Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

3.5 Winkelsumme in Vielecken

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

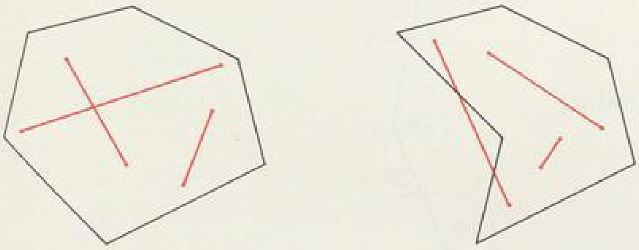
3.5 Winkelsumme in Vielecken

Vielecke heißen nach der Anzahl ihrer Ecken Dreieck, Viereck, Fünfeck, ..., n-Eck. Allgemein definieren wir:

Definition:

> Verbindet man n Punkte durch einen geschlossenen Streckenzug ohne Überschneidungen, so entsteht ein n-Eck.
> Der Bereich, der vom Streckenzug umschlossen ist, heißt Inneres des n-Ecks. Ist das Innere konvex (konkav), so nennen wir auch das n-Eck konvex (konkav).

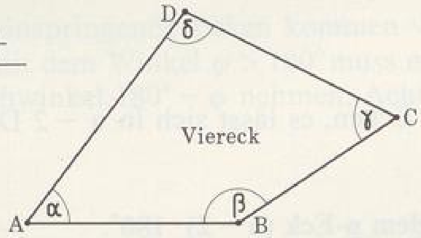
konvexes Sechseck   konkaves Sechseck

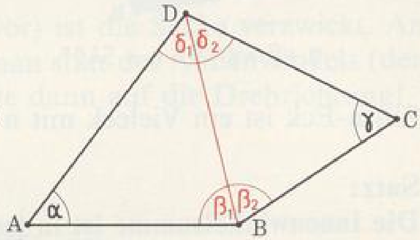


Unter der Winkelsumme in einem Vieleck versteht man die Summe der Winkelmaße. Sie errechnet sich aus der Winkelsumme im Dreieck, wenn man das Vieleck geeignet in Teildreiecke zerlegt.

Beim Viereck schaut das so aus:

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta_1 + \qquad \delta_1 = 180^\circ \\ \qquad \beta_2 + \gamma + \delta_2 = 180^\circ \quad + \\ \hline \alpha + \beta \ + \gamma + \delta \ = 360^\circ. \end{array}$$

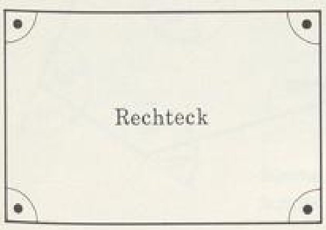




$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

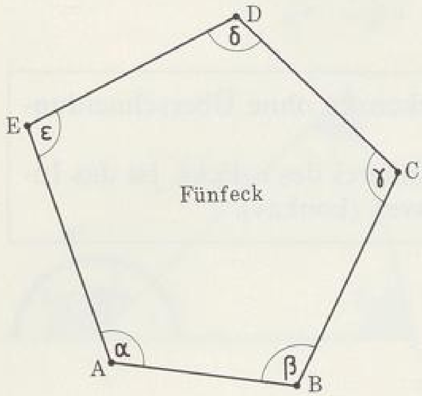
Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem Viereck 360°.

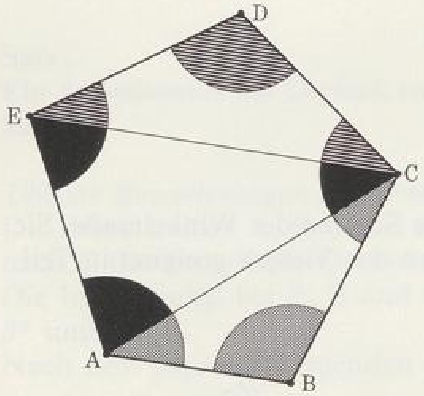
Sonderfall: Ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln, also mit vier rechten Winkeln, heißt **Rechteck.**



Jedes Fünfeck lässt sich in drei Dreiecke zerlegen; deshalb gilt der

Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem Fünfeck $3 \cdot 180° = 540°$.

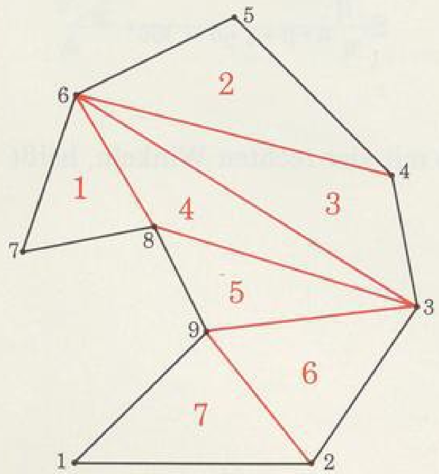




$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$

Ein n-Eck ist ein Vieleck mit n Ecken, es lässt sich in $n - 2$ Dreiecke zerlegen. Also gilt:

Satz:
Die Innenwinkelsumme ist in jedem n-Eck $(n - 2) \cdot 180°$.

