Anschauliche Geometrie

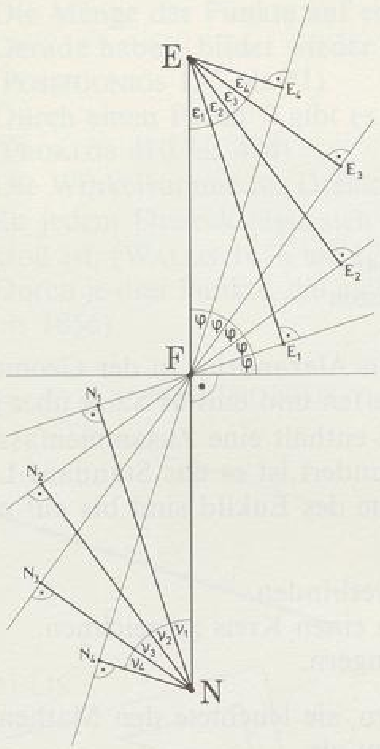
Barth, Friedrich

München, 2001

Parallelenaxiom

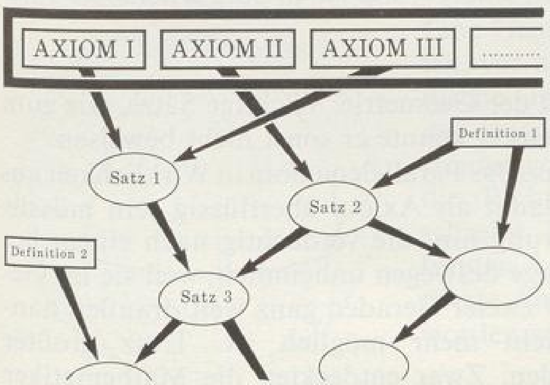
9. Von den Geraden g, h, u und v ist bekannt: $g \perp u$, $h \perp v$ und $\sphericalangle(u, v) = 40°$. Berechne alle weiteren Schnittwinkel dieser Geraden.

10. Wie groß sind in der Figur die Winkel ε_1 bis ε_4 und ν_1 bis ν_4?



3.7 Parallelenaxiom

In der Wissenschaft ist es guter Brauch, bei jeder Behauptung die Voraussetzungen zu nennen, auf die sich die Behauptung stützt. Für ein mathematisches Gebiet stellt man die zu Grunde liegenden Voraussetzungen meist unter dem Namen **Fundamentalsätze** oder auch **Postulate** oder **Axiome** zusammen. Diese Axiome sollten möglichst einleuchtend sein, denn sie werden nicht bewiesen, sondern bilden die Grundlage des gesamten logischen Geflechts, das man aus Sätzen und Definitionen knüpft.

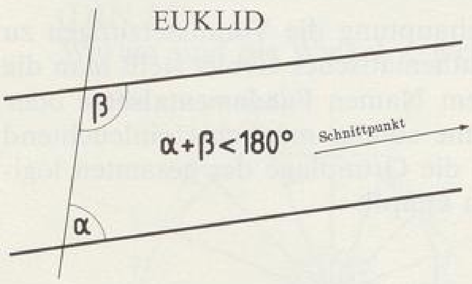


Euklid
Gemälde von Max Ernst 1945
Menil Foundation Inc. Houston

Um 300 v. Chr. lehrte der Grieche EUKLID Mathematik in Alexandria. In der Geometrie hat er als einer der ersten ein System von Axiomen geschaffen und daraus Sätze über geometrische Figuren abgeleitet. Sein Buch »Die Elemente« enthält eine Zusammenfassung des geometrischen Wissens seiner Zeit. Bis ins 20. Jahrhundert ist es das Standard-Lehrbuch der Geometrie in den Schulen gewesen. Die Axiome des Euklid sind bis auf eines sehr plausibel, so fordert er zum Beispiel:

Es ist immer möglich, zwei Punkte mit einer Strecke zu verbinden.
Es ist immer möglich, um jeden Punkt mit jedem Radius einen Kreis zu zeichnen.
Es ist immer möglich, eine Strecke beliebig weit zu verlängern.

