Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.1 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

6 Lineare Gleichungssysteme

6.1 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Bisher ging es beim Lösen von Gleichungen fast immer darum, den Wert einer einzigen zunächst unbekannten Zahl zu bestimmen. Es gibt aber auch viele Aufgaben, bei denen nach zwei oder mehr Zahlen gefragt wird.

Beispiel 1:

Gesucht sind zwei Zahlen mit der Summe 100.
Es wird dir leicht gelingen, solche Zahlen zu finden, zum Beispiel 50 und 50, aber auch 0 und 100, 1 und 99, $4\frac{1}{7}$ und $95\frac{6}{7}$, -200 und 300 usw. Es gibt offensichtlich unendlich viele solche Zahlenpaare. Man kann eine der beiden Zahlen völlig willkürlich wählen; die andere liegt dann fest. Bezeichnet man die eine Zahl mit x, die andere mit y, so muss folgende Gleichung gelten:

$$x + y = 100.$$

Bei Beispiel 1 handelt es sich um eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Ebenso kann man natürlich auch Gleichungen aufstellen, die noch mehr Unbekannte enthalten.

Beispiele:

2) $5x - 7y + 3z - 6 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)

3) $w + 2x + 3y + z = 7$ (Gleichung mit den vier Unbekannten w, x, y, z)

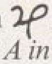
4) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)

In allen derartigen Fällen spricht man von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
Eine Lösung einer Gleichung mit mehreren Unbekannten kann natürlich nicht aus einer einzigen Zahl bestehen. Man muss vielmehr *jede* der auftretenden Unbekannten so durch eine Zahl ersetzen, dass die Gleichung erfüllt ist. Lösungen einer Gleichung mit zwei Unbekannten sind also Zahlenpaare, solche einer Gleichung mit drei Unbekannten Zahlentripel usw.
So sind die Zahlenpaare $(50|50)$, $(0|100)$, $(1|99)$ usw. Lösungen der Gleichung von Beispiel 1.
Die Zahlentripel $(0|0|2)$, $(2|1|1)$ und $(1|-1|-2)$ sind Lösungen der Gleichung von Beispiel 2. Prüfe dies nach und suche noch weitere Lösungen.
Bei einer Lösung kommt es wesentlich auf die Reihenfolge der einzelnen Zahlen an. Zum Beispiel ist $(2|1|1)$ eine Lösung von Beispiel 2, während $(1|2|1)$ keine Lösung darstellt. Denn die Reihenfolge der Zahlen muss genau der (in diesem Fall alphabetischen) Reihenfolge der Unbekannten entsprechen, für

die sie einzusetzen sind. Man spricht daher von geordneten Paaren, geordneten Tripeln usw., allgemein bei n Unbekannten von geordneten n-Tupeln von Zahlen*. Da in der Mathematik die Begriffe Paar, Tripel, ..., n-Tupel nur für geordnete Mengen verwendet werden, verzichten wir in Zukunft auf den Zusatz »geordnet«.

> **Definition 123.1:** Unter einer Lösung einer Gleichung mit n Unbekannten versteht man ein ***n*-Tupel** von Zahlen, das die Gleichung erfüllt, d. h., sie beim Einsetzen zu einer wahren Aussage macht.

**Zur Geschichte

Wie du weißt, ist Algebra vor mehr als 4000 Jahren in Babylon und fast gleichzeitig in Ägypten aus Problemen des Alltags, den sog. Textaufgaben, entstanden. Da nimmt es nicht wunder, dass sich darunter auch Aufgaben finden, zu deren Lösung man mehrerer Unbekannter bedarf. Die Babylonier führten daher zur ersten Unbekannten  (usch) = *Länge* noch ein zweite ein, und zwar, was nicht überrascht,  (sag) = *Breite* (Aufgabe 145/**19**). Erstaunlicherweise sind uns von den Ägyptern nur wenige Aufgaben mit 2 Unbekannten überliefert, die überdies von so einfacher Natur sind, dass man die zweite gesuchte Größe sofort durch die erste ausdrücken konnte (Aufgabe 131/**7**), so wie du es auch in der 7. Klasse gemacht hast. Auch die Griechen umgehen fast immer das Rechnen mit mehreren Unbekannten. Zwar spricht DIOPHANT (um 250 n. Chr.) in seinen Aufgaben von der *ersten* ($\acute{o}\ \alpha^{o\varsigma}$), der *zweiten* ($\acute{o}\ \beta^{o\varsigma}$), der *dritten* ($\acute{o}\ \gamma^{o\varsigma}$) usw. – gemeint war immer »Zahl« –, aber er drückt sie alle, oft recht raffiniert, durch seine Unbekannte ς' aus, sodass er doch wieder nur mit einer Gleichung mit einer Unbekannten rechnen muss. Die Idee, für weitere unbekannte Größen eigene Namen und Zeichen einzuführen, hatten $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende nach den Babyloniern erst wieder die Inder: Sie gaben ihnen die Namen von Farben. Als Zeichen verwendeten sie die Anfangssilbe. So findet man bei BRAHMAGUPTA (598– nach 665) neben seinem या = *yā* (für die 1. Unbekannte) का = *kā* (von kālika = schwarz), नी = *nī* (von nīlaka = blau), पी = *pī* (von pītaka = gelb) und लो = *lo* (von lohitaka = rot) usw. Das war recht bequem! Umso mehr erstaunt es uns, dass die Araber als gelehrige Schüler der Inder sich fast gar nicht mit Gleichungen mit mehreren Unbekannten beschäftigten. Und da wir Europäer die Schüler der Araber sind, hat es lange gedauert, bis wir aus eigenen Stücken mit mehreren Unbekannten umzugehen lernten. LEONARDO VON PISA, gen. FIBONACCI (um 1170 – nach 1240), benennt sie mit *causa* = *Sache* und *res* = *Ding*. Eine grundlegend neue Idee hatte Michael STIFEL (1487 (?) – 1567), als er 1544 in seiner *Arithmetica integra* zur Unbekannten  noch 1A, 1B, 1C als weitere Unbekannte einführt und mit ihnen sogar rechnet: *3 A in 9 B, fiunt 27 AB*, d. h., 3A · 9B = 27AB. Das bringt den französischen Mönch Johannes BUTEO (1492 Charpey – 1564/72 Romans-

