angrenzend, (durch Heirat) verwandt, in etwas verwickelt. Leonhard EULER (1707–1783) führte das Wort *affin* in die Mathematik ein.

Wieso man Funktionen mit der Gleichung $y = ax + b$ als *linear* bezeichnet, wird verständlich, wenn man ihre Graphen untersucht:
Für $a \neq 0$ beschreibt $y = ax$ bekanntlich eine direkte Proportionalität, deren Graph aus Punkten einer Geraden durch den Ursprung $O(0|0)$ besteht. Indem man zu den y-Koordinaten dieser Punkte jeweils b addiert, d. h. die Punkte um den Pfeil b parallel zur y-Achse verschiebt, erhält man den Graphen der linearen Funktion mit der Gleichung $y = ax + b$. Seine Punkte liegen also wieder auf einer Geraden (Abbildung 110.1).
Für $a = 0$ lautet die Gleichung der linearen Funktion $y = 0 \cdot x + b$, kurz $y = b$. Jedem Wert der unabhängigen Variablen x ist in diesem Fall derselbe Funktionswert zugeordnet; man spricht daher von einer **konstanten Funktion**. Offensichtlich liegen die Punkte des Graphen auf einer zur x-Achse parallelen Geraden (Abbildung 110.2). Damit gilt

Satz 110.1: Die Punkte des Graphen einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden.

Man sagt dafür kurz: Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
Die Kennzeichnung »linear«* soll darauf hinweisen, dass der Graph einer solchen Funktion eine Gerade ist.
Welche Lage die der Funktion $f\colon x \mapsto ax + b$ entsprechende Gerade im Koordinatensystem hat, hängt von den Zahlen a und b ab. Die geometrische Bedeutung des Faktors a haben wir bereits bei der direkten Proportionalität erkannt: Wenn man x um 1 vergrößert, ändert sich y um a. Ist a positiv, so **steigt** die Gerade von links nach rechts an, und zwar umso stärker, je größer a ist. Man nennt die Zahl a das Steigungsmaß oder kurz die **Steigung** der Geraden.

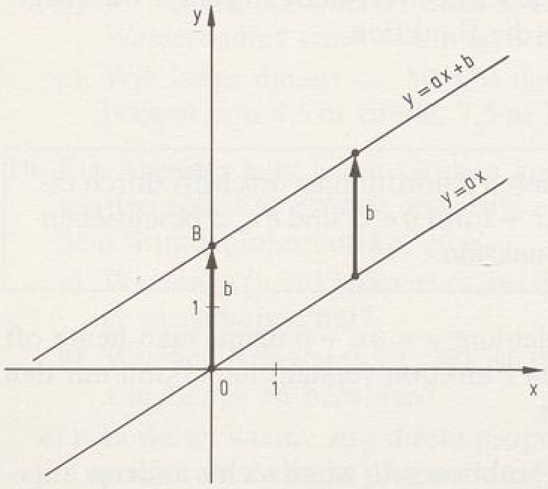

Abb. 110.1 Graph zu $y = ax + b$

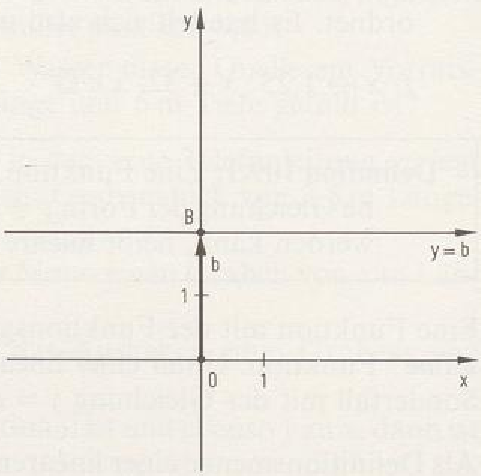

Abb. 110.2 Graph zu $y = b$

* linea (lat.) = Leinenfaden, Linie; »linear« hat hier die Bedeutung »geradlinig« (wie ein gespannter Leinenfaden!)

