Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

5.5 Die indirekte Proportionalität

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

5.5 Die indirekte Proportionalität

Neben direkt proportionalen Größenpaaren hast du auch schon solche kennen gelernt, die man *indirekt proportional* nennt.

Beispiel:

Inge hat den Wasserhahn so weit aufgedreht, dass pro Minute 15 Liter Wasser in die Wanne fließen. Es dauert 10 Minuten, bis die gewünschte Wassermenge eingelaufen ist. Wie lange hätte es gedauert, wenn sie den Hahn nur so weit geöffnet hätte, dass in einer Minute 12 (10, 8, 5, ...) Liter zugeflossen wären?

Da die benötigte Wassermenge $10 \cdot 15\,\mathrm{l} = 150\,\mathrm{l}$ beträgt, muss man jeweils 150 l durch die pro Minute einfließende Wassermenge teilen, um zu erfahren, wie viel Minuten der Hahn geöffnet bleiben muss. Man erhält folgende Tabelle:

Zufluss pro Min. in l	15	12	10	8	5	...
Öffnungszeit in Min.	10	$12\frac{1}{2}$	15	$18\frac{3}{4}$	30	...

Bezeichnet man allgemein die pro Minute zufließende Wassermenge mit x l und die für 150 l benötigte Zeit mit y Minuten, so gilt $y = 150 : x$. Damit ist jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet, man hat also folgende Funktion:

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 150 : x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Diese Funktion hat die besondere Eigenschaft, dass das *Produkt* einander entsprechender x- und y-Werte konstant ist; es gilt ja $x \cdot y = 150$.

Die Gleichung $y = 150 : x$ kann man auch in der Form $y = 150 \cdot \frac{1}{x}$ schreiben. Das bedeutet aber, dass zwischen y und dem *Kehrwert* von x eine direkte Proportionalität besteht. Man sagt dazu kürzer: x und y sind zueinander *indirekt proportional.* Auch die Sprechweise *umgekehrt proportional* wird oft verwendet.

> **Definition 116.1:** Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = \frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **indirekte Proportionalität**.
> Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Am Funktionsterm erkennt man, dass die Zahl 0 nicht zur Definitionsmenge einer indirekten Proportionalität gehören kann. Wegen $a \neq 0$ gilt stets auch $y \neq 0$.

Für zwei Wertepaare $(x_1 | y_1)$ und $(x_2 | y_2)$ einer indirekten Proportionalität folgt aus der Funktionsgleichung

$x_1 y_1 = a$ und $x_2 y_2 = a$, also $x_1 y_1 = x_2 y_2$

und daraus durch Division mit $x_1 y_2$

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1 \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Damit gilt:

> **Satz 117.1:** Bei einer indirekten Proportionalität verhalten sich die y-Werte umgekehrt wie die zugehörigen x-Werte. Das Produkt $x \cdot y$ ist konstant, und zwar gleich dem Proportionalitätsfaktor.

Um den Graphen einer indirekten Proportionalität zu untersuchen, betrachten wir zunächst das

Beispiel: $f\colon x \mapsto y$ mit $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Wertetabelle:

x	…	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	…	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
y	…	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	…	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	…

Die zu diesen Tabellenwerten gehörenden Punkte sind in Abbildung 117.1 eingezeichnet. Natürlich liegen dazwischen jeweils noch unendlich viele weitere Punkte. Alle Punkte des Graphen sind offensichtlich auf einer gekrümmten Linie angeordnet. Abbildung 117.2 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt mit den Punkten zu den x-Werten 0,5; 0,6; …; 2,0.

