Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

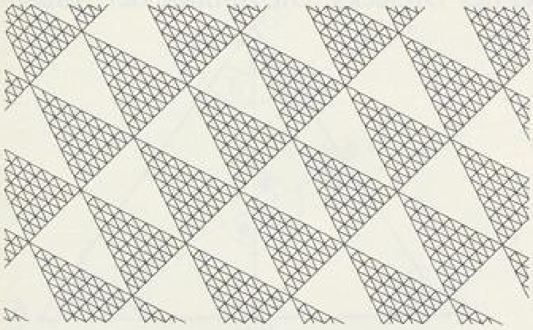
München, 2001

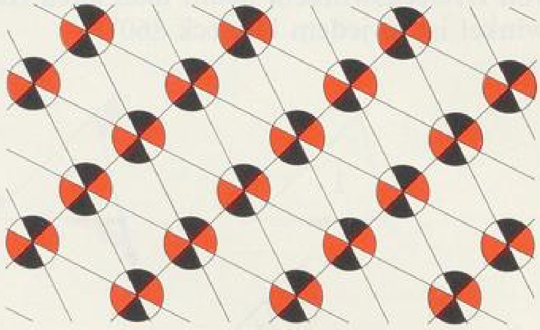
3.4 Winkelsumme im Dreieck

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

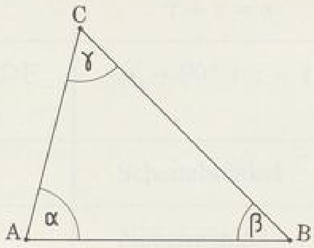
3.4 Winkelsumme im Dreieck

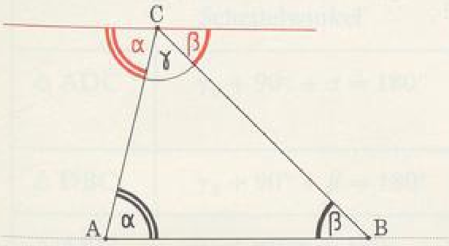
Im Bild sehen wir lauter gleiche Dreiecke, sie fügen sich lückenlos zu einem Parkett. Eignet sich jedes Dreieck zum Auslegen einer Fläche?





Bei genauerem Hinschauen merkt man, dass die drei Winkel (weiß, rot und schwarz) jedes der gezeichneten Dreiecke zusammen einen gestreckten Winkel ergeben. Offenbar taugt zum Parkettieren der Ebene jedes Dreieck, bei dem gilt: Summe der Winkel = 180°. Man sieht leicht, dass jedes Dreieck diese Eigenschaft hat:





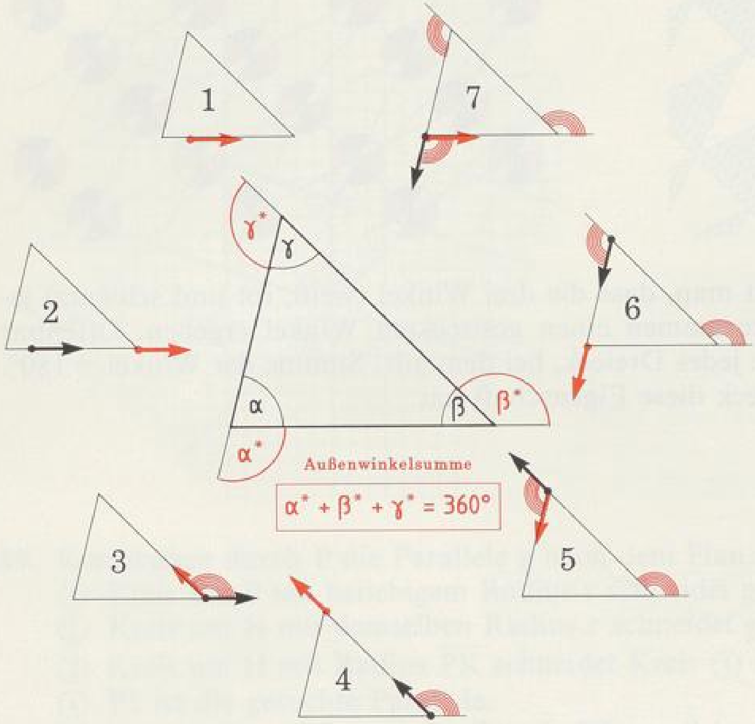
Winkelsumme

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β und γ. Durch C zeichnen wir die Parallele zu AB. Dabei entstehen bei C die Winkel α und β als Z-Winkel, sie ergeben zusammen mit γ dort einen gestreckten Winkel.

Satz:
Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck 180°.