Im Fall $a < 0$ erhält man eine **fallende** Gerade, die man auch als Gerade mit negativer Steigung bezeichnet. Der Graph einer konstanten Funktion, also eine zur x-Achse parallele Gerade, hat die Steigung 0.
Zur vollständigen Festlegung der Geraden benötigt man außer der durch die Steigung a bestimmten Richtung noch einen Punkt. Besonders leicht findet man die y-Koordinate des zu $x = 0$ gehörenden Punktes: $y = a \cdot 0 + b = b$. Die Gerade muss also den Punkt B $(0|b)$ enthalten; es ist dies ihr Schnittpunkt mit der y-Achse. Man nennt daher die Zahl b den ***y*-Achsenabschnitt** der Geraden.
Wenn man eine lineare Funktion graphisch darstellen will, genügt es, zwei Wertepaare $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ zu berechnen. Durch die entsprechenden Punkte ist die Gerade eindeutig bestimmt. Im Allgemeinen wird man dabei den Punkt $(0|b)$ bevorzugt benützen. Um eine gute Zeichengenauigkeit zu erreichen, sollte man darauf achten, dass die beiden verwendeten Punkte nicht zu nahe beieinander liegen und möglichst einfache Koordinaten haben.

Beispiel:

Es soll der Graph von f: $x \mapsto 0{,}6x + 1$ gezeichnet werden.
P$(0|1)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Der zu $x = 1$ gehörende Punkt $(1|1{,}6)$ wäre für das Zeichnen der Geraden nicht günstig! Besser eignet sich z. B. Q$(5|4)$. Man gelangt von P nach Q, indem man um fünf Längeneinheiten in x-Richtung zum Punkt R$(5|1)$ und von dort um $5 \cdot 0{,}6 = 3$ Längeneinheiten in y-Richtung weitergeht (Abbildung 111.1). Im Dreieck PRQ gilt $\overline{RQ} : \overline{PR} = 0{,}6$; d.h., das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Kathete ist gleich der Steigung der Geraden PQ.

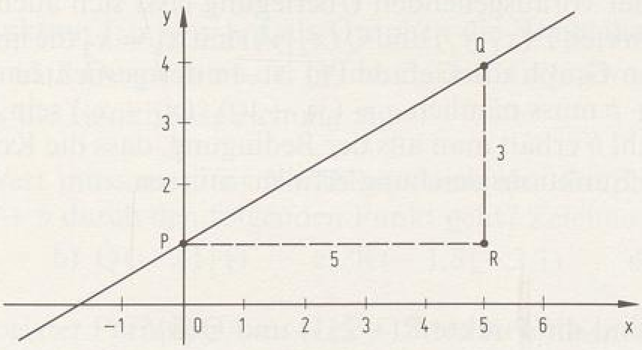

Abb. 111.1 Graph von f: $x \mapsto 0{,}6x + 1$

Sind allgemein P$(x_1|y_1)$ und Q$(x_2|y_2)$ zwei verschiedene Punkte des Graphen einer linearen Funktion f: $x \mapsto ax + b$, so folgt aus $y_1 = ax_1 + b$ und $y_2 = ax_2 + b$ die Gleichung $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ und daraus wegen $x_1 \neq x_2$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Man erhält also die Steigung des Graphen, wenn man die Differenz zweier Funktionswerte durch die Differenz der entsprechenden x-Werte dividiert.

Führt man den Punkt R$(x_2|y_1)$ ein, so entspricht der Differenz $x_2 - x_1$ der Pfeil $\overrightarrow{PR}$ und der Differenz $y_2 - y_1$ der Pfeil $\overrightarrow{RQ}$. Durch die beiden Pfeile und damit durch das Dreieck PRQ ist also die Steigung des Graphen festgelegt. Man nennt deshalb jedes derartige Dreieck ein **Steigungsdreieck** der Geraden. Abbildung 112.1 zeigt Steigungsdreiecke für die Graphen g_1 und g_2 der Funktionen f_1: $x \mapsto \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ und f_2: $x \mapsto -0{,}75x + 0{,}5$.