* Diesen Wortbildungen liegen die lateinischen Verhältniszahlen zugrunde. Simplus, duplus, triplus, quadruplus, quintuplus, sextuplus, septuplus und octuplus ... (einmal so groß, zweimal so groß, dreimal so groß, ...) ließen im Deutschen das wenig gebrauchte *Dupel* für ein Paar und die Wörter *Tripel*, *Quadrupel*, *Quintupel*, *Sextupel* usw. entstehen, denen man dann verallgemeinernd das *n-Tupel* anschloss.

sur-Isère) dazu, gleich mit A, B und C zu rechnen (Aufgabe 149/**20**). Simon STEVIN (1548–1620) greift gewissermaßen wieder DIOPHANT auf, wenn er 1585 in seiner *L'arithmétique* die Unbekannten der Reihe nach mit ①, *sec* ①, *ter* ①, *quart* ① bezeichnet. 1591 erzielt jedoch François VIÈTE (1540–1603) mit seiner *In artem analyticem Isagoge* den Durchbruch: Sowohl für bekannte wie auch für unbekannte Größen werden Buchstaben verwendet, und es wird mit ihnen gerechnet! Sein an sich vernünftiger Vorschlag, für die Unbekannten die Vokale A, E, I, O, U und Y, für die Bekannten die Konsonanten zu verwenden, wird durch die bequemere Schreibweise abgelöst, die 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* ohne weitere Begründung einführte, nämlich, bekannte Größen mit $a, b, c \ldots$, unbekannte mit x, y, z zu bezeichnen, wobei er anfänglich noch zur logischen Reihenfolge z, y, x neigte.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlenpaare sind Lösungen der Gleichung $2x - 3y + 1 = 0$?
$(0|0)$, $(2|-5)$, $(4|3)$, $(3|4)$, $(0|\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}|0)$, $(-\frac{1}{2}|\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}|0)$.

2. Fülle in den Klammern die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlenpaare Lösungen der Gleichung $y = 3x + 5$ sind.
$(1|\;)$, $(\;|20)$, $(-7|\;)$, $(\frac{1}{3}|\;)$, $(\;|0)$, $(\;|5)$, $(1{,}2|\;)$, $(\;|5{,}7)$.

3. Welche der folgenden Zahlentripel sind Lösungen der Gleichung $5x - 2y = 2z + 4$?
$(0|0|0)$, $(4|3|5)$, $(4|5|3)$, $(5|4|3)$, $(-2|5|-12)$, $(-2|-12|5)$, $(2|12|5)$, $(2|12|-9)$.

4. Fülle die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlentripel Lösungen der Gleichung $7x - 6y - z = 0$ sind.
$(0|\;|0)$, $(0|1|\;)$, $(\;|1|1)$, $(\;|-1|-13)$, $(5|-2{,}5|\;)$, $(\frac{1}{3}|\;|-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}|-\frac{2}{3}|\;)$, $(\;|\frac{1}{3}|-\frac{2}{3})$.

5. Bestimme für die Gleichung $w + 2x - 9y + 3z = 6$ eine Lösung,
a) in der keine Null vorkommt, **b)** die nur ganze Zahlen enthält,
c) die nur natürliche Zahlen, **d)** die nur negative Zahlen enthält.

6. Wie lauten sämtliche aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehenden Lösungen der Gleichung $x + y + z = 1$?

7. Bestimme diejenige Lösung der Gleichung $4x - 11y - 3z = 20$, die aus drei gleichen Zahlen besteht.

8. Bestimme sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen:
a) $(x-1)^2 + y^2 = 0$ **b)** $(x-3)^4 + (y+1)^2 + (z-0{,}5)^6 = 0$

•**9.** Untersuche die Lösbarkeit der folgenden Gleichungen, wobei als Grundmenge zuerst die Menge der ganzen, dann die Menge der rationalen Zahlen gewählt sei.
a) $3x = 7$ **b)** $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2}{5}$ **c)** $x^2 + 1 = 0$ **d)** $2x + 4y = 1$ **e)** $7x - 11y = 1$