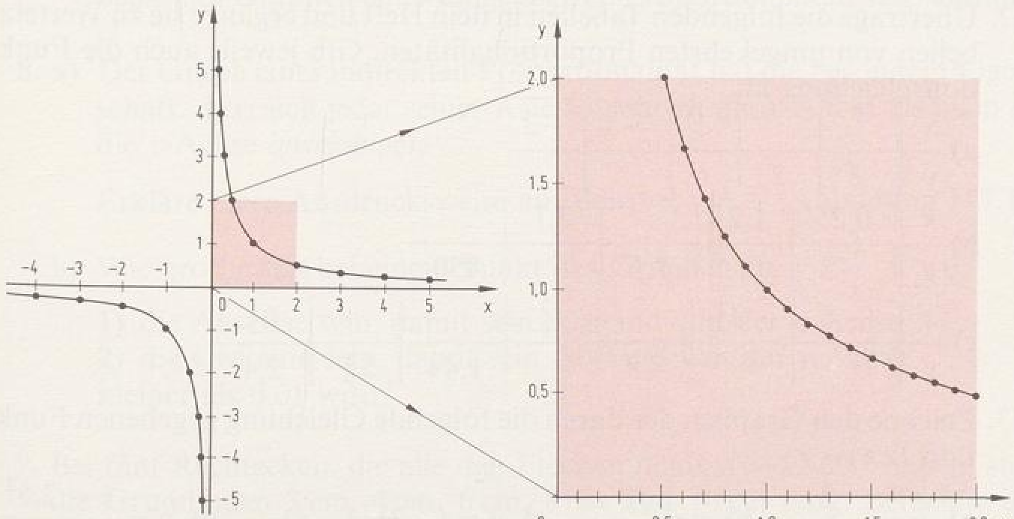

Abb. 117.1 Graph von $y = \dfrac{1}{x}$

Abb. 117.2 Ausschnittsvergrößerung von Abbildung 117.1

Der Graph einer indirekten Proportionalität mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ unterscheidet sich von dem in Abbildung 117.1 gezeigten nur darin, dass die y-Koordinaten mit dem Faktor a multipliziert sind. Für $a > 0$ liegen die beiden Kurventeile wieder im 1. und 3., für $a < 0$ im 2. und 4. Quadranten. Jeden dieser Graphen bezeichnet man als (gleichseitige) **Hyperbel***, die beiden Teile, in welche er wegen der Definitionslücke 0 zerfällt, als **Äste** der Hyperbel.
Der Graph einer indirekten Proportionalität ist stets punktsymmetrisch zu $O(0|0)$. Aus $y = \frac{a}{x}$ folgt nämlich $-y = \frac{a}{-x}$. Daher ist mit $P(x|y)$ auch $P'(-x|-y)$ ein Punkt des Graphen. Solche Punkte P und P′ liegen aber symmetrisch zu $O(0|0)$ (vgl. Aufgabe 119/**6**). Bei der Spiegelung an $O(0|0)$ werden die beiden Hyperbeläste aufeinander abgebildet.

Aufgaben

1. Gehört die folgende Wertetabelle zu einer indirekten Proportionalität? Gib, falls dies zutrifft, den Proportionalitätsfaktor und die Funktionsgleichung an.

a)

x	3	-6	2	-9	-1	-18
y	-6	3	9	-2	18	1

b)

x	5	3	0,5	-2	-8	-15
y	-2	$-3\frac{1}{3}$	-20	5	1,25	$\frac{2}{3}$

c)

x	4	2,4	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	$-\frac{8}{9}$
y	0,36	0,6	1,08	8,64	$-4,8$	$-1,62$

2. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie zu Wertetabellen von umgekehrten Proportionalitäten. Gib jeweils auch die Funktionsgleichung an.

a)

x			1	-1	-2
y	3	2	6		

b)

x	0,25	1,2		2,7	
y	-3		1,2		450

c)

x	-5	$-3\frac{1}{3}$		$\frac{32}{41}$			$6\frac{2}{3}$
y			-8		1,44	$5\frac{5}{9}$	2,4

3. Zeichne den Graphen der durch die folgende Gleichung gegebenen Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = -\frac{2}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{2x}$ **c)** $y = (-3):(-x)$ **d)** $y = \frac{6-2{,}5^2}{0{,}1x}$

* ὑπερβολή (hyperbolé) = *Überschuss*. Der Name stammt von APOLLONIOS von Perge (etwa 262 bis 190 v. Chr.).

