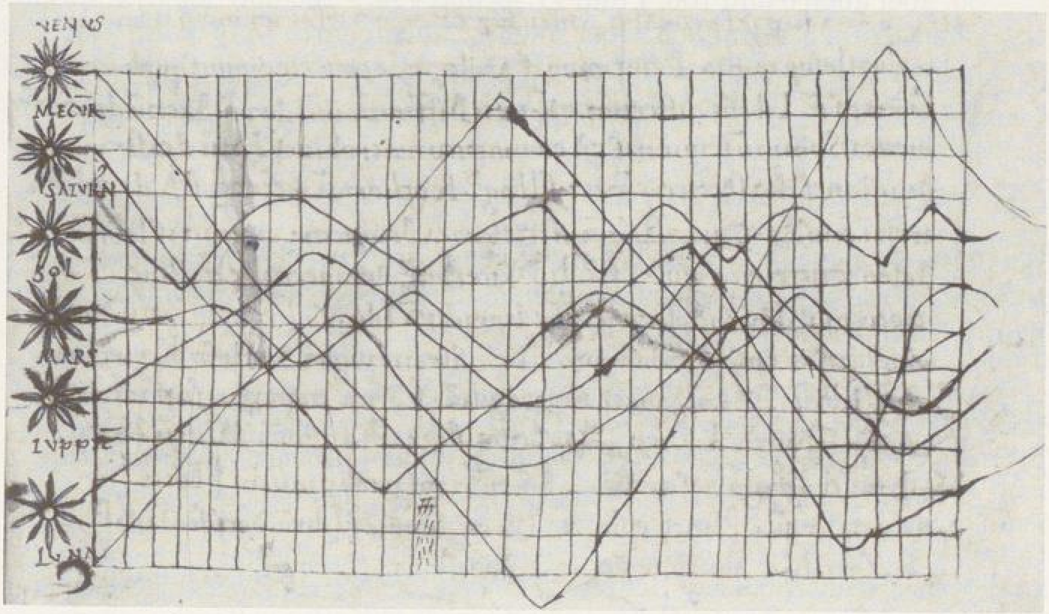
Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6 Lineare Gleichungssysteme

6 Lineare Gleichungssysteme



Der älteste bekannte Versuch, die zeitliche Veränderung von Werten graphisch darzustellen

Vermutlich handelt es sich um eine Darstellung der Bewegung der 5 damals bekannten Planeten (Venus, Merkur, Saturn, Mars und Jupiter), der Sonne und des Mondes bezüglich der Ekliptik, d. h. des Kreises, in dem die Erdbahnebene die Himmelskugel schneidet*. Nach rechts ist die Zeit abgetragen, wobei für jeden Himmelskörper die Zeiteinteilung eine andere ist. Die Hochwerte stellen die sog. ekliptikale Breite dar; die mittlere waagrechte Linie ist die Ekliptik selbst. Die Darstellung stammt aus dem 10. oder 11. Jh.; sie ist enthalten im *De cursu per zodiacum* – »Über den Lauf durch den Tierkreis«. Das Gitternetz misst im Original 15,3 cm × 8,9 cm. Cod. lat. mon. 14436

* Der Name rührt davon her, dass sich auf diesem Kreis die Eklipsen, d. h. die Sonnen- und Mondfinsternisse ereignen. – ἔκλειψις (ékleipsis) = Ausbleiben, Verschwinden.

6 Lineare Gleichungssysteme

6.1 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Bisher ging es beim Lösen von Gleichungen fast immer darum, den Wert einer einzigen zunächst unbekannten Zahl zu bestimmen. Es gibt aber auch viele Aufgaben, bei denen nach zwei oder mehr Zahlen gefragt wird.

Beispiel 1:

Gesucht sind zwei Zahlen mit der Summe 100.
Es wird dir leicht gelingen, solche Zahlen zu finden, zum Beispiel 50 und 50, aber auch 0 und 100, 1 und 99, $4\frac{1}{7}$ und $95\frac{6}{7}$, -200 und 300 usw. Es gibt offensichtlich unendlich viele solche Zahlenpaare. Man kann eine der beiden Zahlen völlig willkürlich wählen; die andere liegt dann fest. Bezeichnet man die eine Zahl mit x, die andere mit y, so muss folgende Gleichung gelten:

$x + y = 100.$

Bei Beispiel 1 handelt es sich um eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Ebenso kann man natürlich auch Gleichungen aufstellen, die noch mehr Unbekannte enthalten.

Beispiele:

2) $5x - 7y + 3z - 6 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)
3) $w + 2x + 3y + z = 7$ (Gleichung mit den vier Unbekannten w, x, y, z)
4) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)

In allen derartigen Fällen spricht man von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
Eine Lösung einer Gleichung mit mehreren Unbekannten kann natürlich nicht aus einer einzigen Zahl bestehen. Man muss vielmehr *jede* der auftretenden Unbekannten so durch eine Zahl ersetzen, dass die Gleichung erfüllt ist. Lösungen einer Gleichung mit zwei Unbekannten sind also Zahlenpaare, solche einer Gleichung mit drei Unbekannten Zahlentripel usw.
So sind die Zahlenpaare $(50|50)$, $(0|100)$, $(1|99)$ usw. Lösungen der Gleichung von Beispiel 1.
Die Zahlentripel $(0|0|2)$, $(2|1|1)$ und $(1|-1|-2)$ sind Lösungen der Gleichung von Beispiel 2. Prüfe dies nach und suche noch weitere Lösungen.
Bei einer Lösung kommt es wesentlich auf die Reihenfolge der einzelnen Zahlen an. Zum Beispiel ist $(2|1|1)$ eine Lösung von Beispiel 2, während $(1|2|1)$ keine Lösung darstellt. Denn die Reihenfolge der Zahlen muss genau der (in diesem Fall alphabetischen) Reihenfolge der Unbekannten entsprechen, für

die sie einzusetzen sind. Man spricht daher von geordneten Paaren, geordneten Tripeln usw., allgemein bei n Unbekannten von geordneten n-Tupeln von Zahlen*. Da in der Mathematik die Begriffe Paar, Tripel, …, n-Tupel nur für geordnete Mengen verwendet werden, verzichten wir in Zukunft auf den Zusatz »geordnet«.

> **Definition 123.1:** Unter einer Lösung einer Gleichung mit n Unbekannten versteht man ein ***n*-Tupel** von Zahlen, das die Gleichung erfüllt, d.h., sie beim Einsetzen zu einer wahren Aussage macht.

**Zur Geschichte

Wie du weißt, ist Algebra vor mehr als 4000 Jahren in Babylon und fast gleichzeitig in Ägypten aus Problemen des Alltags, den sog. Textaufgaben, entstanden. Da nimmt es nicht wunder, dass sich darunter auch Aufgaben finden, zu deren Lösung man mehrerer Unbekannter bedarf. Die Babylonier führten daher zur ersten Unbekannten (usch) = *Länge* noch ein zweite ein, und zwar, was nicht überrascht, (sag) = *Breite* (Aufgabe 145/**19**). Erstaunlicherweise sind uns von den Ägyptern nur wenige Aufgaben mit 2 Unbekannten überliefert, die überdies von so einfacher Natur sind, dass man die zweite gesuchte Größe sofort durch die erste ausdrücken konnte (Aufgabe 131/**7**), so wie du es auch in der 7. Klasse gemacht hast. Auch die Griechen umgehen fast immer das Rechnen mit mehreren Unbekannten. Zwar spricht DIOPHANT (um 250 n. Chr.) in seinen Aufgaben von der *ersten* (ὁ $\alpha^{ος}$), der *zweiten* (ὁ $\beta^{ος}$), der *dritten* (ὁ $\gamma^{ος}$) usw. – gemeint war immer »Zahl« –, aber er drückt sie alle, oft recht raffiniert, durch seine Unbekannte ς′ aus, sodass er doch wieder nur mit einer Gleichung mit einer Unbekannten rechnen muss. Die Idee, für weitere unbekannte Größen eigene Namen und Zeichen einzuführen, hatten $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende nach den Babyloniern erst wieder die Inder: Sie gaben ihnen die Namen von Farben. Als Zeichen verwendeten sie die Anfangssilbe. So findet man bei BRAHMAGUPTA (598– nach 665) neben seinem या = *yā* (für die 1. Unbekannte) का = *kā* (von kālika = schwarz), नी = *nī* (von nīlaka = blau), पी = *pī* (von pītaka = gelb) und लो = *lo* (von lohitaka = rot) usw. Das war recht bequem! Umso mehr erstaunt es uns, dass die Araber als gelehrige Schüler der Inder sich fast gar nicht mit Gleichungen mit mehreren Unbekannten beschäftigten. Und da wir Europäer die Schüler der Araber sind, hat es lange gedauert, bis wir aus eigenen Stücken mit mehreren Unbekannten umzugehen lernten. LEONARDO VON PISA, gen. FIBONACCI (um 1170 – nach 1240), benennt sie mit *causa* = *Sache* und *res* = *Ding*. Eine grundlegend neue Idee hatte Michael STIFEL (1487 (?) – 1567), als er 1544 in seiner *Arithmetica integra* zur Unbekannten noch 1A, 1B, 1C als weitere Unbekannte einführt und mit ihnen sogar rechnet: *3A in 9B, fiunt 27AB*, d.h., 3A · 9B = 27AB. Das bringt den französischen Mönch Johannes BUTEO (1492 Charpey – 1564/72 Romans-

* Diesen Wortbildungen liegen die lateinischen Verhältniszahlen zugrunde. Simplus, duplus, triplus, quadruplus, quintuplus, sextuplus, septuplus und octuplus … (einmal so groß, zweimal so groß, dreimal so groß, …) ließen im Deutschen das wenig gebrauchte *Dupel* für ein Paar und die Wörter *Tripel*, *Quadrupel*, *Quintupel*, *Sextupel* usw. entstehen, denen man dann verallgemeinernd das *n-Tupel* anschloss.

sur-Isère) dazu, gleich mit A, B und C zu rechnen (Aufgabe 149/**20**). Simon STEVIN (1548–1620) greift gewissermaßen wieder DIOPHANT auf, wenn er 1585 in seiner *L'arithmétique* die Unbekannten der Reihe nach mit ①, *sec* ①, *ter* ①, *quart* ① bezeichnet. 1591 erzielt jedoch François VIÈTE (1540–1603) mit seiner *In artem analyticem Isagoge* den Durchbruch: Sowohl für bekannte wie auch für unbekannte Größen werden Buchstaben verwendet, und es wird mit ihnen gerechnet! Sein an sich vernünftiger Vorschlag, für die Unbekannten die Vokale A, E, I, O, U und Y, für die Bekannten die Konsonanten zu verwenden, wird durch die bequemere Schreibweise abgelöst, die 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* ohne weitere Begründung einführte, nämlich, bekannte Größen mit $a, b, c \dots$, unbekannte mit x, y, z zu bezeichnen, wobei er anfänglich noch zur logischen Reihenfolge z, y, x neigte.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlenpaare sind Lösungen der Gleichung $2x - 3y + 1 = 0$?
$(0|0)$, $(2|-5)$, $(4|3)$, $(3|4)$, $(0|\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}|0)$, $(-\frac{1}{2}|\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}|0)$.

2. Fülle in den Klammern die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlenpaare Lösungen der Gleichung $y = 3x + 5$ sind.
$(1|\;)$, $(\;|20)$, $(-7|\;)$, $(\frac{1}{3}|\;)$, $(\;|0)$, $(\;|5)$, $(1{,}2|\;)$, $(\;|5{,}7)$.

3. Welche der folgenden Zahlentripel sind Lösungen der Gleichung $5x - 2y = 2z + 4$?
$(0|0|0)$, $(4|3|5)$, $(4|5|3)$, $(5|4|3)$, $(-2|5|-12)$, $(-2|-12|5)$, $(2|12|5)$, $(2|12|-9)$.

4. Fülle die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlentripel Lösungen der Gleichung $7x - 6y - z = 0$ sind.
$(0|\;|0)$, $(0|1|\;)$, $(\;|1|1)$, $(\;|-1|-13)$, $(5|-2{,}5|\;)$, $(\frac{1}{3}|\;|-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}|-\frac{2}{3}|\;)$, $(\;|\frac{1}{3}|-\frac{2}{3})$.

5. Bestimme für die Gleichung $w + 2x - 9y + 3z = 6$ eine Lösung,
a) in der keine Null vorkommt, **b)** die nur ganze Zahlen enthält,
c) die nur natürliche Zahlen, **d)** die nur negative Zahlen enthält.

6. Wie lauten sämtliche aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehenden Lösungen der Gleichung $x + y + z = 1$?

7. Bestimme diejenige Lösung der Gleichung $4x - 11y - 3z = 20$, die aus drei gleichen Zahlen besteht.

8. Bestimme sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen:
a) $(x-1)^2 + y^2 = 0$ **b)** $(x-3)^4 + (y+1)^2 + (z-0{,}5)^6 = 0$

•**9.** Untersuche die Lösbarkeit der folgenden Gleichungen, wobei als Grundmenge zuerst die Menge der ganzen, dann die Menge der rationalen Zahlen gewählt sei.
a) $3x = 7$ **b)** $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2}{5}$ **c)** $x^2 + 1 = 0$ **d)** $2x + 4y = 1$ **e)** $7x - 11y = 1$

6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten

In den Gleichungen der Beispiele 1, 2 und 3 des vorausgehenden Abschnitts kommen die Unbekannten jeweils nur in der ersten Potenz vor. Solche Gleichungen bezeichnet man bekanntlich als linear. Allgemein hat also eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten die Gestalt $ax + by = c$, mit drei Unbekannten die Gestalt $ax + by + cz = d$, usw. Man nennt a, b, c bzw. a, b, c, d die Koeffizienten der Gleichung.
Eine Gleichung stellt die Aufgabe, ihre sämtlichen Lösungen zu bestimmen. Diese bilden die Lösungsmenge L.