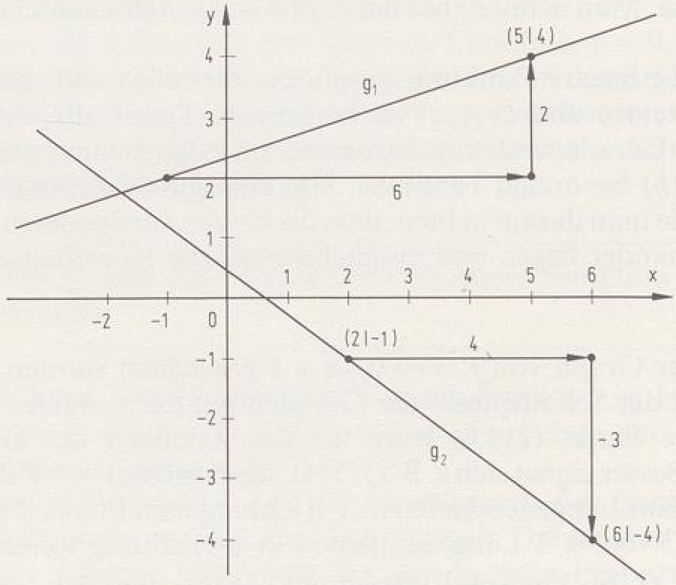

Abb. 112.1 Steigungsdreiecke

Das Ergebnis der vorausgehenden Überlegung lässt sich auch dazu verwenden, zu zwei Punkten P$(x_1|y_1)$ und Q$(x_2|y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ die lineare Funktion zu finden, deren Graph die Gerade PQ ist. In der gesuchten Funktionsgleichung $y = ax + b$ muss nämlich $a = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$ sein. Die jetzt noch unbekannte Zahl b erhält man aus der Bedingung, dass die Koordinaten von P (oder Q) die Funktionsgleichung erfüllen müssen.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte P$(-2|1)$ und Q$(3|5)$.
Gesucht ist die Funktionsgleichung $y = ax + b$ der linearen Funktion, deren Graph die Gerade PQ ist.

Für die Steigung a gilt $a = \dfrac{5-1}{3-(-2)} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$; somit erhält man $y = 0{,}8x + b$.

Da P ein Punkt des Graphen ist, müssen die Koordinaten von P, nämlich $x = -2$ und $y = 1$, die Funktionsgleichung erfüllen; es gilt daher

$$1 = 0{,}8(-2) + b \Leftrightarrow b = 2{,}6.$$

Ergebnis: $y = 0{,}8x + 2{,}6$.

Aufgaben

1. Durch welche der folgenden Gleichungen wird eine lineare Funktion $f\colon x \mapsto y$ beschrieben?

a) $y = 3 - 8x$ **b)** $y = 2 \cdot \frac{1}{x} - 7$ **c)** $y - 9 = 3(x - 3)$

d) $y = |1{,}5x + 6|$ **e)** $y = \frac{12 - 5x}{12 - 5}$ **f)** $y + 2x = (4x - 5) : 2$

2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen $f\colon x \mapsto y$ im Intervall $[-5; 5]$.

a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = 2(x + 1)$
d) $y = -x + 2$ **e)** $y = -x - 0{,}5$ **f)** $y = 0{,}7x$
g) $y = 0{,}7x - 1{,}5$ **h)** $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$ **i)** $y = -2$

3. Durch $x \mapsto 0{,}5x + b$ ist für jedes $b \in \mathbb{Q}$ eine lineare Funktion definiert. Zeichne die Graphen für $b = 0$, $b = -2$ und $b = 1$.
Beschreibe die Menge aller Graphen, die man erhält, wenn b alle rationalen Zahlen durchläuft.