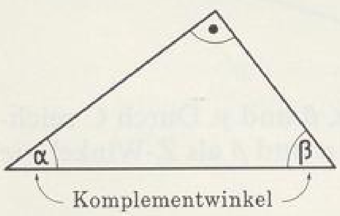
Diesen Satz kann man auch noch anders einsehen:
Ein Pfeil wandert um ein Dreieck. An jeder Ecke dreht er sich nach links um den Nebenwinkel des jeweiligen Dreieckswinkels. Schließlich erreicht er wieder die Ausgangslage, nachdem er eine volle Drehung ausgeführt hat. Diese Drehung setzt sich zusammen aus den drei Drehungen um α^*, β^* und γ^*, das heißt $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 360°$. Die Nebenwinkel von Dreieckswinkeln nennt man auch **Außenwinkel** des Dreiecks. Die Summe der Außenwinkel ist in jedem Dreieck 360°.



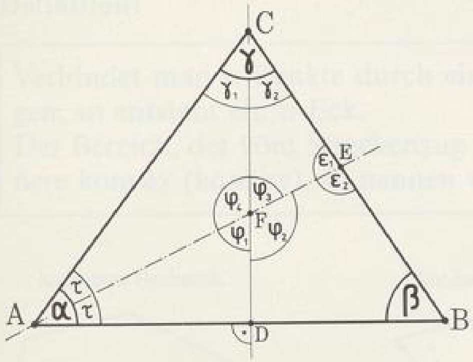
Diese Außenwinkelsumme hilft uns nun weiter:

$$\begin{aligned}
(\alpha + \alpha^*) + (\beta + \beta^*) + (\gamma + \gamma^*) &= 180° + 180° + 180° \\
\alpha + \beta + \gamma + \underbrace{\alpha^* + \beta^* + \gamma^*} &= 180° + 360° \\
\alpha + \beta + \gamma + \quad 360° \quad &= 180° + 360° \\
\alpha + \beta + \gamma &= 180°.
\end{aligned}$$

Sonderfall: Rechtwinkliges Dreieck.
Ist zum Beispiel $\gamma = 90°$, so sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.



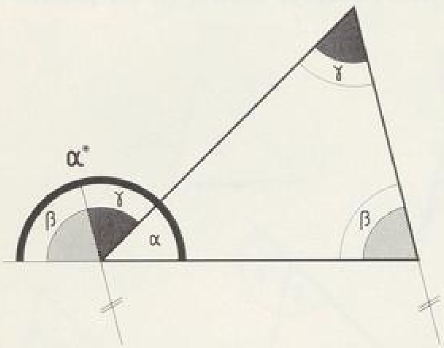
In einem Beispiel wenden wir den Winkelsummensatz an:
Im Dreieck ABC sind β und γ bekannt. Drücke alle andern Winkel mit β und γ aus.
Wir gehen immer so vor: Wir suchen Dreiecke, von denen wir zwei Winkel kennen, und berechnen den dritten.



Dreieck	Idee	Rechnung	Ergebnis
△ ABC	$\alpha+\beta+\gamma=180°$ $\tau+\tau=\alpha$	$\tau=\frac{1}{2}\alpha$	$\alpha=180°-\beta-\gamma$ $\tau=90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
△ ADF	$\varphi_1+90°+\tau=180°$	$\varphi_1=180°-90°-\tau=$ $=90°-(90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varphi_1=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_3=\varphi_1$	$\varphi_3=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varphi_2+\varphi_1=180°$ $\varphi_2=180°-\varphi_1$	$\varphi_2=180°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
	Scheitelwinkel	$\varphi_4=\varphi_2$	$\varphi_4=180°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
△ ADC	$\gamma_1+90°+\alpha=180°$	$\gamma_1=180°-90°-\alpha=$ $=90°-(180°-\beta-\gamma)$	$\gamma_1=\beta+\gamma-90°$
△ DBC	$\gamma_2+90°+\beta=180°$	$\gamma_2=180°-90°-\beta$	$\gamma_2=90°-\beta$
△ AEC	$\varepsilon_1+\gamma+\tau=180°$	$\varepsilon_1=180°-\gamma-\tau=$ $=180°-\gamma-(90°-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_1=90°+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma$
	Nebenwinkel	$\varepsilon_1+\varepsilon_2=180°$ $\varepsilon_2=180°-\varepsilon_1=$ $=180°-(90°+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma)$	$\varepsilon_2=90°-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$

Zwischen Innen- und Außenwinkeln eines Dreiecks besteht ein weiterer einfacher Zusammenhang:

Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Außenwinkel: $\alpha + \alpha^* = 180°$
$\alpha^* = \beta + \gamma.$



Satz:
Ein Außenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Übliche Bezeichnungen am Dreieck:
Die Ecken heißen A, B, C. Sie sind so angeordnet, dass man beim Wandern von A über B nach C das Innere des Dreiecks links liegen lässt.
Die Innenwinkel bei A, B und C heißen α, β und γ, zugehörige Außenwinkel heißen α^*, β^* und γ^*.
Nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt nennt man die Seiten a, b und c.