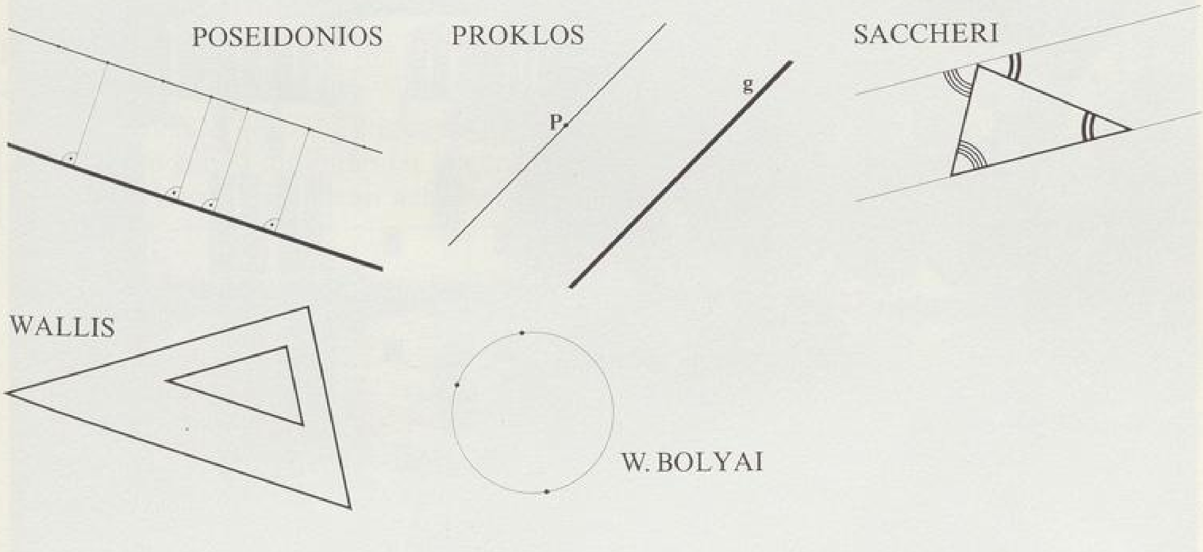
Aber eine Forderung ist viel komplizierter als alle andern, sie leuchtete den Mathematikern lange Zeit nicht so ein. Es ist das 11. Axiom, bekannt als
Parallelenaxiom:
Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei rechte Winkel, dann schneiden sie sich.



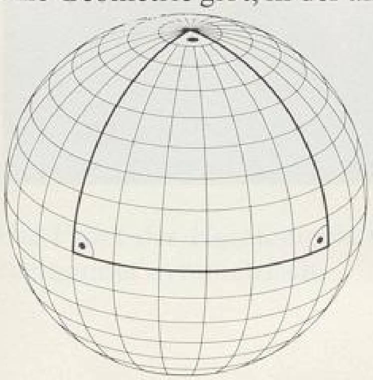
Euklid brauchte dieses Axiom zu seinem Aufbau der Geometrie. Wichtige Sätze, wie zum Beispiel den Satz über die Winkelsumme im Dreieck, konnte er sonst nicht beweisen.
Die Mathematiker nach Euklid glaubten lange, dass das Parallelenaxiom in Wirklichkeit aus den übrigen Axiomen Euklids herleitbar und damit als Axiom überflüssig sein müsste. Darauf deutete schon die wenn-dann-Formulierung hin, die verdächtig nach einem beweisbaren Satz klang. Auch war vielen die Aussage deswegen unheimlich, weil sie im Gegensatz zu den anderen Axiomen vom Verhalten zweier Geraden ganz weit draußen handelt, wo eine zeichnerische Überprüfung nicht mehr möglich ist. Trotz größter Anstrengungen hat keiner einen Beweis gefunden. Zwar entdeckten die Mathematiker

viele Sätze, die sich genauso gut wie das Parallelenaxiom zum Aufbau der Geometrie eignen, aber auch alle diese Sätze ließen sich nur beweisen, wenn man das Parallelenaxiom voraussetzte. Einige dieser Sätze, die sich als gleichwertig mit dem Parallelenaxiom erwiesen haben, sind:

- Die Menge der Punkte auf einer Seite einer Gerade, die denselben Abstand von dieser Gerade haben, bildet wieder eine Gerade.
  (Poseidonios 135 bis 51)
- Durch einen Punkt P gibt es zu einer Gerade g genau eine Parallele
  (Proklos 410 bis 484)
- Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°. (Saccheri 1667 bis 1733)
- Zu jedem Dreieck lässt sich ein Dreieck mit gleichen Winkeln zeichnen, das beliebig groß ist. (Wallis 1616 bis 1703)
- Durch je drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen, geht ein Kreis. (W. Bolyai 1775 bis 1856)



In diesem Buch haben wir das Parallelenaxiom versteckt in der Behauptung, dass bei einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar die Z-Winkel gleich groß sind.
Erst Carl Friedrich Gauss (1777 bis 1855) ist der Nachweis gelungen, dass das Parallellenaxiom aus den übrigen Axiomen Euklids bestimmt nicht gefolgert werden kann. Ebenso wie J. Bolyai (1802 bis 1860) und N. I. Lobatschewski (1792 bis 1856) zeigte Gauß, dass es auch eine Geometrie gibt, in der alle Axiome Euklids bis aufs Parallelenaxiom gelten.



Eine Geometrie, in der nicht alle euklidischen Axiome gelten, vor allem nicht das Parallelenaxiom, heißt nichteuklidische Geometrie. Ein Beispiel dafür ist die Geometrie auf der Kugel; dort gibt es auch Dreiecke mit einer Winkelsumme von 270°. Offen bleibt die Frage, welche Geometrie die ›Richtige‹, d. h. diejenige ist, die unsere Welt genau beschreibt. Bis heute hat man noch kein ebenes Dreieck gefunden, bei dem durch noch so genaue Messung eine gesicherte Abweichung von der Winkelsumme 180° festgestellt worden wäre.