Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

Der Graph einer indirekten Proportionalität mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ unterscheidet sich von dem in Abbildung 117.1 gezeigten nur darin, dass die y-Koordinaten mit dem Faktor a multipliziert sind. Für $a > 0$ liegen die beiden Kurventeile wieder im 1. und 3., für $a < 0$ im 2. und 4. Quadranten. Jeden dieser Graphen bezeichnet man als (gleichseitige) **Hyperbel***, die beiden Teile, in welche er wegen der Definitionslücke 0 zerfällt, als **Äste** der Hyperbel.

Der Graph einer indirekten Proportionalität ist stets punktsymmetrisch zu $O(0|0)$. Aus $y = \frac{a}{x}$ folgt nämlich $-y = \frac{a}{-x}$. Daher ist mit $P(x|y)$ auch $P'(-x|-y)$ ein Punkt des Graphen. Solche Punkte P und P′ liegen aber symmetrisch zu $O(0|0)$ (vgl. Aufgabe 119/**6**). Bei der Spiegelung an $O(0|0)$ werden die beiden Hyperbeläste aufeinander abgebildet.

Aufgaben

1. Gehört die folgende Wertetabelle zu einer indirekten Proportionalität? Gib, falls dies zutrifft, den Proportionalitätsfaktor und die Funktionsgleichung an.

a)

x	3	−6	2	−9	−1	−18
y	−6	3	9	−2	18	1

b)

x	5	3	0,5	−2	−8	−15
y	−2	$-3\frac{1}{3}$	−20	5	1,25	$\frac{2}{3}$

c)

x	4	2,4	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	$-\frac{8}{9}$
y	0,36	0,6	1,08	8,64	−4,8	−1,62

2. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie zu Wertetabellen von umgekehrten Proportionalitäten. Gib jeweils auch die Funktionsgleichung an.

a)

x			1	−1	−2
y	3	2	6		

b)

x	0,25	1,2		2,7	
y	−3		1,2		450

c)

x	−5	$-3\frac{1}{3}$		$\frac{32}{41}$			$6\frac{2}{3}$
y			−8		1,44	$5\frac{5}{9}$	2,4

3. Zeichne den Graphen der durch die folgende Gleichung gegebenen Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = -\frac{2}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{2x}$ **c)** $y = (-3):(-x)$ **d)** $y = \frac{6 - 2{,}5^2}{0{,}1x}$

* ὑπερβολή (hyperbolé) = *Überschuss*. Der Name stammt von APOLLONIOS von Perge (etwa 262 bis 190 v. Chr.).

4. Gib die Gleichung der indirekten Proportionalität an, deren Graph den Punkt P enthält und zeichne den Graphen.

a) $P(2|3)$ **b)** $P(2|-3)$ **c)** $P(-5|0{,}2)$ **d)** $P(-4|-\frac{1}{8})$

•5. a) Trage in ein Koordinatensystem einen Punkt $P(a|b)$ mit $a > 0$ und dazu den Punkt $P'(-a|-b)$ ein. Beweise, dass der Ursprung $O(0|0)$ der Mittelpunkt der Strecke $[PP']$ ist.
(Verwende, falls $b \neq 0$, z. B. die Dreiecke OPP_0 und $OP'P'_0$ mit $P_0(a|0)$, $P'_0(-a|0)$.)

b) Begründe nun, dass der Graph einer indirekten Proportionalität punktsymmetrisch bezüglich $O(0|0)$ ist.

c) Ist auch der Graph einer direkten Proportionalität punktsymmetrisch zu $O(0|0)$?

6. Zeichne den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \dfrac{2}{x}$ und spiegle ihn

a) an der x-Achse, **b)** an der y-Achse.

Zu welcher Funktion gehört jeweils der gespiegelte Graph?

:7. a) Trage einen Punkt $P(u|v)$ mit $u > v > 0$ sowie den Punkt $P'(v|u)$ in ein Koordinatensystem ein. Beweise, dass P und P′ symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen.
(Benütze z. B. die Dreiecke OP_0P und OP'_0P' mit $P_0(u|0)$ und $P'_0(0|u)$.)

b) Begründe: Der Graph einer indirekten Proportionalität ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

c) Auch die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten ist Symmetrieachse des Graphen einer umgekehrten Proportionalität. Begründung!

8. a) Der Graph einer indirekten Proportionalität hat die besondere Eigenschaft, dass sich jeder seiner Äste sowohl an die x-Achse als auch an die y-Achse *anschmiegt*.

Erkläre diese Ausdrucksweise am Beispiel $y = \dfrac{1}{x}$ (Abbildung 117.1).

b) Wie groß muss bei einem Punkt des Graphen zu $y = \dfrac{2}{x}$, $x > 0$,

1) die Abszisse sein, damit sein Abstand von der x-Achse
2) die Ordinate sein, damit sein Abstand von der y-Achse
kleiner als 0,01 wird?

9. Bei fünf Rechtecken, die alle den Flächeninhalt $A = 12\,\text{cm}^2$ haben, sind die Grundlinien 3 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm und 10 cm lang. Berechne die Höhen dieser Rechtecke. Welche Proportionalität besteht zwischen Grundlinie und Höhe? Gib die Gleichung und die Definitionsmenge der Funktion an.

10. Ein glühender Eisenquader von 2 dm^2 Querschnitt und 1 m Länge wird in einem Walzwerk verformt.

a) Nach mehreren Bearbeitungsschritten ist ein Quader von 2,5 m Länge entstanden. Wie groß ist sein Querschnitt?

b) Als Endform soll eine Stange von 25 cm^2 Querschnitt hergestellt werden. Welche Länge erhält sie?

11. Ein Verkehrsflugzeug benötigt für eine bestimmte Flugstrecke $1\frac{1}{4}$ h. Für ein Sportflugzeug, dessen Geschwindigkeit um 150 km/h kleiner ist, verlängert sich die Flugzeit für dieselbe Strecke um 20 Minuten.
Wie lang ist die Flugstrecke? Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen die Flugzeuge?

12. Das Problem des Pfennigbrotes aus dem *Algorismus Ratisbonensis* (vor 1450): Wenn ein Scheffel Weizen 14 Groschen kostet, dann wird ein Brot, das für 1 Pf verkauft wird, 9 Lot schwer gebacken. Wenn der Scheffel aber teurer wird, nämlich wenn er 30 Groschen kostet, wie schwer, so wird gefragt, muss dann das 1-Pf-Brot gebacken werden?*

* Mit diesem Trick des konstanten Brotpreises kommt dem Käufer die Verteuerung weniger zum Bewusstsein. Eine gesetzliche Regulierung dafür erscheint bereits um 794 in einer karolingischen Anordnung. – Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Trockengüter, das in Oldenburg 22,8 l und in Bayern 222 l betrug. Das Lot schwankte zwischen 15,6 g und 16,6 g.