•**4.** Durch $x \mapsto ax + 1$ ist für jedes $a \in \mathbb{Q}$ eine lineare Funktion definiert. Zeichne die Graphen für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
Beschreibe die Menge aller Graphen, die man erhält, wenn a alle rationalen Zahlen durchläuft.

5. Welche Funktion $f\colon x \mapsto y$ hat als Graphen die Winkelhalbierende
a) des 1. und 3. Quadranten, **b)** des 2. und 4. Quadranten?
Gib jeweils die Funktionsgleichung an.

6. Welchen Wert muss man für b wählen, damit der Graph der Funktion $f\colon x \mapsto -x + b$ durch den folgenden Punkt geht? Zeichne das Schaubild.
a) $P(1|4)$ **b)** $Q(-2\frac{1}{3}|\frac{1}{5})$ **c)** $R(-1{,}8|-2{,}1)$ **d)** $S(1{,}9|-\frac{7}{8})$

7. Bestimme bei der Funktion $f\colon x \mapsto ax + 2$ den Koeffizienten a so, dass ihr Graph durch den angegebenen Punkt geht. Zeichne den Graphen.
a) $A(4|3)$ **b)** $B(-2|4)$ **c)** $C(3{,}5|2)$
d) $D(\frac{5}{6}|0)$ **e)** $E(-5|-1)$ **f)** $F(-3|-5)$

•**8.** Bestimme die Gleichung derjenigen linearen Funktion, deren Graph das folgende Punktepaar enthält:
a) $P(1|-1)$, $Q(4|5)$ **b)** $P(-4|1)$, $Q(2|-0{,}5)$
c) $P(-3|0)$, $Q(6|6)$ **d)** $P(-2|-1{,}5)$, $Q(4|-1{,}5)$
e) $P(0|-0{,}8)$, $Q(4|4)$ **f)** $P(1{,}5|0)$, $Q(6|-2{,}5)$

•9. Ergänze die folgende Tabelle so, dass eine Wertetabelle einer linearen Funktion entsteht. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a)

x	-3	0		$1{,}2$	6
y	$-3{,}5$		$2\frac{1}{3}$		7

b)

x		1	3	7	11
y	14	0		-21	

c)

x	-13	$-3{,}45$	0	$1{,}89$	$3{,}14$
y	$2{,}125$			$\frac{17}{8}$	

•10. Prüfe, ob die folgende Wertetabelle zu einer linearen Funktion passt. Wenn ja, gib die Funktionsgleichung an.

a)

x	1	$1{,}25$	$-2{,}5$	$2{,}25$
y	-2	0	-30	8

b)

x	-2	0	-12	8
y	3	$2{,}8$	4	2

11. Zeichne die Gerade g, deute sie als den Graphen einer Funktion und bestimme die Funktionsgleichung.

a) g geht durch $P(-3|-2)$ und ist parallel zur x-Achse.

b) g läuft fallend durch $Q(1|-2)$ und schließt mit der x-Achse einen Winkel von $45°$ ein.

c) g ist parallel zum Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{5}{7}x + 1$ und enthält den Punkt $R(0|2{,}7)$.

d) g hat die Steigung 1,5 und schneidet den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto 0{,}9x - 1{,}5$ im Punkt $S(5|?)$.

e) Der y-Achsenabschnitt von g ist -3, der x-Achsenabschnitt 5.

12. g sei die Gerade durch $A(0|1)$ und $B(4|4)$.

a) Trage g und das zu $[AB]$ gehörende Steigungsdreieck in ein Koordinatensystem ein und bestimme die Gleichung der zu g gehörenden linearen Funktion.

•b) Spiegle g an der x-Achse. Welche Funktion gehört zur Bildgeraden g'?*

•c) Spiegle g an der y-Achse und gib die der Bildgeraden g'' entsprechende Funktion an.