Beispiele:

$3x - 5y = 1 \qquad L = \{(x|y) | 3x - 5y = 1\}$

$5x - 7y + 3z - 6 = 0 \qquad L = \{(x|y|z) | 5x - 7y + 3z - 6 = 0\}$

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung überblickt man am besten, wenn man die Gleichung nach einer der Unbekannten auflöst. Dazu benötigt man nur die Addition eines Terms und die Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl. Bei diesen Schritten handelt es sich, wie wir schon wissen, um Äquivalenzumformungen, bei denen sich also die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
5x - 3y + 2z &= 7 && \| -5x + 3y \\
2z &= -5x + 3y + 7 && \| \cdot \tfrac{1}{2} \\
z &= -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dass man für x und y beliebige Zahlen wählen darf; der dazugehörige Wert für z ist dann durch die Gleichung eindeutig bestimmt. So ergibt sich etwa
für $x = 2$ und $y = 4$ der Wert $z = \frac{9}{2}$, also die Lösung $(2|4|\frac{9}{2})$,
für $x = -1$ und $y = 10$ der Wert $z = 21$, also die Lösung $(-1|10|21)$,
für $x = 0$ und $y = \frac{1}{6}$ der Wert $z = \frac{15}{4}$, also die Lösung $(0|\frac{1}{6}|\frac{15}{4})$, usw.
Man kann die Lösungsmenge dieser Gleichung also auch so schreiben:
$L = \{(x|y|z) | x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\}$

In ganz entsprechender Weise lässt sich die Lösungsmenge jeder linearen Gleichung schreiben.
Bei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man die Lösungsmenge in einfacher Weise geometrisch veranschaulichen. Man deutet jede Lösung $(x|y)$ als Punkt $(x|y)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die so erhaltene Punktmenge ist der Graph der durch die Gleichung $ax + by = c$ beschriebenen Relation. Falls der Koeffizient b von null verschieden ist, kann man die Gleichung nach y auflösen und die Lösungsmenge in der Form

$L = \left\{(x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\}$ darstellen. Daraus erkennt man, dass L aus allen Wertepaaren der linearen Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ besteht, die sich als Punkte einer Geraden graphisch darstellen lassen.
Im Falle $b = 0 \wedge a \neq 0$ kann man die Gleichung nach x auflösen und erhält $x = \frac{0}{a}y + \frac{c}{a}$, also $x = \frac{c}{a}$. Die ausführlichere Schreibweise zeigt, dass man für y jede beliebige Zahl wählen kann; der davon unabhängige x-Wert liegt eindeutig fest. Es gilt also $L = \left\{(x|y) \,\middle|\, x = \frac{c}{a} \wedge y \in \mathbb{Q}\right\}$. Man erkennt leicht, dass die entsprechenden Punkte auf einer Parallelen zur y-Achse, also wieder auf einer Geraden liegen.
Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den praktisch unbedeutenden Fall $a = b = 0$, also die Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ betrachten. Die linke Seite ist für beliebige Werte von x und y stets null. Falls $c \neq 0$ gilt, liegt also immer eine falsche Aussage vor. Ist jedoch $c = 0$, so ist jedes Paar $(x|y)$ eine Lösung.
Der Lösungsbaum von Abbildung 126.1 veranschaulicht diese Fallunterscheidung.

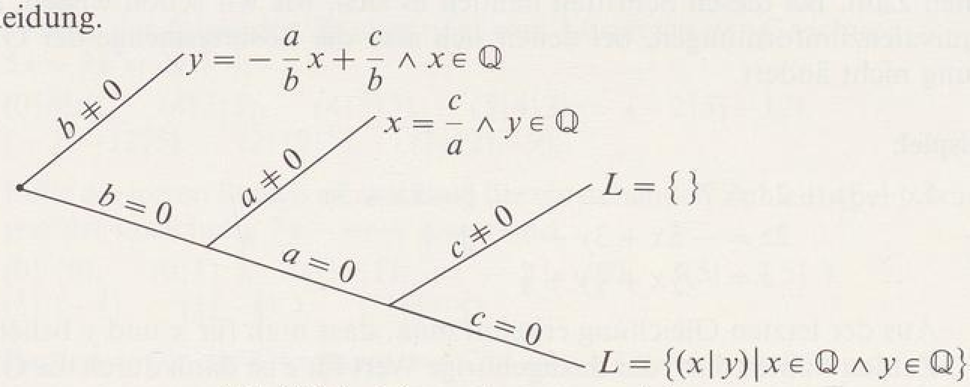


Abb. 126.1 Lösungsbaum zu $ax + by = c$

Wir halten fest:

Satz 126.1: Eine lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $(a|b) \neq (0|0)$ beschreibt eine Relation, deren Graph aus Punkten einer Geraden besteht.

Dieser Satz bedeutet, dass zu jeder Gleichung $ax + by = c$, bei der mindestens einer der Koeffizienten bei x und y von 0 verschieden ist, im Koordinatensystem eine Gerade g gehört. Man sagt auch, die Gerade g habe die Gleichung $ax + by = c$. Abbildung 127.1 zeigt die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$, also die Gerade mit dieser Gleichung. Um sie zu zeichnen, genügt es, zwei Lösungen zu berechnen und die entsprechenden Punkte in das Koordinatensystem einzutragen. Zweckmäßigerweise bestimmt man zur Kontrolle noch einen dritten Punkt.

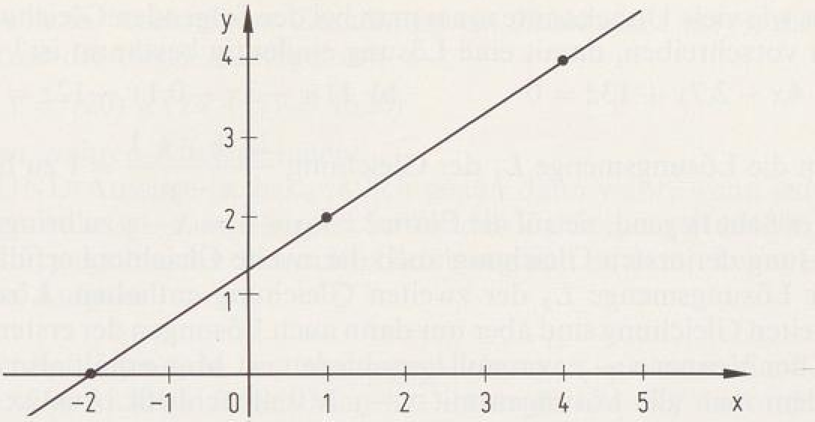


Abb. 127.1 Veranschaulichung der Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Lösungsmengen folgender Gleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:
a) $x + 2y - 3 = 0$ **b)** $5x - 3y = 0$ **c)** $x - 5y - 5 = 0$
d) $10x + 3y = 20$ **e)** $1{,}2x + 0{,}5y = 0{,}7$ **f)** $3x + 1\frac{5}{7} \cdot y = -6$

2. Unter den Lösungen einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kommen im Allgemeinen solche von der Form $(s|0)$ bzw. $(0|t)$ vor. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die zugehörigen Punkte?

3. Was kann man über die Koeffizienten der Gleichung $ax + by + c = 0$ aussagen, wenn ihre Lösungsmenge das Paar $(0|0)$ enthält?

4. Veranschauliche die Lösungsmenge der Gleichung $x + y = 1$. Gibt es Lösungen dieser Gleichung mit der Eigenschaft
a) $x > 0 \wedge y > 0$ **b)** $x < 0 \wedge y < 0$
c) $x \geqq 1 \wedge y \geqq 1$ **d)** $|x| > 1 \wedge |y| > 1$?

5. Es besteht ein begrifflicher Unterschied zwischen der Gleichung $x = 1$ (Gleichung mit *einer* Unbekannten) und der Gleichung $x + 0 \cdot y = 1$ (Gleichung mit *zwei* Unbekannten). Wie zeigt sich dieser Unterschied in den Lösungsmengen? Veranschauliche die Lösungsmengen der Gleichungen $x + 0 \cdot y = 1$ und $0 \cdot x + y = 2$.

6. Zeige, dass die folgende Gleichung zu einer linearen Gleichung äquivalent ist, und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
a) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (5 - y)^2$
b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x^2 + 2) + (y^2 + 3)$

7. Beschreibe die Lösungsmengen möglichst übersichtlich:
a) $x + y + z = 0$ **b)** $x + 3y - 7z = 8$ **c)** $2x + y = 3y + 4z$
d) $2(x - 3) + 4(x + y) = 7(2x - y)$ **e)** $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2$

8. Für wie viele Unbekannte muss man bei den folgenden Gleichungen Zahlen vorschreiben, damit eine Lösung eindeutig bestimmt ist?

a) $4x - 2{,}7y + 13z = 0$ **b)** $11w - 3x - 0{,}1y - 12z = 17$

•9. Um die Lösungsmenge L_1 der Gleichung $\dfrac{2x + y + 1}{x - y} = 1$ zu bestimmen, ist es nahe liegend, sie auf die Form $2x + y + 1 = x - y$ zu bringen. Da jede Lösung der ersten Gleichung auch die zweite Gleichung erfüllt, ist L_1 in der Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung enthalten. Lösungen der zweiten Gleichung sind aber nur dann auch Lösungen der ersten, wenn für sie der Nenner $x - y$ von null verschieden ist. Man erhält also L_1 aus L_2, indem man alle Lösungen mit $x - y = 0$ ausschließt. Aus $2x + y + 1 = = x - y \Leftrightarrow x = -2y - 1$ folgt $L_2 = \{(x|y) \mid y \in \mathbb{Q} \wedge x = -2y - 1\}$. Die einzige Lösung aus L_2 mit $x - y = 0$ oder $x = y$ ist $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Es ergibt sich daher

$$L_1 = \{(x|y) \mid y \neq -\tfrac{1}{3} \wedge x = -2y - 1\}.$$

Bestimme in derselben Weise die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\dfrac{x + y}{x - 1} = 5$ **b)** $\dfrac{8x - y}{2y + 3} = 0$

c) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{y + 2} = 0$ **d)** $\dfrac{x^2 + 2x - y}{x^2 + 1} = 1$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten sind meistens auch mehrere Bedingungen zu beachten, welche die gesuchten Zahlen erfüllen müssen.

Beispiel:

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3 kg Äpfel und 1 kg Birnen kauft und dafür 7,20 € bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 2 kg Äpfel und 5 kg Birnen derselben Sorten 15,20 €. Auf dem Heimweg versucht Hans den Preis für 1 kg jeder Sorte herauszufinden. Um diese nicht ganz leichte Aufgabe mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir den Preis für 1 kg Äpfel mit x Cent, den Preis für 1 kg Birnen mit y Cent. Aus den von Hans beobachteten Einkäufen zweier Kunden ergeben sich zwei Bedingungen für x und y.

1. Kunde: $3x + y = 720$
2. Kunde: $2x + 5y = 1520$

Wir erhalten also zwei Gleichungen für x und y. Die gesuchten Zahlen müssen *beide* Gleichungen *zugleich* erfüllen. Man kann diesen Sachverhalt auch so beschreiben: Gesucht ist ein Zahlenpaar $(x|y)$, das beim Einsetzen die UND-Aussageform

$(3x + y = 720) \wedge (2x + 5y = 1520)$

zu einer wahren Aussage macht.
Eine UND-Aussage ist bekanntlich genau dann wahr, wenn jede Teilaussage wahr ist. Zum Beispiel erfüllt das Zahlenpaar $(140|300)$ zwar die erste, jedoch nicht die zweite Gleichung und ist damit keine Lösung unserer Aufgabe.

UND-Verknüpfungen von Bestimmungsgleichungen spielen in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle. Man hat daher für sie eine besondere Bezeichnung eingeführt:

Definition 129.1: Eine UND-Verknüpfung von zwei oder mehr Gleichungen für dieselben Unbekannten bezeichnet man als **Gleichungssystem**.*
Falls alle Gleichungen linear sind, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**.

Es ist üblich, die einzelnen Gleichungen eines Gleichungssystems übersichtlich untereinander zu schreiben; auf das Verknüpfungszeichen $\wedge$ kann man dabei verzichten. Oft werden die Gleichungen auch noch durchnummeriert.

Beispiele:

1) I $3x + y = 720$
II $2x + 5y = 1520$
System von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; linear

2) I $2x + 5y - z = 0$
II $3x - y + z + 1 = 0$
System von zwei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear

3) I $x^2 + y^2 = 1$
II $x + y = 1$
III $x - y = 1$
System von drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; nicht linear

4) I $x + y = 3$
II $x + z = 4$
III $y + z = 5$
System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear

Wie die Beispiele zeigen, kann in einem Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen größer, gleich oder kleiner als die Anzahl der Unbekannten sein. In der Regel wird die Zahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten übereinstimmen. Beispiel 4 lässt erkennen, dass nicht alle Unbekannten in jeder Gleichung tatsächlich auftreten müssen. Man hat sich in einem solchen Fall vorzustellen, dass die fehlenden Unbekannten den Koeffizienten null haben.

* *τὸ σύστημα* (tò sýstema) = Vereinigung, Gesamtheit, das Ganze

Unabhängig von der Zahl der Gleichungen besteht eine Lösung eines Gleichungssystems immer aus so vielen Zahlen wie Unbekannte in dem System vorkommen. So ist z. B. $(-1|1|3)$ eine Lösung für Beispiel 2; jede der zwei Gleichungen mit drei Unbekannten wird von diesem Tripel erfüllt. Ebenso ist $(1|0)$ eine Lösung für Beispiel 3, da jede der drei Gleichungen mit zwei Unbekannten dieses Zahlenpaar als Lösung hat. Allgemein ist eine Lösung eines Systems von m Gleichungen für n Unbekannte ein n-Tupel von Zahlen, das jede der m Gleichungen des Systems erfüllt. Es muss also in jeder der Lösungsmengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ der einzelnen Gleichungen enthalten sein. Umgekehrt ist ein n-Tupel, das Element jeder dieser Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ist, auch stets eine Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ist daher die Schnittmenge der Lösungsmengen sämtlicher Einzelgleichungen:

$$L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m.$$

Bei einem Gleichungssystem für nur zwei Unbekannte kann man die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen in der Koordinatenebene veranschaulichen und ihre Schnittmenge L auf graphischem Wege bestimmen (graphisches Lösungsverfahren).

Wir kehren zurück zu unserem einleitenden

Beispiel: I $3x + y = 720$
II $2x + 5y = 1520$

Da es sich um ein lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte handelt, kann man die Lösungsmengen L_1 und L_2 der einzelnen Gleichungen durch zwei Geraden g_1 und g_2 graphisch darstellen (Abbildung 130.1). Der Schnittmenge von L_1 und L_2 kann dabei nur der Schnittpunkt S der beiden Geraden entsprechen. Die Abbildung lässt vermuten, dass er die Koordinaten $x = 160$ und $y = 240$ hat. Setzt man diese Werte in I und II ein, so zeigt sich, dass tatsächlich beide Gleichungen erfüllt sind.

Ergebnis: 1 kg Äpfel kostete 1,60 €, 1 kg Birnen 2,40 €.

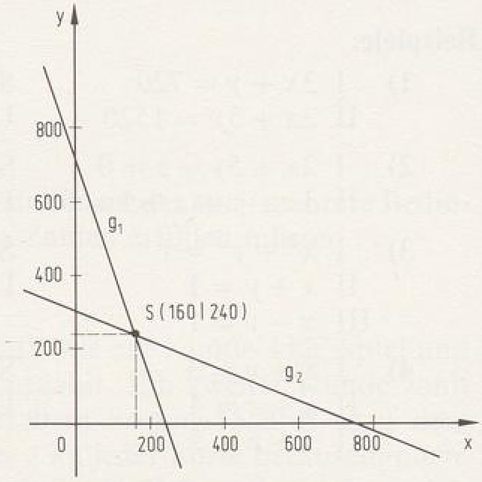


Abb. 130.1 Graphische Lösung* zum nebenstehenden Beispiel

* Den Fachausdruck *graphische Lösung* benutzt 1833 August Leopold CRELLE (1780–1855). – Siehe auch die Fußnote auf Seite 159.

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden UND-Verknüpfungen von Gleichungen in der für Gleichungssysteme üblichen Form an.

a) $(x-2y+3=0) \wedge (2x=4y-5)$
b) $(5x+3y-8z=10) \wedge (2x=y+7) \wedge (y=z)$
c) $(2x+4y-1=0) \wedge (x-3y=7) \wedge (5x+y-11=0)$
d) $(w+x=0) \wedge (w+x+y=0) \wedge (w+x+y+z=0)$

2. Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lineare Systeme?

a) $3x-2y=(-1)^2$
$x+y=|-4|$

b) $x\cdot(2-y)+1=0$
$(3x+y)\cdot 2-1=0$

c) $\dfrac{4x+3y}{(3{,}5)^2}=2$
$\dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{x+3y}{2}$

d) $|x|-5|y|=-12$
$2|x|+|y|=8$

3. Für die Lösungsmengen der zwei Gleichungen eines Systems mit drei Unbekannten gilt
$L_1 \supset \{(0|1|3), (2|-1|4), (1|1|1), (-7|-2|0)\}$ und
$L_2 \supset \{(2|2|2), (0|-1|3), (-7|0|-2), (2|-1|4)\}$.
Welche dieser Tripel sind Lösungen des Gleichungssystems?