4. Gib die Gleichung der indirekten Proportionalität an, deren Graph den Punkt P enthält und zeichne den Graphen.
a) $P(2|3)$ **b)** $P(2|-3)$ **c)** $P(-5|0{,}2)$ **d)** $P(-4|-\frac{1}{8})$

•**5. a)** Trage in ein Koordinatensystem einen Punkt $P(a|b)$ mit $a>0$ und dazu den Punkt $P'(-a|-b)$ ein. Beweise, dass der Ursprung $O(0|0)$ der Mittelpunkt der Strecke $[PP']$ ist.
(Verwende, falls $b \neq 0$, z. B. die Dreiecke OPP_0 und $OP'P'_0$ mit $P_0(a|0)$, $P'_0(-a|0)$.)
b) Begründe nun, dass der Graph einer indirekten Proportionalität punktsymmetrisch bezüglich $O(0|0)$ ist.
c) Ist auch der Graph einer direkten Proportionalität punktsymmetrisch zu $O(0|0)$?

6. Zeichne den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{2}{x}$ und spiegle ihn
a) an der x-Achse, **b)** an der y-Achse.
Zu welcher Funktion gehört jeweils der gespiegelte Graph?

:**7. a)** Trage einen Punkt $P(u|v)$ mit $u>v>0$ sowie den Punkt $P'(v|u)$ in ein Koordinatensystem ein. Beweise, dass P und P′ symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen.
(Benütze z. B. die Dreiecke OP_0P und OP'_0P' mit $P_0(u|0)$ und $P'_0(0|u)$.)
b) Begründe: Der Graph einer indirekten Proportionalität ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.
c) Auch die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten ist Symmetrieachse des Graphen einer umgekehrten Proportionalität. Begründung!

8. a) Der Graph einer indirekten Proportionalität hat die besondere Eigenschaft, dass sich jeder seiner Äste sowohl an die x-Achse als auch an die y-Achse *anschmiegt*.
Erkläre diese Ausdrucksweise am Beispiel $y = \frac{1}{x}$ (Abbildung 117.1).
b) Wie groß muss bei einem Punkt des Graphen zu $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$,
1) die Abszisse sein, damit sein Abstand von der x-Achse
2) die Ordinate sein, damit sein Abstand von der y-Achse
kleiner als 0,01 wird?

9. Bei fünf Rechtecken, die alle den Flächeninhalt $A = 12\,\text{cm}^2$ haben, sind die Grundlinien 3 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm und 10 cm lang. Berechne die Höhen dieser Rechtecke. Welche Proportionalität besteht zwischen Grundlinie und Höhe? Gib die Gleichung und die Definitionsmenge der Funktion an.

10. Ein glühender Eisenquader von 2 dm^2 Querschnitt und 1 m Länge wird in einem Walzwerk verformt.

a) Nach mehreren Bearbeitungsschritten ist ein Quader von 2,5 m Länge entstanden. Wie groß ist sein Querschnitt?

b) Als Endform soll eine Stange von 25 cm^2 Querschnitt hergestellt werden. Welche Länge erhält sie?

11. Ein Verkehrsflugzeug benötigt für eine bestimmte Flugstrecke $1\frac{1}{4}$ h. Für ein Sportflugzeug, dessen Geschwindigkeit um 150 km/h kleiner ist, verlängert sich die Flugzeit für dieselbe Strecke um 20 Minuten.
Wie lang ist die Flugstrecke? Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen die Flugzeuge?

12. Das Problem des Pfennigbrotes aus dem *Algorismus Ratisbonensis* (vor 1450): Wenn ein Scheffel Weizen 14 Groschen kostet, dann wird ein Brot, das für 1 Pf verkauft wird, 9 Lot schwer gebacken. Wenn der Scheffel aber teurer wird, nämlich wenn er 30 Groschen kostet, wie schwer, so wird gefragt, muss dann das 1-Pf-Brot gebacken werden?*

* Mit diesem Trick des konstanten Brotpreises kommt dem Käufer die Verteuerung weniger zum Bewusstsein. Eine gesetzliche Regulierung dafür erscheint bereits um 794 in einer karolingischen Anordnung. – Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Trockengüter, das in Oldenburg 22,8 l und in Bayern 222 l betrug. Das Lot schwankte zwischen 15,6 g und 16,6 g.