:d) g''' entstehe durch Spiegeln von g an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Welche Funktion hat g''' als Graphen?

* Striche statt Indizes zur Unterscheidung verwendet als Erster Roger Cotes (1682–1716) in seiner 1707 verfassten Arbeit *De Methodo Differentiali Newtonia*, die seiner aber erst 1722 postum erschienenen *Harmonia mensurarum* – »Harmonie der Maße« – beigefügt wurde, sodass eine 1714 in den *Philosophical Transactions* erschienene Abhandlung von Abraham de Moivre (1667–1754) vermutlich die erste Publikation ist, in der Striche benutzt werden. 1747 benützt sie William Jones (1675–1749) und 1748 Leonhard Euler (1707–1783).

13. In welcher möglichst großen Teilmenge T der Definitionsmenge $\mathbb{Q}$ gilt folgende Aussage?

a) Die Funktion f_1: $x \mapsto 4x + 1$ hat in T nur positive Funktionswerte.

b) Die Funktion f_2: $x \mapsto -2{,}5x + 3$ nimmt in T keinen negativen Wert an.

c) Jeder zu $x \in T$ gehörende Punkt des Graphen der Funktion f_3: $x \mapsto -0{,}8x + 3{,}6$ liegt im 1. (2., 3., 4.) Quadranten des Koordinatensystems.

14. Für eine Taxifahrt zahlte man 1987 in München 2,90 DM Grundgebühr und 1,70 DM je gefahrenen Kilometer.

a) Stelle die Fahrkosten (y DM) als Funktion der Fahrstrecke (x km) dar.

b) Ein Fahrgast zahlte 16,50 DM. Wie weit ist er mit dem Taxi gefahren?

15. Herr Knapp benötigt für einen Tag ein Mietauto. Die Verleihfirma verlangt dafür als Grundgebühr 80 €; dazu kommen noch 15 Cent für jeden gefahrenen Kilometer.

a) Herr Knapp legt mit dem Mietauto 324 km zurück. Wie teuer kommt diese Fahrt?

b) Stelle allgemein die Mietkosten (y €) als Funktion der zurückgelegten Strecke (x km) dar.

c) Die Firma bietet denselben Leihwagen wahlweise auch zum festen Tagessatz von 134 € (also ohne Kilometergebühr!) an. Für welche Fahrstrecken ist dieses zweite Angebot günstiger als das erste?

16. Ein Messzylinder wiegt leer 850 g. Sein Hohlraum hat einen Querschnitt von $12\,\text{cm}^2$ und ist 50 cm hoch.

a) Wie schwer ist der Zylinder, wenn er 35 cm hoch mit Wasser gefüllt ist?

b) Berechne die Gesamtmasse m (in g) für eine beliebige Wasserhöhe h (in cm).

c) Wie hängt die Gesamtmasse von der Füllhöhe ab, wenn man Alkohol $\left(\varrho = 0{,}79\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ einfüllt? Bei welcher Höhe hat man gerade 1 kg?

•**17.** Eine an einem Stativ aufgehängte Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 16 cm lang. Wenn man ein Massestück von 100 g anhängt, verlängert sie sich um 8 cm.

a) Stelle die Federlänge l (in cm) als Funktion der Belastung m (in g) dar. Welche Masse kann man höchstens anhängen, wenn die Feder maximal auf 80 cm gedehnt werden darf (Elastizitätsgrenze!)?

b) Das obere Ende der Feder wird genau 80 cm über der Tischplatte befestigt. Welchen Abstand d (in cm) von der Tischplatte hat dann das untere Federende bei einer Belastung m? Die zur Belastung verwendeten Massestücke werden auf einen 10 cm hohen Ständer aufgesetzt, der am unteren Federende hängt. Bei welcher Belastung der Feder berührt dieser Ständer gerade die Tischplatte?