4. Für die Lösungsmenge der ersten von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt $L_1=\{(0|0), (1|2), (2|3), (3|2)\}$. Die zweite Gleichung lautet $y=x+1$. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

5. Die folgenden linearen Gleichungssysteme sind von besonders einfacher Bauart. Bestimme ihre Lösungsmengen.

a) $x=1$
$x+y=2$

b) $y=2$
$x-y=1$

c) $3x=5$
$6x-2y=7$

d) $11x+7y=0$
$13y=0$
$z+2=0$

e) $x=-1$
$y=2$
$5x-4y+2z=1$

f) $x=2$
$x+y=2$
$x+y+z=0$

6. Ermittle die Lösungsmengen der folgenden nicht linearen Gleichungssysteme.

a) $x\cdot y=0$
$y=4$

b) $x\cdot y=0$
$x+y=4$

c) $x\cdot y=0$
$y^2=4$

d) $x\cdot y=0$
$x^2+y^2=4$

e) $(x-1)(y+1)=0$
$2x-3y=5$

f) $(2x+8)(5-4y)=0$
$x\cdot y=1$

7. Aufgabe 6 des *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr., Ägypten):
Berechne die Länge und Breite eines Rechtecks der Fläche 12, wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge ist.

8. Bestimme graphisch die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme und mache durch Einsetzen die Probe.

a) $x - y = -1$
$x + y = 3$

b) $x - 3y - 4 = 0$
$4x - y + 6 = 0$

c) $x + 2y = 0$
$2x - y = 5$

d) $x + y = x - 3$
$4x = y + 5$

e) $\frac{x+y}{x} = 2$
$x + y = 1$

f) $\frac{5x - 2y + 1}{x + y} = 0$
$\frac{2x + 5y - 14}{x + 2} = 1$

Verwende zum Lösen der bei den Aufgaben **9** bis **12** auftretenden Gleichungssysteme das graphische Verfahren und mache die Probe.

9. Vor drei Jahren war Hans fünfmal so alt wie sein Bruder Otto; in drei Jahren wird er gerade doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden heute? (Maßstab: 1 Jahr $\hat{=}$ 5 mm)

10. Zählt man zum Dreifachen einer ersten Zahl das Fünffache einer zweiten, so erhält man -1. Zieht man jedoch vom Fünffachen der ersten das Dreifache der zweiten Zahl ab, so ergibt sich -13. Wie heißen die beiden Zahlen?

• **11.** Addiert man zu einer zweistelligen Zahl ihre Quersumme, so erhält man 50. Vertauscht man dagegen die beiden Ziffern, so erhält man eine um 9 kleinere Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

12. a) $x + y = 5$
$3x - 2y = 0$
$x - 4y = -10$

b) $4x - 5y = 10$
$2x + y = -2$
$-x + 1{,}25y = 1$

c) $2x + 5y = 6$
$y = 3 - 0{,}4x$
$\frac{1}{3}x + 1 = 2 - \frac{5}{6}y$

6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

6.4.1 Bestimmung der Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kann im Koordinatensystem durch eine Gerade veranschaulicht werden. Daraus lassen sich leicht genauere Angaben über die bei einem System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten möglichen Typen von Lösungsmengen gewinnen. Wir bezeichnen wieder die den Lösungsmengen L_1, L_2 der beiden Gleichungen entsprechenden Geraden mit g_1, g_2. Dann gehört zu jeder Lösung $(x \mid y)$ des Gleichungssystems ein Punkt $(x \mid y)$, der sowohl auf g_1 als auch auf g_2 liegen muss. Da nun aber zwei Geraden der Koordinatenebene entweder genau einen oder keinen oder alle ihre Punkte gemeinsam haben, kann es auch nur drei verschiedene Typen von Lösungsmengen geben, nämlich

genau eine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$,
oder keine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{\ \}$,
oder unendlich viele Lösungen; dann gilt $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge haben wir bis jetzt nur das graphische Verfahren kennen gelernt. Seine Genauigkeit ist offensichtlich sehr begrenzt. Wir benötigen daher rechnerische Verfahren, die exakte Ergebnisse liefern. Die Lösungsmenge lässt sich besonders leicht angeben, wenn das Gleichungssystem folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x = a \\ \mathrm{II} & y = b. \end{array}$$

In diesem Fall ist $L_1 = \{(x|y) \mid x = a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$, $L_2 = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = b\}$, woraus $L = L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$ folgt. Die Lösung $(a|b)$ kann natürlich direkt am Gleichungssystem abgelesen werden.
Um die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, wird man versuchen, es durch geeignete Umformung auf die obige einfache Form zu bringen. Dabei kommt es aber wesentlich darauf an, dass das durch Umformung entstandene Gleichungssystem genau dieselben Lösungen besitzt wie das ursprüngliche.
Wir vereinbaren

Definition 133.1: Zwei Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Zum Lösen beliebiger linearer Gleichungssysteme benötigt man die beiden folgenden Umformungsschritte, von denen man leicht zeigen kann, dass sie Äquivalenzumformungen sind:

(A) Man multipliziert eine Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl; die übrigen Gleichungen bleiben ungeändert.

(B) Man verändert eine der Gleichungen dadurch, dass man ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung zu ihr addiert; alle übrigen Gleichungen werden in der ursprünglichen Form beibehalten.

Dass diese beiden Schritte wirklich Äquivalenzumformungen darstellen, sei an einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufgezeigt:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & ax + by = e \\ \mathrm{II} & cx + dy = f \end{array}$$

Umformung (A): Wir multiplizieren etwa I mit $r \neq 0$ und behalten II bei. Die neuen Gleichungen nennen wir I′, II′.

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I}' & rax + rby = re & \qquad & \mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot r \\ \mathrm{II}' & cx + dy = f & \qquad & \mathrm{II}' = \mathrm{II} \end{array}$$

Jede Lösung $(x|y)$ des Systems (I, II) genügt auch dem System (I′, II′); die Lösungsmenge L von (I, II) ist also in der Lösungsmenge L' von (I′, II′) enthalten: $L \subset L'$. Man schreibt in diesem Fall: (I, II) $\Rightarrow$ (I′, II′).

Umgekehrt kann man aber aus (I′, II′) wieder (I, II) gewinnen, indem man I′ mit $\frac{1}{r}$ multipliziert und II′ beibehält. Hier wird die Voraussetzung $r \neq 0$ benötigt! Daher gilt auch: $L' \subset L$ oder (I′, II′) ⇒ (I, II). Wegen $L \subset L'$ und $L' \subset L$ ist $L = L'$ und daher (I, II) ⇔ (I′, II′).

Umformung (B): Wir addieren etwa die mit s multiplizierte Gleichung I zu II und behalten die uspr\u00fcngliche Gleichung I bei.

I′ $ax + by = e$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}$
II′ $(sa + c)x + (sb + d)y = se + f$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} + \mathrm{I} \cdot s$

Jede Lösung von (I, II) ist auch Lösung von (I′, II′); also (I, II) ⇒ (I′, II′). Man gelangt umgekehrt vom System (I′, II′) durch einen Rechenschritt derselben Art wieder zu (I, II); addiert man nämlich zu II′ das $(-s)$-fache von I′, so ergibt sich wieder das ursprüngliche System.
Es gilt also auch (I′, II′) ⇒ (I, II) und daher (I, II) ⇔ (I′, II′).

Natürlich gelangt man auch stets wieder zu äquivalenten Systemen, wenn man die Umformungen **(A)** und **(B)** wiederholt ausführt. Die folgenden Beispiele zeigen, wie man damit ein beliebiges System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf die Endform $x = a, y = b$ bringen kann. Das Entscheidende dabei ist, dass man bei einer Gleichung die Unbekannte x, bei der anderen y **eliminiert***, d. h. beseitigt. Die rechts stehenden Anmerkungen geben jeweils an, wie die Gleichungen des neuen Systems aus denen des vorangehenden entstehen und welcher der Schritte **(A)**, **(B)** dabei angewandt wird. Um die Niederschrift übersichtlich zu gestalten, ziehen wir zwischen zwei äquivalenten Systemen jeweils einen Trennungsstrich.

Beispiel 1:

I	$2x + 7y = 5$	
II	$3x + 8y = 2$	
I′	$2x + 7y = 5$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}$
II′	$-\frac{5}{2}y = -\frac{11}{2}$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} + \mathrm{I} \cdot (-\frac{3}{2})$; **(B)**
I″	$2x + 7y = 5$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}'' = \mathrm{II}' \cdot (-\frac{2}{5})$; **(A)**
I‴	$2x = -\frac{52}{5}$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}'' + \mathrm{II}'' \cdot (-7)$; **(B)**
II‴	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}''$
I⁗	$x = -\frac{26}{5}$	$\mathrm{I}'''' = \mathrm{I}''' \cdot \frac{1}{2}$; **(A)**
II⁗	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}'''$

(I⁗, II⁗) hat die Lösung $(-\frac{26}{5} \mid \frac{11}{5})$.

* eliminare (lat.) = aus dem Hause treiben.
Sowohl Isaac NEWTON (1643–1727) wie auch Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) verwenden gelegentlich *eliminare*, das durch Leonhard EULER (1707–1783) zum üblichen Fachausdruck wird.

Da (I, II) $\Leftrightarrow$ (I'''', II''''), ist dies auch die Lösung von (I, II). Zur Kontrolle auf eventuelle Rechenfehler führen wir aber noch eine Probe durch.

Probe: I LS $= 2 \cdot (-\frac{26}{5}) + 7 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{52}{5} + \frac{77}{5} = \frac{25}{5} = 5 =$ RS; richtig!
II LS $= 3 \cdot (-\frac{26}{5}) + 8 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{78}{5} + \frac{88}{5} = \frac{10}{5} = 2 =$ RS; richtig!

Damit gilt: $L = \{(-\frac{26}{5} | \frac{11}{5})\}$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 9x - 21y = 10 & \\ \text{II} & 6x - 14y = 13 & \\ \hline \text{I}' & 9x - 21y = 10 & \text{I}' = \text{I} \\ \text{II}' & 0 \cdot x + 0 \cdot y = \frac{19}{3} & \text{II}' = \text{II} + \text{I}\,(-\frac{2}{3}); \quad \textbf{(B)} \\ \hline \end{array}$$

II′ und damit das Gesamtsystem hat keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 14x + 49y = \frac{3}{2} & \\ \text{II} & 8x + 28y = \frac{6}{7} & \\ \hline \text{I}' & 14x + 49y = \frac{3}{2} & \text{I}' = \text{I} \\ \text{II}' & 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 & \text{II}' = \text{II} + \text{I}\,(-\frac{8}{14}); \quad \textbf{(B)} \\ \hline \end{array}$$

II′ stellt eine allgemein gültige Gleichung dar. Als Bedingung für x und y bleibt nur die Gleichung I′. Daher gilt:

$L = \{(x|y) | 14x + 49y = \frac{3}{2}\}$.

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten jeder der eingangs genannten Lösungsfälle tatsächlich auftreten kann.

6.4.2 Spezielle Lösungsverfahren

Die Umformung eines linearen Gleichungssystems mithilfe der Schritte **(A)** und **(B)** bis zur Ermittlung der Lösungsmenge kann auf sehr unterschiedliche Art erfolgen. Besonders zweckmäßig sind die drei folgenden Verfahren.

1) Das Einsetzungsverfahren

Man löst eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf und ersetzt in der anderen Gleichung diese Unbekannte durch den erhaltenen Term. Außer einfachen Umstellungen durch Termaddition benützt der erste Schritt die Umformung **(A)**, der zweite die Umformung **(B)**.

Beispiel:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	folgt aus $\mathrm{I} \cdot (-1)$; **(A)**
II′	$2x + 4y = -1$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$
I″	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	folgt aus $\mathrm{II}' + \mathrm{I}' \cdot (-4)$; **(B)**
I‴	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}''$
II‴	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}'' \cdot \frac{1}{14}$; **(A)**
I⁗	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	folgt aus $\mathrm{I}''' + 3 \cdot \mathrm{II}'''$; **(B)**
II⁗	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}'''$

Diese sehr ausführlich gehaltene Niederschrift des Lösungsganges lässt sich stark vereinfachen. Aus (I, II) kann sofort (I″, II″) gewonnen werden und daraus zuerst II⁗, dann I⁗. Die verkürzte Form sieht (mit neuer Nummerierung) so aus:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	(I nach y aufgelöst)
II′	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	(y in II eingesetzt)
I″	$x = \frac{27}{14}$	(II′ nach x aufgelöst)
II″	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	(x in I′ eingesetzt)

$L = \{(\frac{27}{14} \mid -\frac{17}{24})\}$

2) Das Additionsverfahren

Man multipliziert die beiden Gleichungen mit Faktoren, die so gewählt werden, dass in den neuen Gleichungen die Koeffizienten bei einer der beiden Unbekannten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden (Umformung **(A)**). Bei der nachfolgenden Addition dieser Gleichungen (Umformung **(B)**) »verschwindet« diese Unbekannte. Als zweite Gleichung wird eine der Ausgangsgleichungen in der ursprünglichen oder in der multiplizierten Form verwendet.

Beispiel 1:

I	$3x + 2y = 8$	
II	$5x - 3y = -31$	
I′	$9x + 6y = 24$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 3$
II′	$10x - 6y = -62$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} \cdot 2$

I″	$19x = -38$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}' + \mathrm{II}'$
II″	$9x + 6y = 24$	$\mathrm{II}'' = \mathrm{I}'$
I‴	$x = -2$	I″ nach x aufgelöst
II‴	$6y = 42$	x in II″ eingesetzt
I⁗	$x = -2$	$\mathrm{I}'''' = \mathrm{I}'''$
II⁗	$y = 7$	II‴ nach y aufgelöst
$L = \{(-2 \mid 7)\}$		

Eine nahe liegende Abkürzung der Niederschrift erhält man, wenn man die obigen Gleichungen I′, II′ gar nicht anschreibt, sondern sofort ihre Addition ausführt:

I	$3x + 2y = 8 \quad \| \cdot 3$	
II	$5x - 3y = -31 \quad \| \cdot 2$	
I′	$19x = -38$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 3 + \mathrm{II} \cdot 2$
II′	$5x - 3y = -31$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$
I″	$x = -2$	I′ nach x aufgelöst
II″	$-3y = -21$	x in II′ eingesetzt
I‴	$x = -2$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}''$
II‴	$y = 7$	II″ nach y aufgelöst
$L = \{(-2 \mid 7)\}$		

Beispiel 2:

I	$1{,}5x - 3{,}5y = -2 \quad \| \cdot 6$	
II	$-9x + 21y = 12 \quad \| \cdot 1$	
I′	$0 = 0$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 6 + \mathrm{II} \cdot 1$
II′	$-3x + 7y = 4$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} \cdot \frac{1}{3}$ (Vereinfachung von II)
I″	$0 = 0$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$y = \dfrac{3x + 4}{7}$	II′ nach y aufgelöst

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man kann x willkürlich wählen und dazu y nach II″ berechnen. Wir wollen dies durch eine (immer zu empfehlende!) Proberechnung überprüfen.