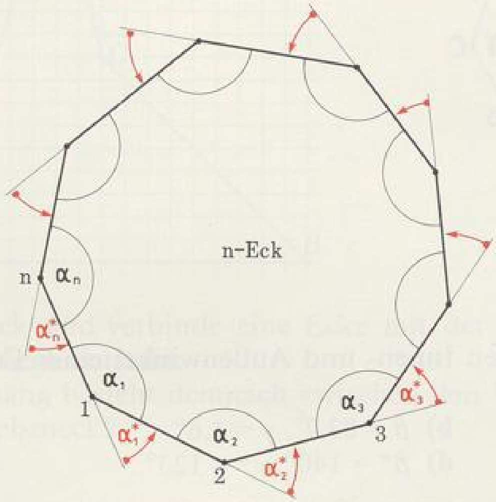


Lassen wir einen Pfeil linksrum um ein konvexes n-Eck wandern, dann dreht er sich insgesamt um 360°. Weil er sich dabei an jeder Ecke um den Außenwinkel dreht, ist wie im Dreieck die Summe der Außenwinkel 360°. Auch aus diesem Außenwinkelsummensatz folgt der Satz über die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks:

$$(\alpha_1 + \alpha_1^*) + (\alpha_2 + \alpha_2^*) + \ldots + (\alpha_n + \alpha_n^*) = n \cdot 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \underbrace{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_n^*}_{360^\circ} = (n-2) \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ$$

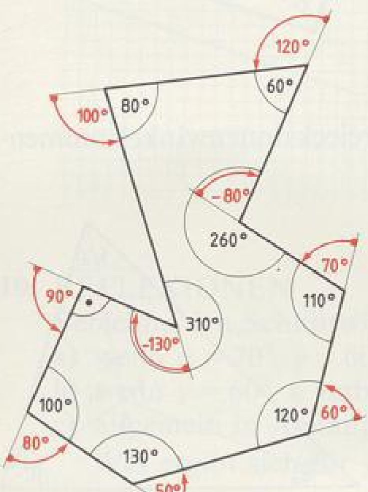
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$



Innenwinkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 180^\circ(n-2)$

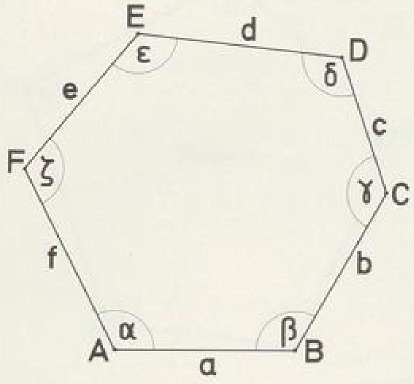
Außenwinkelsumme $\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* + \ldots + \alpha_n^* = 360^\circ$

Bei konkaven Vielecken (einspringende Ecken kommen vor) ist die Sache verzwickt. An der einspringenden Ecke mit dem Winkel $\varphi > 180^\circ$ muss man statt des Außenwinkels (den es dort nicht gibt) als Drehwinkel $180^\circ - \varphi$ nehmen. Achte dann auf die Drehrichtung!



Summe: 1260°
Summe: 360°

Übliche Bezeichnungen am Vieleck:
Die Eckpunkte bezeichnet man meist in alphabetischer Reihenfolge mit A, B, C …, sodass beim Wandern von A nach B usw. das Innere des Vielecks immer links liegt. Die Innenwinkel heißen bei A beginnend der Reihe nach α, β, γ, … Anders als beim Dreieck nennt man die Seiten bei A beginnend a, b, c, …



Aufgaben zu 3.4 und 3.5

1. Berechne die restlichen Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks, von dem bekannt ist:
a) $\alpha = 35°, \beta = 135°$ **b)** $\beta = 83{,}7°, \gamma = 1{,}6°$
c) $\alpha = 24°, \beta^* = 42°$ **d)** $\beta^* = 140°, \gamma^* = 123°$.

•**2.** Gibt es ein Dreieck mit
a) $\alpha = 90°, \beta^* = 90°$ **b)** $\alpha + \beta = 95°, \beta + \gamma = 85°$
c) $\alpha^* = 90°, \alpha + \beta = 170°$ **d)** $\alpha^* = \beta^* = 60°$?

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist
a) $\alpha = 53°$ **b)** $\alpha = \beta$ **c)** $\alpha = 199\beta$ **d)** $\alpha^* = 90°$ **e)** $\alpha = 2\beta$.
Wie groß ist β?

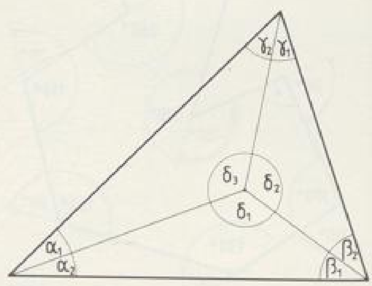
4. In einem Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist
a) $\gamma = 40°$ **b)** $\gamma = 3\alpha$ **c)** $\beta + \gamma = 140°$ **d)** $\alpha = \gamma$.
Wie groß ist α?

5. TRUGSCHLUSS
Geobold hat einen scha(r)fsinnigen Beweis für den Dreiecksinnenwinkelsummensatz.
Σ = Winkelsumme im Dreieck

$$\underbrace{\alpha_2 + \beta_1 + \delta_1}_{\Sigma} + \underbrace{\beta_2 + \gamma_1 + \delta_2}_{\Sigma} + \underbrace{\gamma_2 + \alpha_1 + \delta_3}_{\Sigma} = 3\Sigma$$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\alpha} + \underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\beta} + \underbrace{\gamma_1 + \gamma_2}_{\gamma}}_{\Sigma} + \underbrace{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}_{360°} = 3\Sigma$$

$$\begin{aligned} \Sigma + 360° &= 3\Sigma \\ 360° &= 2\Sigma \\ 180° &= \Sigma \end{aligned}$$



Was ist faul? – Was hat er wirklich bewiesen?