Probe: I LS $= 1{,}5x - 3{,}5 \cdot \dfrac{3x+4}{7} = 1{,}5x - \dfrac{3x+4}{2} = -2 =$ RS; richtig!

II LS $= -9x + 21 \cdot \dfrac{3x+4}{7} = -9x + 3(3x+4) = 12 =$ RS; richtig!

Damit gilt: $L = \left\{ (x \mid y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = \dfrac{3x+4}{7} \right\}$

Manchmal ist es von Vorteil, das Additionsverfahren zweimal anzuwenden. Wenn es gelingt, zuerst durch Elimination von y auf eine Gleichung der Form $x = a$, dann – wiederum ausgehend von dem ursprünglichen System – entsprechend auf eine Gleichung $y = b$ zu kommen, so ist $(a|b)$ die Lösung des Systems.

Beispiel 3:

I	$6x + 10y = 15$	$\Vert \cdot 9$	$\Vert \cdot 10$
II	$20x + 45y = 31$	$\Vert \cdot (-2)$	$\Vert \cdot (-3)$
I′	$14x = 73$		$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 9 + \mathrm{II} \cdot (-2)$
II′	$-35y = 57$		$\mathrm{II}' = \mathrm{I} \cdot 10 + \mathrm{II} \cdot (-3)$
I″	$x = \frac{73}{14}$		I′ nach x aufgelöst
II″	$y = -\frac{57}{35}$		II′ nach y aufgelöst

Die Probe zeigt, dass wir damit eine Lösung gefunden haben:

Probe: I $6 \cdot \frac{73}{14} + 10 \cdot (-\frac{57}{35}) = \frac{219}{7} - \frac{114}{7} = \frac{105}{7} = 15$; richtig!

II $20 \cdot \frac{73}{14} + 45 \cdot (-\frac{57}{35}) = \frac{730}{7} - \frac{513}{7} = \frac{217}{7} = 31$; richtig!

$L = \{(\frac{73}{14} | -\frac{57}{35})\}$.

Bei den zwei bisher behandelten Lösungsverfahren für lineare Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten geht es jeweils darum, ein äquivalentes System zu finden, in welchem eine Gleichung nur noch eine der beiden Unbekannten enthält. Deren Wert kann damit berechnet und in die andere Gleichung eingesetzt werden. Damit gewinnt man eine Gleichung, in der nur noch die zweite Unbekannte auftritt, sodass auch diese berechnet werden kann. Natürlich vereinfacht sich das Lösungsverfahren sehr, wenn bereits im ursprünglichen System eine Gleichung mit nur einer Unbekannten vorkommt. Solche Aufgaben konnten schon in **6.3** gelöst werden.

**3) Die Cramer'sche Regel

Gibt es für ein System von zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte eine Lösungsformel? Wir wollen versuchen, diese Frage zu beantworten. Ein solches Gleichungssystem hat allgemein die Form

I $ax + by = e$

II $cx + dy = f$.

Dabei sind a, b, c, d, e, f beliebige Zahlen. Da durch sie das Gleichungssystem festgelegt ist, muss dies auch für die Lösungsmenge gelten; d.h., die eventuellen Lösungen müssen sich aus diesen Koeffizienten berechnen lassen. Wir versuchen, das System (I, II) durch Äquivalenzumformungen auf die Gestalt $x = u \wedge y = v$ zu bringen. Dazu benützen wir das doppelte Additionsverfahren:

$$\begin{array}{lll|l}
\text{I} & ax+by=e & \| \cdot d & \| \cdot (-c) \\
\text{II} & cx+dy=f & \| \cdot (-b) & \| \cdot a \\
\hline
\text{I}' & (ad-bc)x = de-bf & & \text{I}' = \text{I} \cdot d + \text{II} \cdot (-b) \\
\text{II}' & (ad-bc)y = af-ce & & \text{II}' = \text{I} \cdot (-c) + \text{II} \cdot a
\end{array}$$

Man erkennt, dass es möglich ist, das Eliminieren von y aus der ersten und von x aus der zweiten Gleichung so vorzunehmen, dass bei der jeweils übrig bleibenden Unbekannten derselbe Faktor $ad-bc$ steht. Falls dieser von null verschieden ist, kann man die Rechnung fortsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I}'' & x = \dfrac{de-bf}{ad-bc}, \\[2ex]
\text{II}'' & y = \dfrac{af-ce}{ad-bc},
\end{array}\right\} \quad \text{falls} \quad ad-bc \neq 0\,.$$

In diesem Fall besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung und die Gleichungen I″, II″ stellen die gesuchte Lösungsformel dar.

Wenn jedoch $ad-bc=0$ gilt, hat das System (I′, II′) die Form

$$\begin{array}{ll}
\text{I}' & 0 \cdot x = de-bf \\
\text{II}' & 0 \cdot y = af-ce
\end{array}$$

und lässt sich nicht auf die Form $x = u \wedge y = v$ bringen. Man kann zeigen, dass es in diesem Fall entweder keine oder unendlich viele Lösungen gibt. Vergleiche dazu die Beispiele 2 und 3 auf Seite 141f.

Die für $ad-bc \neq 0$ gefundene Lösungsformel halten wir fest in

Satz 139.1: Das Gleichungssystem

$$ax+by=e$$
$$cx+dy=f$$

hat für $ad-bc \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{de-bf}{ad-bc}, \quad y = \frac{af-ce}{ad-bc}.$$

Der Term $ad-bc$, von dessen Wert es abhängt, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht, heißt **Determinante* des Gleichungssystems**. Die zwei Lösungsformeln in Satz 139.1, nach denen man die Lösung berechnen kann, falls diese Determinante von null verschieden ist, werden als **Cramer'sche Regel**** bezeichnet.

* determinare (lat.) = abgrenzen

** benannt nach Gabriel CRAMER (1704–1752), der dieses Verfahren 1750 als Anhang zu seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* – »Einführung in die Analysis algebraischer Kurven« – unter dem Titel *De l'évanouissement des inconnues* – »Über das Verschwinden von Unbekannten« – veröffentlichte.

Für Determinanten gibt es eine besondere Schreibweise, vereinbart durch

Definition 140.1: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \cdot d - b \cdot c$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ heißt **zweireihige Determinante**.

Wenn man sich die Differenz der beiden Produkte in Definition 140.1 näher ansieht, erkennt man folgende Merkregel für die Berechnung einer zweireihigen Determinante:

Zahl oben links · Zahl unten rechts
minus
Zahl oben rechts · Zahl unten links

Nennt man die im Determinantenschema von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale *Hauptdiagonale* und die andere *Nebendiagonale*, so ergibt sich für $ad - bc$ der in Abbildung 140.1 veranschaulichte Merkspruch

»Hauptdiagonale
minus
Nebendiagonale«.

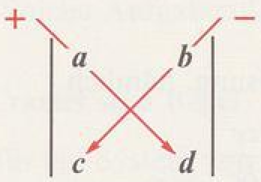


Abb. 140.1 Zur Berechnung einer zweireihigen Determinante

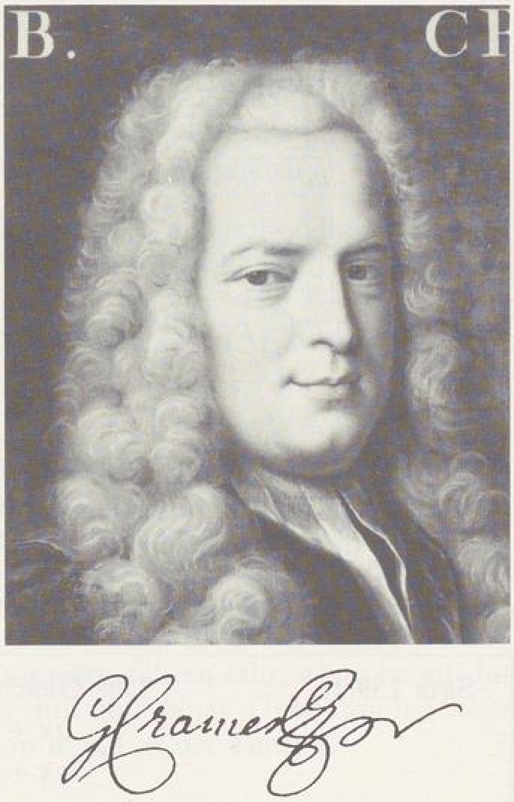


Abb. 140.2 Gabriel CRAMER, *gesprochen kramär, ä betont* (31. 7. 1704 Genf–4. 1. 1752 Bagnols-sur Cèze). Gemälde Robert GARDELLE (1682–1766) zugeschrieben.

Auch die Zähler der in der Cramer'schen Regel auftretenden Brüche kann man als Determinanten schreiben. Es gilt nämlich

$$de - bf = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, \quad af - ce = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

Damit lässt sich Satz 139.1 in der folgenden Form schreiben, in der wir ihn uns auch merken wollen:

Satz 141.1: Die Cramer'sche Regel. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \quad \text{hat für} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{genau eine Lösung, nämlich}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Beispiel 1:

I $5x + 2y = 2$
II $3x - 3y = 4$

Wir berechnen zuerst die Determinante des Gleichungssystems:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 3 = -15 - 6 = -21; \text{ also nicht null.}$$

Daher hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, die man nach der Cramer'schen Regel berechnen kann:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow x = \frac{-14}{-21} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow y = \frac{14}{-21} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} L = \{(\tfrac{2}{3} \mid -\tfrac{2}{3})\}.$$

Beispiel 2:

I $1{,}5x - 0{,}5y = 3$
II $6x - 2y = 1$

$$\begin{vmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 1{,}5 \cdot (-2) - (-0{,}5) \cdot 6 = 0$$

Damit hat das System keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Ob es überhaupt lösbar ist, können wir mit dem Einsetzungs- oder dem Additionsverfahren entscheiden; man erhält z. B.

I′	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 11$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 4 + \mathrm{II} \cdot (-1)$
II′	$6x - 2y = 1$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$

Da I′ bei jeder Einsetzung die falsche Aussage $0 = 11$ ergibt, ist (I′, II′) und damit auch (I, II) unlösbar, also $L = \{\ \}$.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{3}{2}x - y = -\frac{3}{8} \\ \text{II} & -6x + 4y = 1{,}5 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 4 - (-1) \cdot (-6) = 0$$

Es gibt also keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Durch Äquivalenzumformung des Systems erhalten wir

$$\begin{array}{llll} \text{I}' & 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 & & \text{I}' = \text{I} \cdot 4 + \text{II} \cdot 1 \\ \text{II}' & -6x + 4y = 1{,}5 & & \text{II}' = \text{II} \end{array}$$

Da die Gleichung I′ allgemein gültig ist, besteht die Lösungsmenge aus allen Lösungen von II′. Somit gilt:

$$L = \left\{ (x \mid y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{6x + 1{,}5}{4} \right\}.$$

**Zur Geschichte der Lösungsverfahren

Weder die Babylonier noch die Ägypter noch die Griechen haben Verfahren entwickelt, mit denen man, allgemein gesprochen, *jedes* System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten lösen kann. Soweit heute bekannt ist, finden wir zum ersten Mal ein solches allgemeines Verfahren, nämlich das Additionsverfahren im 九章算術 – *Chiu Chang Suan Shu* –, den »Neun Büchern arithmetischer Technik« aus der frühen Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.). In Aufgabe 162/**80** ist das erste dort behandelte Problem wiedergegeben; 18 solcher Aufgaben enthält das Lehrwerk, von 2 bis zu 6 Unbekannten. Interessanterweise haben die Chinesen überhaupt keine Zeichen für ihre Unbekannten verwendet, sondern die Koeffizienten sauber in einem rechteckigen Schema angeschrieben, sodass jedem klar war, dass in der ersten Zeile die x-Glieder, in der zweiten die y-Glieder usw. stehen. (Die Chinesen schrieben ja von oben nach unten, nicht wie wir von links nach rechts!)

Das umständliche* Gleichsetzungsverfahren – man löst jede Gleichung nach derselben Variablen auf und setzt die erhaltenen Terme gleich – taucht in allgemeiner Form bei dem Inder Brahmagupta (598 – nach 665) auf. Wie schon oben (Seite 123) gesagt, beschäftigten sich die Araber und daher auch das europäische Mittelalter kaum mit Gleichungssystemen. Erste Ansätze dazu im Italien des späten 15. Jh.s gelangten nach Deutschland. Der Rechenmeister Christoff Rudolff (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) war der Erste, der Gleichungssysteme behandelte, nämlich 1525 in seiner *Coß*. Zwar brachte Michael Stifel (1487 (?)–1567) durch seine glücklichen Bezeichnungen (siehe Seite 123) einen Fortschritt; er rechnete aber wenig mit ihnen. Der von ihm beeinflusste Johannes Buteo (1492–1564/72) packte dann das Problem, Gleichungssysteme zu lösen, allgemein an, da ihm die bisherige Art und Weise des Lösens »sehr mühsam und schwer zu erfassen« war. Er führt das Additionsverfahren

* Deswegen haben wir es nicht vorgeführt. Euler hält es zwar für den »natürlichsten Weg«.

an Aufgabe 149/**20** vor. Als allgemeine Methode finden sich das Gleichsetzungs- und das Einsetzungsverfahren dann bei Isaac Newton (1643–1727) in seiner *Arithmetica universalis* (entstandenen 1673, gedruckt 1707). Einen besonderen Weg ist Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gegangen. 1678 glaubte er, eine Regel gefunden zu haben, mittels derer die Lösung eines beliebigen linearen Gleichungssystems ohne weitere Rechnung angegeben werden könnte. Er nennt es ein *theorema pulcherrimum*, einen allerschönsten Lehrsatz. 1684 hatte er es geschafft, die Determinantenmethode war geboren. Zwar verwendet er seine Erkenntnisse in Briefen, gedruckt wurden sie aber erst 1903 bzw. 1972! Im uns so fernen Japan veröffentlichte 1683 Takakazu (oder auch Kowa) Seki (1642–1708 Tokio) die unabhängig von Leibniz von ihm erfundene Determinantenmethode, die im 19. Jh. dort wieder in Vergessenheit gerät. Und so gebührt in Europa dem Schweizer Gabriel Cramer (1704–1752) das Verdienst, 1750 die allgemeine Lösungsregel mittels Determinanten angegeben zu haben. Das Wort »Determinante« geht auf Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zurück, der in seinen *Disquisitiones arithmeticae* 1801 von einem *numerus determinans* spricht. Augustin Cauchy (1789 bis 1857) verwendet es 1812 erstmals im heutigen Sinn, und Arthur Cayley (1821 bis 1895) führte 1841 die Schreibweise mit den beiden senkrechten Strichen ein.

1831

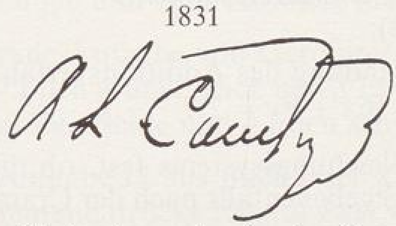


Abb. 143.1 Augustin Louis Baron Cauchy (21.8.1789 Paris – 23.5.1857 Sceaux)

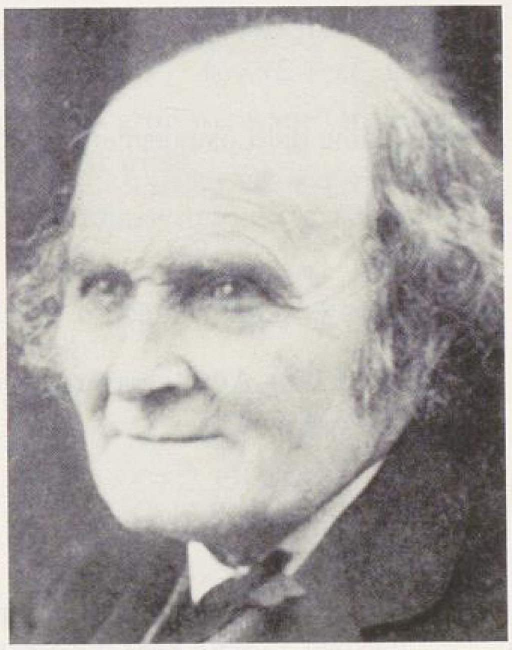


Abb. 143.2 Arthur Cayley (16.8.1821 Richmond – 26.1.1895 Cambridge)

Aufgaben

1. Führe das Gleichungssystem (I, II) nacheinander in die äquivalenten Systeme (I′, II′), …, (I″″, II″″) über, sodass gilt:
In I′ hat x den Koeffizienten 1.
In II″ kommt x nicht mehr vor.
In II‴ kommt x nicht mehr vor, und der Faktor bei y ist 1.
In I″″ kommt y nicht mehr vor, und der Faktor bei x ist 1.

a) I $2x+3y=2$
II $4x-9y=-1$

b) I $3x-11y=21$
II $4x+7y=28$

2. Weise mit Umformungen des Typs **(A)** und **(B)** nach, dass die Gleichungssysteme (I, II) und (I*, II*) äquivalent sind.
Bestimme sodann die Lösungsmenge.

a) I $x-2y=0$ I* $x-2y=0$
II $4x+y=9$ II* $9y=9$

b) I $5x+8y=-10$ I* $x+1{,}6y=-2$
II $3x+2y=1$ II* $-7x=-14$

3. Bestimme die Lösungsmenge nach dem Einsetzungsverfahren:

a) $2x+y=4$
$x+y=3$

b) $3{,}5x+5y=0$
$2{,}1x+3y=6$

c) $9x+4y=55$
$-5x+\ \ y=-37$

d) $\frac{2}{3}x+y=4$
$x+\frac{3}{2}y=6$

4. Verwende das Additionsverfahren:

a) $x+y=-8$
$x-y=2$

b) $3x+12y=5$
$2x+\ \ 8y=4$

c) $29x+37y=0$
$13x-17y=0$

d) $2x-5y=186$
$3x+4y=279$

5. a) Berechne durch zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens (vgl. Beispiel 3, Seite 138) die Lösung des Gleichungssystems
$(11x+15y=40) \wedge (21x-31y=13)$.

•b) Warum versagt die zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens bei dem System $(16x+24y=5\frac{1}{3}) \wedge (6x+9y=2)$?

**•6. Stelle mithilfe der Determinante des Gleichungssystems fest, ob dieses genau eine Lösung hat. Berechne diese gegebenenfalls nach der Cramer'schen Regel. Bestimme andernfalls die Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen.

a) $3x+4y=0$
$4x-3y=25$

b) $8x-2y=1$
$-4x+y=-1$

c) $3{,}6x - 1{,}5y = 7{,}8$
$0{,}4x + 2{,}5y = -9{,}8$

d) $1{,}1x + 2{,}1y = 0$
$\frac{2}{7}x + \frac{6}{11}y = 0$

Bestimme bei den Gleichungssystemen der Aufgaben **7** bis **16** die Lösungsmengen.

7. $26x - 99y = 101$
$47x - 72y = 242$

8. $56x - 63y = 4$
$35x + 14y = 33$

9. $\frac{2}{5}x - 4y = -4$
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 17$

10. $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = 1$
$10x + \frac{32}{3}y = 7$

11. $6{,}5x - 10{,}4y = 13$
$-2{,}6x + 13{,}9y = -5{,}2$

12. $-3{,}24x + 16{,}2y = 14{,}58$
$1{,}62x + 4{,}05y = 9{,}72$

13. $\frac{11}{6}x + \frac{7}{8}y = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{7}x + \frac{12}{35}y = \frac{3}{10}$

14. $0{,}7x + \frac{5}{6}y = 1{,}9$
$\frac{7}{9}x - y = -0{,}2$

15. $\frac{2}{3}x + \frac{9}{11}y = 5$
$1{,}2x - 1{,}8y = -9$

16. $\frac{3}{7}x - \frac{5}{14}y = 3{,}2$
$0{,}75x - 0{,}625y = 5$

17. Für welchen Punkt der Geraden mit der Gleichung $x + 2y - 6 = 0$ gilt:
a) Der Punkt hat zwei gleiche Koordinaten.
b) Die Abszisse des Punktes ist doppelt so groß wie seine Ordinate.
c) Die Ordinate ist um 3 größer als die Abszisse.

Gib jeweils zuerst das zu lösende Gleichungssystem an. Überprüfe die Ergebnisse an einer Zeichnung.

18. Stelle fest, ob die Geraden g_1 und g_2 einen Schnittpunkt haben, und berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.

a) $g_1\colon 3x + 2y - 1 = 0$
$g_2\colon x - y + 3 = 0$

b) $g_1\colon 2{,}5x - \frac{5}{6}y + 2 = 0$
$g_2\colon -x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

c) $g_1\colon 2{,}5x - 0{,}8y + 2 = 0$
$g_2\colon -x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

d) $g_1\colon 5x + 2{,}25y + 4{,}5 = 0$
$g_2\colon 3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 3 = 0$

19. Eine einfache Aufgabe aus dem alten Babylon (um 2000 v. Chr.), gefunden in Susa: Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten.

20. Eine Aufgabe von Geronimo Cardano (1501–1576):
7 Ellen grüner Seide und 3 Ellen schwarzer Seide kosten 72 Pfund. 2 Ellen grüner Seide und 4 Ellen schwarzer Seide kosten 52 Pfund.

• **21.** Aufgabe 12 aus Buch I der *Zahlenlehre* des Diophant (um 250 n. Chr.): Jemand drückt 100 auf zwei verschiedene Arten als zweigliedrige Summe aus, und zwar so, dass ein Summand der ersten Summe das Doppelte eines Summanden der zweiten Summe ist und dass der andere Summand der zweiten Summe das Dreifache des anderen Summanden der ersten Summe ist. Wie heißen die Summanden?

6.5 Lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen oder Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem besteht allgemein aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Ist $m < n$, dann heißt das System **unterbestimmt**, im Fall $m > n$ **überbestimmt**.
Zur Bestimmung der Lösungsmenge wird wieder das Verfahren der Äquivalenzumformungen angewandt. Man kommt auch hier mit den Schritten **(A)** und **(B)** aus (vgl. Seite 133). Durch schrittweises Eliminieren von Unbekannten lässt sich immer ein äquivalentes System finden, dessen Lösungsmenge unmittelbar ersichtlich ist. Grundsätzlich läuft das Verfahren wie bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I} & 3x-2y+5z=23 & \\
\mathrm{II} & 2x+4y-z=-3 & (m=3,\ n=3)\\
\mathrm{III} & 5x+2y+2z=14 & \\
\hline
\mathrm{I}' & 13x+18y=8 & \mathrm{I}'=\mathrm{I}+\mathrm{II}\cdot 5\\
\mathrm{II}' & 2x+\ 4y-z=-3 & \mathrm{II}'=\mathrm{II}\\
\mathrm{III}' & 9x+10y=8 & \mathrm{III}'=\mathrm{III}+\mathrm{II}\cdot 2\\
\hline
\mathrm{I}'' & 16x=32 & \mathrm{I}''=\mathrm{III}'\cdot 9+\mathrm{I}'\cdot(-5)\\
\mathrm{II}'' & 9x+10y=8 & \mathrm{II}''=\mathrm{III}'\\
\mathrm{III}'' & 2x+\ 4y-z=-3 & \mathrm{III}''=\mathrm{II}'\\
\hline
\mathrm{I}''' & x=2 & \mathrm{I}'''=\mathrm{I}''\cdot\frac{1}{16}\\
\mathrm{II}''' & 10y=-10 & \mathrm{II}'''=\mathrm{II}''-\mathrm{I}'''\cdot 9\\
\mathrm{III}''' & 4y-z=-7 & \mathrm{III}'''=\mathrm{III}''-\mathrm{I}'''\cdot 2\\
\hline
\mathrm{I}'''' & x=2 & \mathrm{I}''''=\mathrm{I}'''\\
\mathrm{II}'''' & y=-1 & \mathrm{II}''''=\mathrm{II}'''\cdot\frac{1}{10}\\
\mathrm{III}'''' & z=3 & \mathrm{III}''''=\mathrm{II}''''\cdot 4-\mathrm{III}'''\\
\hline
\end{array}
$$

$L=\{(2|-1|3)\}$

Natürlich eignet sich auch das Einsetzungsverfahren zum Lösen solcher Gleichungssysteme. Seine Anwendung soll noch einmal an Beispiel 1 aufgezeigt werden. Dazu lösen wir z. B. die Gleichung I nach $2y$ auf (weil alle Koeffizienten bei y gerade Zahlen sind!) und setzen den erhaltenen Term gleich in II und III ein:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I}' & 2y=3x+5z-23\\
\mathrm{II}' & 2x+2(3x+5z-23)-z=-3 \Leftrightarrow 8x+9z=43\\
\mathrm{III}' & 5x+(3x+5z-23)+2z=14 \Leftrightarrow 8x+7z=37\\
\hline
\end{array}
$$

I″	$2y = 3x + 5z - 23$	I″ = I′
II″	$8x = 43 - 9z$	II′ nach $8x$(!) aufgelöst
III″	$(43 - 9z) + 7z = 37 \Leftrightarrow -2z = -6$	$8x$ in III′ eingesetzt
I‴	$\underline{z = 3}$	III″ nach z aufgelöst
II‴	$8x = 43 - 9 \cdot 3 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$	z in II″ eingesetzt
III‴	$2y = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 23 \Leftrightarrow \underline{y = -1}$	x und z in I″ eingesetzt

$L = \{(2 \mid -1 \mid 3)\}$.

Beispiel 2:

I	$x + 3y = -7$	
II	$2x - 5y = 30$	$(m = 3, n = 2)$
III	$7x + 4y = 19$	
I′	$x + 3y = -7$	I′ = I
II′	$-11y = 44$	II′ = II − I · 2
III′	$-17y = 68$	III′ = III − I · 7
I″	$x + 3y = -7$	I″ = I′
II″	$y = -4$	II″ = II′ · $(-\frac{1}{11})$
III″	$0 = 0$	III″ = II″ · 17 + III′ (kann im Folgenden weggelassen werden, da allgemein gültig)
I‴	$x = 5$	I‴ = I″ − II″ · 3
II‴	$y = -4$	II‴ = II″

$L = \{(5 \mid -4)\}$

Die Lösbarkeit in Beispiel 2 beruht darauf, dass man zu einem äquivalenten System gelangt, welches eine allgemein gültige Gleichung enthält. Es bleiben dann nur noch zwei Bestimmungsgleichungen für die zwei Unbekannten übrig. In der Regel wird dieser Fall nicht eintreten. Ein überbestimmtes System ist i. A. nicht lösbar, da normalerweise bereits ein Teil des Systems eine eindeutig bestimmte Lösung hat, die den übrigen Gleichungen nicht mehr genügt. Ersetzt man etwa die Gleichung III von Beispiel 2 durch III* $7x + 4y = 20$, so besitzt das System (I, II, III*) keine Lösung. Denn aus I und II folgt bereits $x = 5$ und $y = -4$; doch liefert III* mit diesen Werten die falsche Aussage $19 = 20$.

Beispiel 3:

I	$2x - 5y + 11z = 31$	$(m = 2, n = 3)$
II	$3x + 15y - 4z = 15$	
I′	$2x - 5y + 11z = 31$	I′ = I
II′	$9x + 29z = 108$	II′ = I · 3 + II

I″ $-45y+41z=63$	$\mathrm{I}''=\mathrm{I}'\cdot 9-\mathrm{II}'\cdot 2$
II″ $x+\frac{29}{9}z=12$	$\mathrm{II}''=\mathrm{II}'\cdot\frac{1}{9}$
I‴ $y=-\frac{7}{5}+\frac{41}{45}z$	$\mathrm{I}'''=\mathrm{I}''\cdot(-\frac{1}{45})$
II‴ $x=12-\frac{29}{9}z$	$\mathrm{II}'''=\mathrm{II}''$

Man kann also z willkürlich wählen; zu jedem Wert von z gibt es genau ein x und y. Das System hat somit unendlich viele Lösungen:

$$L=\{(x|y|z)|x=12-\tfrac{29}{9}z\wedge y=-\tfrac{7}{5}+\tfrac{41}{45}z\wedge z\in\mathbb{Q}\}.$$

Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als diejenige der Unbekannten, so hat das System im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass es unlösbar ist, wie z. B. das System

I $x+y+z=1$

II $x+y+z=2$.

Aufgaben

1. $x=7$, $3x+y=22$, $-5x+9y+z=-8$

2. $x-3z=-8$, $3x-z=0$, $x+y+z=3$

3. $2x+z=3$, $x-6y-2z=14$, $5x+4y+3z=5$

4. $x+y-z=1$, $x-y-z=0$, $x+5y-z=2$

5. $x-y+2z=11$, $x+y-2z=-7$, $3x-4y-7z=27$

6. $x+2y+5z=50$, $3x-7y+z=10$, $13x+4y-3z=-30$

7. $-3x+5y+z=3$, $7x-4y-z=2$, $x+6y+z=8$

8. $2x+4y-11z=6$, $9x-7y+5z=2$, $12x-26y+43z=0$

9. $2x-3y+5z=0$, $3x+5y-2z=0$, $5x-2y+3z=0$

10. $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$

11. $x-y-z=1$, $5x+4y+z=-1$

12. $7x+3{,}75y-1{,}5z=9$, $\frac{4}{3}x+\frac{5}{7}y-\frac{2}{7}z=\frac{4}{3}$

13. $x+2y=1$, $4x-3y=-29$, $3x+17y=36$

14. $8x-11y=3$, $13x+5y=-18$, $2x-9y=10$

15. $x + y - z = -1$
$x - y - z = 3$
$2y + 3z - w = -3$
$-2x + 2z + 3w = -5$

16. $x + y - z + w = 0$
$x - y - z - w = 0$
$x + y + z - w = 5$
$x - y + z + w = 3$

17. $2x - y + 3z = -7$
$x + 4y - 2z = 8$
$3x + 2y + z = 0$
$6x - 3y + 4z = -11$

18. $3x + 4y - 5z + 5w = 13$
$5x - 3y + 4z - 19w = -10$
$2x - 5y + z - 2w = -11$

19. Zwei Beispiele aus der *Zahlenlehre* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.):

a) $x + y = 20$
$y + z = 30$
$z + x = 40$

b) $x = y + \frac{1}{3}z$
$y = z + \frac{1}{3}x$
$z = 10 + \frac{1}{3}y$

20. Johannes BUTEO (1492–1564/72) löst in seiner *Logistica* (1559) folgende Aufgabe als Beispiel für das Additionsverfahren. Text und Ansatz lauten*:

Tres numeros inuenire, quorum primus cum triente reliquorum faciat 14. Secundus cum aliorum quadrante 8. Tertius item cum parte quinta reliquorum 8.

$1A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = 14$
$1B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = 8$
$1C + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B = 8$

21. Das **Problem der 100 Vögel** erscheint zum ersten Mal im *Chang Ch'iu-chien Suan Ching* – »Arithmetisches Handbuch des CHANG Ch'iu-chien« – um 475 n. Chr.:
Ein Hahn kostet 5 sapeks, eine Henne 3 sapeks, und 3 Küken 1 sapek. Wenn wir nun für 100 sapeks 100 dieser Tiere einkaufen, wie viele sind es dann von jeder Sorte?

22. Aufgabe **21** findet sich bei den Indern, den Arabern, in Byzanz und schließlich bei fast allen Mathematikern des Abendlandes in allen möglichen Variationen, auch mit 4 und 5 Arten von Vögeln oder anderem Getier. Ein Beispiel hierfür ist die nebenstehende Aufgabe aus dem *Rechenbuch auff Linien und Ziphren* (1574) des Adam RIES (1492–1559).**
Beachte: fl ist die Abkürzung für *Gulden*; ort bedeutet *ein Viertel.*

Adam Risen. 71

Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?

* Drei Zahlen zu finden, deren erste mit einem Drittel der übrigen 14 macht. Die zweite mit einem Viertel der anderen 8. Die dritte ebenso mit dem fünften Teil der übrigen 8.

** Ohne Bild steht sie bereits in der Erstauflage von 1522, der *Rechenung auff der linihen vnd federn.*

6.6 Gleichungssysteme, die auf lineare Gleichungssysteme zurückführbar sind

In vielen Fällen gelingt es, nicht lineare Gleichungssysteme in lineare umzuwandeln. Die dabei verwendeten Rechenschritte sind aber im Allgemeinen keine Äquivalenzumformungen. In der Regel kann man nur sagen: Wenn das ursprüngliche System eine Lösung hat, so ist diese in der Lösungsmenge des aus ihm abgeleiteten Systems enthalten. Aber nicht jede Lösung des neuen Systems muss auch eine Lösung des ursprünglichen sein. Daher ist durch eine *grundsätzlich notwendige* Probe festzustellen, welche Lösungen aus der Lösungsmenge des neuen Systems auch dem ursprünglichen Gleichungssystem genügen.

Beispiel 1:

$$\text{I} \quad \frac{2x-y-1}{x+3y-2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{II} \quad \frac{5}{4x-5y-9} - \frac{2}{7x+2y-1} = 0$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 7(2x-y-1) = -3(x+3y-2) \\ \text{II}' & 5(7x+2y-1) = 2(4x-5y-9) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & 17x + 2y = 13 \\ \text{II}'' & 27x + 20y = -13 \end{array}$$

Als Lösungsmenge des Systems (I'', II'') erhält man in bekannter Weise $L'' = \{(1|-2)\}$. Ob $x = 1$ und $y = -2$ auch dem System (I, II) genügen, muss noch geprüft werden.

Probe: $\text{I LS} = \dfrac{2+2-1}{1-6-2} = \dfrac{3}{-7} = -\dfrac{3}{7} = \text{RS}$

$$\text{II LS} = \frac{5}{4+10-9} - \frac{2}{7-4-1} = \frac{5}{5} - \frac{2}{2} = 0 = \text{RS}$$

Das ursprüngliche System hat also die Lösungsmenge $L = \{(1|-2)\}$.

Beispiel 2:

$$\text{I} \quad \frac{3x-y-5}{7x+2y-3} = 2$$

$$\text{II} \quad 8x - 13y = 34$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Systemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 3x-y-5 = 2(7x+2y-3) \\ \text{II}' & 8x-13y = 34 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & 11x + 5y = 1 \\ \text{II}'' & 8x - 13y = 34 \end{array}$$

Daraus ergibt sich I‴ $x = 1$

II‴ $y = -2$

Probe: I LS $= \dfrac{3+2-5}{7-4-3}$ sinnlos, da Nenner $= 0$.

Die Annahme, dass das System lösbar sei, hat also zu einem Widerspruch geführt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist somit die leere Menge.

Beispiel 3:

$$\text{I}\quad \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

$$\text{II}\quad \frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 1$$

Da die Unbekannten nur in der Verbindung $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{3}{y}$ auftreten, empfiehlt es sich, für diese Ausdrücke Abkürzungen, z. B. u und v, einzuführen; d. h., wir machen folgende **Substitution***:

$$\text{(S)}\quad \frac{1}{x} =: u; \quad \frac{3}{y} =: v\,.$$

In den neuen Unbekannten u, v erhalten wir dann das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & u + v = 1 \\ \text{II}' & 3u - v = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & u = \frac{1}{2} \\ \text{II}'' & v = \frac{1}{2} \end{array}$$

Aus (S) ergibt sich dann

$$\begin{array}{ll} \text{III} & \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \text{IV} & \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{III}' & x = 2 \\ \text{IV}' & y = 6 \end{array}$$

Probe: I LS $= \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1 =$ RS II LS $= \frac{3}{2} - \frac{3}{6} = 1 =$ RS

Die Lösungsmenge von (I, II) ist also $L = \{(2|6)\}$.

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 4:

$$\text{I} \quad \frac{6}{x+y} + \frac{2}{x+y+1} = -1$$

$$\text{II} \quad \frac{-3}{x+y} + \frac{4}{x+y+1} = 3$$

Substitution: (S) $\frac{3}{x+y} =: u; \quad \frac{2}{x+y+1} =: v\,.$

Für u und v ergibt sich folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 2u + v = -1 \\ \text{II}' & -u + 2v = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}'' & u = -1 \\ \text{II}'' & v = 1 \end{array}$$

Für die Unbekannten x und y erhalten wir durch Einsetzen in (S):

$$\begin{array}{ll} \text{III} & x+y = -3 \\ \text{IV} & x+y+1 = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{III}' & x+y = -3 \\ \text{IV}' & x+y = 1 \end{array} \quad \text{Widerspruch!}$$

Das ursprüngliche System hat demnach keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Aufgaben

1. $\frac{x+30}{y+1} = 5$

$\frac{1}{2y-6} - \frac{2}{3(x-1)} = 0$

2. $\frac{2x-8}{x+y} = \frac{4}{5}$

$\frac{8}{2x+y} = \frac{5}{3y-4}$

3. $\frac{2}{11x-6y+2} = \frac{1}{14y-19x-9}$

$\frac{8y-3x-6}{7x-y+1} = \frac{3}{2}$

4. $\frac{1}{2x+3y-8} = \frac{-5}{3x-y+9}$

$\frac{7}{x+y-2} = \frac{2}{4x-3y+27}$

5. $3x+5y = 5z-4$

$\frac{3y-8z-6}{x+y+2z} = -1$

$\frac{6}{x-2y} = \frac{-1}{y-2z}$

6. $\frac{2x-7y+3z}{5x} = 1{,}4$

$\frac{x-y}{3y-4z} = 0{,}5$

$\frac{x-4y+15z}{8x+y-6z} = -1{,}5$

7. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 10$

$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 20$

8. $\frac{14}{x} + \frac{15}{y} = 44$

$\frac{22}{x} - \frac{25}{y} = 40$

9. $5x - \frac{8}{y} = 13$
$7x - \frac{10}{y} = 18{,}5$

10. $\frac{5}{x} + 3y = 1$
$\frac{15}{x} - 7y = 3$

11. $\frac{1}{x+y+1} + \frac{3}{x-y+1} = 2$
$\frac{4}{x+y+1} - \frac{9}{x-y+1} = 1$

12. $\frac{10}{x+2y-1} - \frac{3}{x+2y+8} = 2$
$\frac{10}{x+2y-1} + \frac{6}{x+2y+8} = -1$

13. $\frac{1}{2x-10y+30} + \frac{1}{3x+2y-11} = 0$
$\frac{-7}{x-5y+15} + \frac{6}{3x+2y-11} = 0{,}2$

14. $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 14$
$\frac{1}{2x} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$
$\frac{2}{x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{3z} = \frac{3}{2}$

15. $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x+z} = \frac{3}{8}$
$\frac{1}{x+y} + \frac{9}{y+z} = \frac{3}{4}$
$\frac{5}{x+y} - \frac{6}{y+z} - \frac{4}{x+z} = \frac{5}{12}$

6.7 Textaufgaben

6.7.1 Bestimmung von Zahlen

1. Addiert man zu einer Zahl das Dreifache einer anderen, so ergibt sich 18. Subtrahiert man dagegen vom Dreifachen der ersten Zahl die zweite, so erhält man 4. Wie heißen die Zahlen?
2. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu ihrer Differenz wie 13 : 22. Die doppelte Summe der Zahlen übertrifft ihre Differenz um $\frac{8}{15}$.
3. Die Differenz zweier Zahlen ist eine gerade Primzahl. Ihre Summe ist gleich dem Quadrat dieser Primzahl.
4. Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 2 : 7. Die kleinere ist in der größeren dreimal enthalten, wobei 9 als Rest bleibt.
5. Eine zweiziffrige Zahl ist viermal so groß wie die Quersumme. Vertauscht man die beiden Ziffern, so erhält man eine um 18 größere Zahl.

6. Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist 6. Vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer, so ergibt sich eine um 99 größere Zahl. Vertauscht man dagegen die Einer- mit der Zehnerziffer, so verkleinert sich die Zahl um 18.

7. Eine dreistellige Zahl, deren Wert sich bei Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Vertauscht man die beiden letzten Ziffern, so nimmt sie um 27 zu.

•**8.** Eine zweistellige Zahl ist durch 9 teilbar. Vertauscht man ihre beiden Ziffern, so ergibt sich eine Zahl, die um die Quersumme größer ist.

:**9.** Eine dreistellige Zahl ist durch 11 teilbar. Auf ihrer Zehnerstelle steht die Ziffer 8. Vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer, so ergibt sich eine um 198 größere Zahl. (Anleitung: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre »alternierende Quersumme«, das heißt die Summe der an 1., 3., 5., usw. Stelle stehenden Ziffern vermindert um die Summe der an 2., 4., 6., usw. Stelle stehenden Ziffern durch 11 teilbar ist.)

•**10.** Aus einer dreistelligen Zahl gewinnt man zwei vierstellige Zahlen, indem man eine gewisse Ziffer einmal davor setzt, das andere Mal hinten anhängt. Die Summe der so gewonnenen neuen Zahlen ist 11 803, ihre Differenz 3069. Wie heißt die ursprüngliche Zahl und welche Ziffer wurde angehängt? (Anleitung: Führe die neuen Zahlen als Unbekannte ein!)

11. Vergrößert man bei einem Bruch Zähler und Nenner um 1, so nimmt er den Wert $\frac{1}{2}$ an. Verkleinert man hingegen Zähler und Nenner um 3, so erhält der Bruch den Wert $\frac{1}{6}$. Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

12. Subtrahiert man vom Zähler und vom Nenner eines Bruches die Zahl 6, so erhält er den Wert $\frac{4}{5}$. Verdoppelt man dagegen den Zähler und addiert zum Nenner 5, so erhält der Bruch den Wert $\frac{5}{4}$. Wie heißt der Bruch?

13. Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3; die Summe ihrer Kehrwerte ist 5.

•**14.** Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 7 : 3. Dividiert man die größere durch die kleinere, so bleibt 37 als Rest.

•**15.** Eine zweistellige Zahl verhält sich zu der durch Vertauschung ihrer Ziffern entstehenden Zahl wie 8 : 3. Teilt man die kleinere der beiden Zahlen durch ihre Zehnerziffer, so ergibt sich 13, Rest 1.

:**16.** Eine vierstellige ungerade Zahl ist durch 25 teilbar. Ihre Quersumme hat den Wert 26. Addiert man die Zahl zu derjenigen, die durch Umkehrung ihrer Ziffernfolge entsteht, so erhält man 12661.

17. Eine Zahl liegt zwischen 300 und 400. Sie ist 36-mal so groß wie ihre Quersumme; ihre Zehnerziffer verhält sich zur Einerziffer wie 1 : 2.

18. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zur Differenz wie 3 : 1, die Differenz zum Produkt wie 1 : 6.

•**19.** Die Quadrate zweier natürlicher Zahlen unterscheiden sich um 93. Wie lauten diese Zahlen?

20. Aufgabe 18 des 1. Buches der Ἀριθμητική des DIOPHANT (um 250 n. Chr.): Drei Zahlen sind gesucht, sodass je zwei zusammen die jeweils dritte entweder um 20 oder um 30 oder um 40 übertreffen.

6.7.2 Teilen und Verteilen

21. Eine Anzahl Personen ist auf zwei Räume verteilt. Gehen 13 Personen aus dem zweiten in den ersten Raum, so sind dort doppelt so viele wie im zweiten. Wenn sich noch weitere 12 Personen aus dem zweiten in den ersten Raum begeben, befinden sich in diesem gerade viermal so viele wie im zweiten Raum. Wie groß ist die Gesamtzahl der Personen und wie viele befanden sich anfangs in den einzelnen Räumen?

22. Die Schülerzahlen zweier Klassen verhalten sich wie 4 : 5. An einem bestimmten Tag fehlen in der einen Klasse 2, in der anderen 1 Schüler, wodurch das Verhältnis der Schülerzahlen 3 : 4 wird. Wie viele Schüler besuchen jede Klasse?

23. Bei einer Gesellschaft verhielt sich die Anzahl der Herren zur Zahl der anwesenden Damen wie 3 : 2. Nachdem drei der Herren sich vorzeitig verabschiedet hatten, kamen noch zwei Ehepaare hinzu. Nun verhielt sich die Anzahl der Herren zu derjenigen der Damen wie 5 : 4. Wie viele Damen und Herren waren zu Beginn anwesend?

24. Karl und Otto kaufen zusammen ein Los für 10 €, wozu Karl 6 € und Otto 4 € beisteuern. Sie gewinnen eine größere Summe, die sie im Verhältnis ihrer Einsätze aufteilen. Karl kauft sich von dem Gewinn ein Grundstück um 60 000 €, Otto ein Auto um 27 000 €. Danach verbleibt Otto gerade noch doppelt so viel wie Karl. Wie groß war der Gewinn und wie viel erhielt jeder davon?

•**25.** Kunze und Link gründen ein Geschäft, an dessen Grundkapital jeder mit einer gewissen Summe als Geschäftseinlage beteiligt ist. Das Doppelte des Anteils von Kunze ist um 5000 € größer als der dreifache Anteil von Link. Der Gewinn nach dem ersten Geschäftsjahr wird anteilmäßig auf die beiden Partner verteilt. Kunze erhält dabei um 22 500 €, Link um 13 500 € weniger als seine Einlage. Wie groß ist das Grundkapital des Geschäfts und mit welchen Summen sind die beiden Partner daran beteiligt? Welchen Gewinn erzielten sie im ersten Jahr?

26. Zur Belieferung ihrer Kunden läßt eine Firma eine Anzahl gleich schwerer Kisten auf zwei Lastwagen von 1,5 t bzw. 2 t Tragkraft verladen. Sie werden auf die beiden Wagen im Verhältnis der Tragfähigkeit verteilt. Beim ersten Kunden werden vom kleineren Wagen 20, vom größeren 10 Kisten abgeladen. Nun enthält der größere Wagen doppelt so viel Ladegut wie der kleinere. Wie viele Kisten befanden sich ursprünglich auf jedem Wagen?

27. Ein erstes Petroleumfass enthält 8 l weniger als ein zweites. Gießt man nun aus dem zweiten 28 l in das erste Fass, so enthält dieses dreimal so viel wie jenes. Wie viel Liter Petroleum waren anfangs in jedem Fass?

28. Ein Bauer hat auf seinem Hof $2\frac{1}{2}$-mal so viel Hühner wie Kühe. Alle Hühner und Kühe zusammen haben 90 Füße. Wie viele Hühner und Kühe sind es?

• **29.** Ein Buchhändler bezieht drei verschiedene Sorten von Büchern zum Preis von 40 €, 12 € und 7 € pro Stück. Es sind insgesamt 100 Bücher, und die Rechnung lautet auf 1000 €. Wie viele Bücher von jeder Sorte waren es?

30. Aus dem griechischen *Papyrus Michigan* (1. Hälfte des 3. Jh.s n. Chr.): 9900 Drachmen* sollen an 4 Personen verteilt werden. Dabei erhält die vierte Person 300 Drachmen mehr, als die drei anderen zusammen erhalten; die dritte Person erhält 300 Drachmen mehr, als die erste und zweite zusammen erhalten; die zweite Person schließlich erhält mehr als die erste, und zwar um $\frac{1}{7}$ dessen, was die erste bekommt. Wie viel erhält jeder?

6.7.3 Mischungsaufgaben

31. Mischt man 7 kg einer ersten Kaffeesorte mit 9 kg einer zweiten Sorte, so ist der Preis für 1 kg der Mischung 10,25 €. Werden jedoch 9 kg der ersten mit 7 kg der zweiten Sorte gemischt, so kommt 1 kg der Mischung auf 9,75 € zu stehen. Was kostet 1 kg der ersten bzw. zweiten Sorte?

32. Von zwei Kaffeesorten kostet 1 kg der ersten 10 €, 1 kg der zweiten 14 €. Welche Mengen von beiden Sorten müssen gemischt werden, wenn 1 kg der Mischung 11 € kosten soll und außerdem von der zweiten Sorte 5 kg weniger als von der ersten in der Mischung enthalten sein sollen?

• **33.** Wird eine bestimmte Menge Salzlösung mit 187,5 cm^3 Wasser verdünnt, so ergibt sich eine 10%ige Mischung. Gießt man noch weitere 375 cm^3 Wasser dazu, dann enthält die neue Lösung nur noch 5% Salz. Wie viel Gramm Salzlösung waren ursprünglich vorhanden und wie hoch war ihr Prozentgehalt? (Führe die Masse des ursprünglich vorhandenen Wassers und die des darin gelösten Salzes als Unbekannte ein!)

34. Von zwei Gefäßen enthält das eine 5%ige, das andere 12%ige Salzlösung. Schüttet man den Inhalt beider Gefäße zusammen, so ergibt sich eine 9,2%ige Lösung. Wird diese noch mit 650 cm^3 reinem Wasser verdünnt, so sinkt ihr Salzgehalt auf 4%. Wie viel Gramm waren ursprünglich von jeder Lösung vorhanden?

35. Mischt man 200 cm^3 einer ersten Salzlösung mit 150 cm^3 einer zweiten, so ergibt sich eine Lösung von der Dichte 1,08 g/cm^3. Nimmt man dagegen

* δραχμή (drachmé) = *eine Handvoll* (kleinerer Münzen), meist eine Silbermünze mit von Gegend zu Gegend verschiedenem Wert.

150 cm^3 der ersten und 200 cm^3 der zweiten Lösung, so hat die Mischung die Dichte 1,09 g/cm^3. Welche Dichte haben die beiden Ausgangslösungen?

• **36.** Luft ist (im Wesentlichen) eine Mischung der Gase Sauerstoff und Stickstoff. Sauerstoff hat unter Normalbedingungen (0 °C, 1013 hPa) die Dichte 0,00143 kg/dm^3, Stickstoff 0,00125 kg/dm^3 und Luft 0,00129 kg/dm^3. Wie viel kg Sauerstoff bzw. Stickstoff befinden sich unter Normalbedingungen in einem Zimmer von 5 m Länge, 4 m Breite und 2,5 m Höhe?

37. Wenn man 2 g einer ersten Goldsorte mit 3 g einer zweiten mischt, entsteht eine Legierung vom Feingehalt* 500. Mischt man dagegen 7 g der ersten Sorte mit 3 g der zweiten, so erhält man eine Legierung vom Feingehalt 425. Bestimme die Feingehalte der beiden Goldsorten.

38. Eine Goldlegierung wird mit 1,3 g Kupfer verschmolzen, wodurch eine Legierung vom Feingehalt* 553,5 entsteht. Nachdem noch weitere 2 g Kupfer hinzugegeben wurden, hat die Legierung den Feingehalt 369. Wie viel Gramm der ursprünglichen Legierung wurden verwendet und welchen Feingehalt hatte sie?

•• **39.** Das Epigramm** des Metrodoros (330 n. Chr.):
Schmied einen Kranz mir, du Künstler! Nimm Gold und Kupfer zur Mischung, gieß auch Zinn noch hinzu und hartes Eisen! Denn sechzig Minen*** wiege der Kranz: Das Gold mit dem Kupfer zusammen wiege zwei Drittel vom Ganzen; das Gold mit dem Zinne zusammen wiege drei Viertel davon; das Gold mit dem Eisen hinwieder wiege drei Fünftel vom Kranz. Nun sag mir genauestens, wie viel du Gold benötigst dazu, wie viel von dem Kupfer, wie viel du Zinn auch benötigst, und sag, wie viel Eisen brauchst du am Ende, dass ein Kranz mir entsteht von sechzig Minen zusammen.

6.7.4 Bewegungsaufgaben

40. Klaus und Heinz wohnen in zwei Orten, die 22,5 km voneinander entfernt sind. Um sich zu treffen, gehen sie einander entgegen. Heinz bricht um 8 Uhr auf, während Klaus sich erst eine Viertelstunde später auf den Weg macht. Sie begegnen sich um 10.38 Uhr. Wären beide gleichzeitig weggegangen, hätten sie sich nach genau $2\frac{1}{2}$ Std. getroffen. Wie viel km legte jeder in der Stunde zurück?

41. Ein Schleppzug durchfährt auf der Donau die 288 km lange Strecke von Passau nach Wien stromabwärts in 14 Std. 24 Min., stromaufwärts in

* Der Feingehalt ist der in Promille der Gesamtmasse ausgedrückte Gehalt an reinem Edelmetall.

** ἐπίγραμμα (epigramma) = *Aufschrift, Inschrift*, hier *Sinngedicht*, eine poetische Form, in der ein Gedanke in konzentrierter Weise dargestellt wird.

*** μνᾶ (mna), lat. *mina*, ein orientalisches Lehnwort, bezeichnet eine Gewichtseinheit, die in Griechenland entweder 623,7 g (äginäisch) oder 436,6 g (attisch) entsprach.

32 Std. Berechne die mittlere Eigengeschwindigkeit des Schleppzuges und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Flusses.

42. Ein Schwimmer steigt in einen Fluss und versucht zunächst 1 Minute lang gegen die Strömung zu schwimmen. Er wird dabei jedoch 42 m abgetrieben. Daraufhin wendet er und schwimmt nun 3 Min. mit der Strömung. Er steigt 492 m von seinem Ausgangspunkt entfernt an Land. Wie viel Meter pro Sekunde legte er gegenüber dem Wasser im Durchschnitt zurück und wie groß war die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses?

43. An einem Föhntag startet in Fürstenfeldbruck ein Düsenflugzeug zu einem Testflug. Als Prüfstrecke dient die Entfernung zwischen einer bestimmten Marke auf dem Flugplatz und dem Gipfel der Zugspitze; sie beträgt 88,4 km. Für den Hinflug stoppt der Bordfunker eine Zeit von $276\frac{1}{4}$ s, für den Rückflug 260 s. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und diejenige des Windes, wenn man annimmt, dass die Flugstrecke genau in Windrichtung verlief? Wurde die »Schallmauer« durchbrochen? (Schallgeschwindigkeit: 340 m/s)

44. Ein Lastwagen fährt von München auf der Autobahn nach Nürnberg. 20 Min. später folgt ihm ein Personenkraftwagen, der ihn in 1 Std. einholt. Nach weiteren 20 Min. hat der Personenkraftwagen einen Vorsprung von 10 km. Berechne die Geschwindigkeit des Last- bzw. Personenkraftwagens.

45. Otto und Klaus tragen in einem Stadion ein Radrennen aus. Nachdem Otto $5\frac{1}{4}$ Runden gefahren ist, wird er von dem schnelleren Klaus zum ersten Mal überrundet. Beim Überholen stürzt jedoch Klaus vom Rad, zum Glück ohne ernstere Folgen. Bis er von neuem starten kann, ist Otto um 105 m weitergefahren. Klaus fährt mit der früheren Geschwindigkeit und holt Otto nach 94,5 s erneut ein. Wie viel km/h betragen die Geschwindigkeiten der beiden Fahrer?

46. Auf einer geschlossenen Aschenbahn von 350 m Länge starten zwei Läufer von demselben Punkte aus in entgegengesetzter Richtung. In dem Augenblick, in dem der schnellere gerade die halbe Bahn durchlaufen hat, beträgt der Abstand der beiden Läufer noch $16\frac{2}{3}$ m. Sie begegnen sich zum ersten Mal genau 25 s nach dem Start. Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat jeder der beiden Läufer?

47. Klaus und Peter starten gleichzeitig zu einem Wettlauf. Die Geschwindigkeit von Klaus ist um 12,5 % größer als die von Peter. Nachdem Klaus zum 340 m entfernten Ziel gelangt ist, kehrt er sofort um und trifft beim Rücklauf auf Peter, genau 40 s nach dem gemeinsamen Start. Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Läufer und in welcher Entfernung vom Startpunkt treffen sie zusammen?

48. Von zwei ineinander greifenden Zahnrädern hat das eine 8 Zähne mehr als das andere. 5 Umdrehungen des kleineren Rades entsprechen gerade 3 Umdrehungen des größeren. Wie viel Zähne hat jedes der beiden Räder?

• **49.** Bei einer Schnellzugslokomotive macht auf einer Strecke von 441 m das Laufrad 112 Umdrehungen mehr als das größere Treibrad. Auf je 7 Umdrehungen des Laufrads kommen 3 Umdrehungen des Treibrads. Wie viele Umdrehungen macht das Treibrad auf einer Strecke von 10,5 km?

6.7.5 Aufgaben aus der Geometrie

50. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich der Winkel an der Spitze zu einem Basiswinkel wie **a)** 6 : 7, **b)** 23 : 1. Berechne alle Winkel des Dreiecks.

51. Von den Winkeln α, β und γ eines Dreiecks verhält sich α zu β wie 5 zu 6, β zu γ wie 2 zu 3. Bestimme die drei Winkel.*

52. Die Hälfte eines Umfangswinkels ist um 6° kleiner als der dritte Teil des zugehörigen Zentriwinkels. Bestimme die beiden Winkel.

53. Von den drei aufeinander folgenden Winkeln α, β, γ eines Sehnenvierecks messen α und β zusammen 213°, β und γ zusammen 231°. Berechne sämtliche Winkel des Vierecks.

54. In einem gleichschenkligen Dreieck von 32,5 cm Umfang ist ein Schenkel 5-mal so lang wie der dritte Teil der Basis. Berechne die drei Seiten.

55. Ein rechteckiger Bogen Papier vom Format DIN A 4 hat einen Umfang von 102 cm. Die Seiten verhalten sich (ziemlich genau) wie 10 : 7. Bestimme Länge und Breite.

56. Die Mittelparallele eines Trapezes misst 6,8 cm. Die beiden parallelen Seiten verhalten sich wie 7 : 10. Berechne ihre Länge.

57. In einem Tangentenviereck mit den aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d sind a und c zusammen 84 cm lang, während b und d sich wie 10 : 11 verhalten. Berechne b und d.

58. In einem Tangentenviereck mit den aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d beträgt die Summe aus a und b 14 cm, ferner verhält sich a zu d wie 4 : 7. Wie groß sind die vier Seiten, wenn der Umfang 40 cm beträgt?

59. Die Fläche eines Rechtecks bleibt ungeändert, wenn man die erste Seite um 2 cm größer, die zweite um 1 cm kleiner macht. Verkleinert man hingegen die erste Seite um 1 cm und vergrößert die zweite um 2 cm, so hat das neue Rechteck einen um 3 cm^2 größeren Flächeninhalt. Berechne die Seiten des ursprünglichen Rechtecks.

* Der deutsche Dichter und Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (27.9.1719 Leipzig – 20.6.1800 Göttingen) brachte 1764 die Sitte auf, die Innenwinkel eines Dreiecks mit α, β und γ zu bezeichnen. Allgemein üblich wurde diese Bezeichnungsweise seit 1826 durch den deutschen Straßenbauingenieur und Mathematiker August Leopold Crelle (17.3.1780 Eichwerder bei Wriezen – 6.10.1855 Berlin), der zahlreiche Rechenbücher verfasste und 1826 das heute noch existierende *Journal für reine und angewandte Mathematik*, eine angesehene Fachzeitschrift, begründete.

60. Ein Rechteck hat einen Umfang von 34 cm. Wenn man seine Länge verdoppelt und die Breite um 3,5 cm verkleinert oder die Breite verdoppelt und die Länge um 5 cm verringert, so sind die entstehenden Rechtecke flächengleich. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.

61. Vergrößert man bei einem Rechteck die eine Seite um 2 dm und verringert die andere um 4 dm, so erhält man ein flächengleiches Quadrat. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

62. Ein Rechteck von 28,6 cm Umfang wird im Maßstab 5 : 1 vergrößert. Im neuen Rechteck ist der Unterschied der beiden Seiten gleich der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Berechne dessen Seiten.

6.7.6 Verschiedenes

:63. Aus der *Rechenung auff der linihen vnd federn* des Adam Ries (1492–1559) von 1522 nach der Ausgabe von 1574, dem *Rechenbuch auff Linien und Ziphren*:

Jtem/ zween wöllen ein Pferdt kauffen/ Als A. vnd B. für 15. fl. Spricht A. zum B. gib mir deines gelts ein drittheil/ so wil ich meins darzu thun / vnd das Pferdt bezahlen. Spricht B. zum A gib mir von deinem gelt ein viertheil/ so wil ich mit meinem gelt hinzu gethan das pferdt bezahlen. Nun frage ich/ wie viel jeglicher in sonderheit gelts hab?

64. Frau Koch kauft in einem Lebensmittelgeschäft 1,5 kg Zucker und 5 kg Mehl. Der Gesamtpreis dafür ist 8,30 €. Eine andere Kundin bezahlt für 1 kg Zucker und 2 kg Mehl 3,80 €. Berechne den Preis für 1 kg Zucker und 1 kg Mehl.

65. Zur Ergänzung seiner Wohnungseinrichtung hat Herr Knapp ein Darlehen zu 6 % aufgenommen, von dem er am Ende eines jeden Jahres außer dem Zins noch eine feste Rate zurückbezahlt. Nach dem ersten Jahr hat er 1196 €, nach dem zweiten Jahr 1140,80 € zu entrichten. Welches Kapital hat er aufgenommen und wie groß ist die Rückzahlungsrate?

66. Ein erstes Kapitel, das $5\frac{1}{2}$ % Zinsen trägt, bringt ebenso viel ein wie ein zweites Kapitel, das zu $6\frac{1}{2}$ % ausgeliehen ist. Wäre umgekehrt das erste zu $6\frac{1}{2}$ % und das zweite zu $5\frac{1}{2}$ % angelegt, so wäre der Jahreszins beider Kapitalien um 20 € größer als vorher. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

67. In einer Verkaufsstelle für Heizöl wird die Monatsabrechnung aufgestellt. Eingekauft wurden 82 t, während 76 t verkauft wurden. Es ergibt sich ein Einnahmeüberschuss von 3224 €. Wie groß ist der Einkaufs- bzw. Verkaufspreis einer Tonne Heizöl, wenn das Unternehmen mit 25 % Gewinn arbeitet?

68. Die Kosten für elektrische Energie setzen sich aus einem monatlichen Grundpreis und dem sog. Arbeitspreis zusammen. In einem Haushalt wurden in den ersten vier Monaten eines Jahres 1730 Kilowattstunden (kWh) verbraucht. In der Jahresabrechnung war für diesen Zeitraum ein Betrag von 259,25 € angegeben. Ab Mai galt ein um 0,5 Cent/kWh höherer Arbeitspreis. Für die restlichen acht Monate, in denen 3165 kWh verbraucht wurden, mussten 491,55 € bezahlt werden. Wie hoch war der monatliche Grundpreis und welcher Arbeitspreis pro kWh wurde zuletzt berechnet?

69. Von zwei Konservendosen hat die erste 153 g brutto, die zweite 576 g brutto. Ihre Nettogewichte verhalten sich wie 1 : 4. Von den leeren Dosen ist die zweite um 15 g schwerer als die erste. Wie viel Prozent beträgt bei jeder Dose die Tara? Wie groß sind die Nettogewichte?*

70. An einer Balkenwaage hängen links ein Kohlestück von der Dichte 1,4 g/cm^3, rechts ein Granitstein von der Dichte 2,8 g/cm^3. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn man die beiden Körper vollständig in Wasser eintauchen lässt. Um in Luft Gleichgewicht herzustellen, muss rechts eine zusätzliche Masse von 63 g angehängt werden. Bestimme die Volumina der beiden Körper.

71. Vor 3 Jahren war der Vater 4-mal so alt, wie sein Sohn heute ist. Nach 19 Jahren ist der Vater gerade doppelt so alt wie der Sohn. Wie alt sind beide jetzt?

72. Hans sagt zu seinem Bruder Otto: »In 3 Jahren wirst du gerade doppelt so alt sein wie ich.« Hierauf antwortet Otto: »Vor 5 Jahren war ich sogar 6-mal so alt wie du.« Wie alt sind Hans und Otto?

73. The combined ages of Mary and Ann are 48 years. Mary is twice as old as Ann was, when Mary was half as old as Ann will be, when Ann is three times as old as Mary was, when Mary was three times as old as Ann.

74. Ein etwas neugieriger Herr fragte bei einem Ball zwei Schwestern nach ihrem Alter. Die Ältere gab ihm zur Antwort: »Vor 20 Jahren war ich gerade doppelt so alt wie meine Schwester. In 20 Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie meine Schwester heute ist.« – »Danke«, sagte der Herr geschmeichelt und begann eifrig zu rechnen. Zu welchem Ergebnis kam er?

75. Bei einer Gesellschaft wollte ein Herr das Alter seiner Tischdame in Erfahrung bringen. Da er es aber nicht für schicklich hielt, sie direkt danach zu fragen, bat er sie, es erraten zu dürfen. Nachdem sie sich damit einverstanden erklärt hatte, gab er ihr Papier und Bleistift und sagte:
»Schreiben Sie bitte heimlich Ihre Telefonnummer auf den Zettel und multiplizieren Sie diese mit 20; nun 31 addieren, das Ergebnis mit 5 multiplizieren und Ihr Alter dazuzählen. Wollen Sie schließlich noch die Anzahl der Tage von 30 Wochen, also 210, hinzuzählen und 365 abziehen. Nennen Sie mir nun bitte die gefundene Zahl.« – »Gern«, sagte die Dame, »sie

* Das Wort **Tara** ist arabischen Ursprungs: *tarh = wegwerfen, abziehen*. Gegen Ende des 15. Jh.s wird es italienisiert zu tara, womit spätestens seit dem 16 Jh. das Gewicht der Verpackung bezeichnet wird. Ende des 15. Jh.s kommen dann **netto** (= *rein*) zur Bezeichnung des reinen Warenanteils und schließlich Anfang des 16. Jh.s **brutto** (= *roh, gesamt*) zur Bezeichnung des Gesamtgewichts in Gebrauch. Im Laufe des 16. Jh.s werden die Ausdrücke ins Deutsche übernommen.

heißt 6362832.« – »Dann sind Sie 32 Jahre alt«, rief der Herr, »und außerdem ist Ihre Telefonnummer 63628.« – »Das stimmt«, sagte verblüfft die Dame und wusste nicht, wie sie sich das Rätsel erklären sollte. Kannst du es lösen?

76. Hans möchte Ottos Geburtsdatum erraten. Er lässt ihn zu diesem Zweck folgende Rechnung ausführen: »Schreibe, ohne dass ich es sehen kann, auf ein Blatt dein Geburtsjahr, multipliziere es mit 5 und zähle 3 hinzu; vervielfache nun mit 20, addiere 52 und die Nummer deines Geburtsmonats und ziehe sodann 112 ab. Verdopple das Ergebnis, zähle 31 hinzu und multipliziere die erhaltene Zahl mit 50. Addiere jetzt noch 365 und die Nummer des Tages deiner Geburt und vermindere das Ganze um 1915.« Etwas erschöpft nennt Otto die Zahl 19760417. »Dann bist du also am 17. April 1976 geboren«, antwortet Hans. Erkläre dies!

77. Die Entfernung zweier Bäume schätzte Karl auf 85 m, Fritz auf 75 m, wobei Karl zu viel und Fritz zu wenig schätzte. Der Schätzfehler von Fritz war $2\frac{1}{3}$-mal so groß wie jener von Karl. Um wie viel Meter hatte sich jeder verschätzt? Wie groß war die wirkliche Entfernung?

78. Der Stausee eines Elektrizitätswerks wird über einen Zuflusskanal mit Wasser versorgt. Wenn 3 von den 5 gleich starken Turbinen in Betrieb sind, nimmt der Inhalt des Stausees in 12 Stunden um 360000 m^3 zu. Sind jedoch alle 5 Turbinen eingeschaltet, so verringert sich bei unverändertem Zufluss der Wasservorrat in 6 Stunden um 300000 m^3. Wie viel m^3 Wasser fließen dem Stausee in einer Stunde zu und welche Wassermenge benötigt eine Turbine in der Stunde?

• **79.** Da der Trinkwasserspeicher einer Stadt um 11 Uhr nur noch zur Hälfte gefüllt ist, wird eine Förderpumpe eingeschaltet. Dennoch sinkt infolge des starken Verbrauchs bis 12 Uhr der Wasservorrat auf $\frac{2}{5}$ des gesamten Fassungsvermögens. Deshalb wird nun noch eine zweite, gleich starke Förderpumpe in Betrieb genommen. Daraufhin hat sich bis 14 Uhr der Speicher zu $\frac{4}{5}$ gefüllt, obwohl der Wasserverbrauch während der ganzen Zeit konstant blieb. In welcher Zeit würde nun nach Ausschalten beider Pumpen der Behälter leer sein, wenn der Verbrauch konstant bliebe? Wie lange braucht eine der Pumpen um den leeren Behälter zu füllen, wenn dabei keine Wasserentnahme erfolgt?

80. Aus dem *Chiu Chang Suan Shu* (Buch VIII, Aufgabe 1):
Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 34 Tou. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garben schlechter Ernte erhält man den Ertrag von 26 Tou. Frage: Wie viel ist jedes Mal aus 1 Garbe der Ertrag der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte? (1 Tou $\approx$ 0,2 dm^3)

81. Zwei Heimarbeiterinnen stellen für eine Firma denselben Serienartikel her. Als die zweite mit der Arbeit anfängt, hat die erste bereits 5 Stück fertig gestellt. Da die zweite Arbeiterin flinker ist und die erste außerdem eine Pause von einer halben Stunde einlegt, holt sie diese nach 2 Std. ein. Nach weiteren 3 Std. beendet die zweite ihre Arbeit, während die erste noch eine halbe Stunde länger tätig sein muss, um dieselbe Stückzahl zu erreichen. Wie viel Stück fertigt jede Arbeiterin pro Stunde an?

82. Eine Tischdecke von 1,60 m Länge und 1,30 m Breite wird auf einer Nähmaschine mit einer Doppelnaht eingesäumt, wobei die zweite Naht mit einer etwas größeren Stichweite genäht wird als die erste. Auf diese Weise treffen bei der zweiten Naht auf die Längsseite 160 Stiche weniger als bei der ersten. Zum Einsäumen des Tischtuchs waren insgesamt 5220 Stiche notwendig. Welche Stichlängen haben die beiden Nähte?

83. Ein rechteckiges Grundstück wird so umzäunt, dass in jeder Ecke ein Pfosten steht und die einzelnen Pfosten in gleichem Abstand aufeinander folgen. Auf der Längsseite stehen 7 Pfosten mehr als auf der Breitseite. Wie viele Pfosten stehen auf einer Längs- bzw. auf einer Breitseite, wenn sich die Länge des Grundstücks zu seiner Breite wie 3 : 2 verhält?

•**84.** Ein rechteckiges Grundstück von 126 m Länge und 42 m Breite soll mit Obstbäumen bepflanzt werden, die in Längs- und Querreihen angeordnet sind. Dabei soll der Abstand eines äußeren Baumes von der Grenze des Grundstücks gleich dem halben Baumabstand in der betreffenden Richtung sein. Bei einer ersten Planung wird vorgesehen, dass der Abstand zwischen zwei Längsreihen ebenso groß ist wie der zwischen zwei Querreihen. Danach entschließt sich der Besitzer jedoch, die Zahl der Längsreihen um 1, die der Querreihen um 2 zu erhöhen, wodurch er 32 Bäume mehr unterbringt. Wie viele Bäume werden also endgültig gepflanzt?

•**85.** Als Abschluß seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – von 1544 bringt Michael Stifel (1487(?)–1567) ein *exemplum pulchrum*, ein »schönes Beispiel«:
Drei Reisende finden, während sie zusammen so dahingehen, einen Ranzen mit 73 Gulden. Sie stellen fest, dass diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft der ersten beiden das Doppelte dessen sind, was der erste und dritte und der zweite und dritte gemeinsam bei sich haben. Diese 73 Gulden ergeben aber auch mit dem Besitz des ersten und dritten das Dreifache dessen, was der zweite und dritte und der erste und zweite mit sich führen. Und schließlich ergeben diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft des zweiten und dritten das Vierfache dessen, was der erste und zweite und der erste und dritte zusammen bei sich tragen. Wie viele Gulden besitzt jeder?

Zu Seite 165:

Aus der Vorrede zu Buch IX der *Zehn Bücher über die Architektur* des VITRUV, Übersetzung von C. FENSTERBUSCH.

9. Obwohl aber ARCHIMEDES viele verschiedene, bewundernswerte Entdeckungen gemacht hat, scheint von allen diese, von der ich nun berichte, auch mit unendlich großem schöpferischem Geist erarbeitet zu sein. In Syrakus nämlich hatte sich HIERON DER JÜNGERE zu einer starken Königsmacht emporgeschwungen. Als er nach seinen Siegen den unsterblichen Göttern in einem Heiligtum einen goldenen Kranz als Weihegabe niederzulegen beschlossen hatte, verdingte er die Anfertigung um einen Arbeitslohn und wog dem Unternehmer das Gold genau nach Gewicht zu. Dieser legte zur gegebenen Zeit das schön handgearbeitete Werkstück zur Abnahme vor, und er schien das Gewicht des Kranzes genau abgeliefert zu haben. 10. Später wurde Anzeige erstattet, es sei Gold weggenommen und dem Kranz ebenso viel Silber beigemischt worden. HIERON war darüber erbost, dass er betrogen war. Da er jedoch kein Mittel ausfindig machen konnte, wie er die Unterschlagung nachweisen konnte, bat er ARCHIMEDES, er sollte es übernehmen, sich darüber Gedanken zu machen. Während dieser darüber nachdachte, ging er zufällig in eine Badestube und, als er dort in die Badewanne stieg, bemerkte er, dass ebenso viel wie er von seinem Körper in die Wanne eintauchte, an Wasser aus der Wanne herausfloss. Weil (dieser Vorgang) einen Weg für die Lösung der Aufgabe gezeigt hatte, hielt er sich daher nicht weiter auf, sondern sprang voller Freude aus der Badewanne, lief nackend nach Hause und rief mit lauter Stimme, er habe das gefunden, was er suche. Laufend rief er nämlich immer wieder griechisch: „Ich hab's gefunden! Ich hab's gefunden". 11. Dann aber soll er in Verfolg dieser Entdeckung zwei Klumpen von dem gleichen Gewicht, das auch der Kranz hatte, gemacht haben, einen aus Gold, einen zweiten aus Silber. Danach füllte er ein großes Gefäß bis an den äußersten Rand mit Wasser, und dahinein tauchte er den Silberklumpen. Der Größe des in das Wasser eingetauchten Silberklumpens entsprach die Menge des abfließenden Wassers. Dann nahm er den Klumpen heraus. Darauf goss er, mit einem Sextar* abmessend, so viel Wasser, wie es weniger geworden war, in das Gefäß nach, sodass das Wasser in derselben Weise, wie es vorher gewesen war, mit dem Rand eine waagerechte Fläche bildete. So fand er daraus, welches bestimmte Gewicht Silber einem bestimmten Maß Wasser entsprach. 12. Nachdem er dies festgestellt hatte, tauchte er in der gleichen Weise den Goldklumpen in das volle Gefäß, nahm ihn wieder heraus, fügte in der gleichen Weise das abgemessene Quantum Wasser hinzu und fand, weil der Messbecher eine geringere Anzahl von Sexteln Wasser anzeigte, um wie viel bei gleich großem Gewicht ein Goldklumpen in seinem Volumen kleiner ist als ein Silberklumpen. Später aber füllte er das Gefäß wieder auf, tauchte den Kranz selbst in das gleiche Wasser hinein und fand, dass, als der Kranz eingetaucht war, mehr Wasser (aus dem Messbecher) abgeflossen war als dann, als der Goldklumpen von gleichem Gewicht eingetaucht war. Und so errechnete er aus dem, was im Falle des Kranzes mehr an Wasser zugetan war als im Falle des Goldklumpens, die Beimischung des Silbers zum Gold und wies sie und die handgreifliche Unterschlagung des Goldarbeiters nach.

* sextarius = 0,547 l, der 6. Teil eines congius