Anschauliche Geometrie

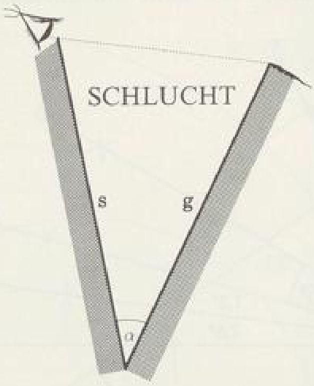
Barth, Friedrich

München, 2001

4.4 Konstruierbare Winkel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

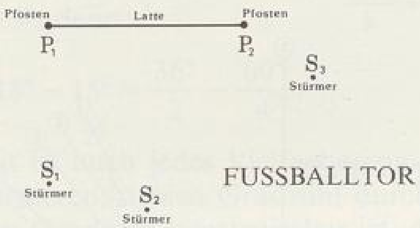
•**19.** SCHLUCHT
Konstruiere die scheinbare Mitte des Gebirgshangs für $s = g = 600$ m und $\alpha = 30°$ bzw. $\alpha = 120°$. Für welches α ist die scheinbare die wirkliche Mitte?



•**20.** FUSSBALLTOR
Vor dem Tor $P_1(1\,|\,7)$, $P_2(8{,}4\,|\,7)$ stehen die drei Stürmer $S_1(1\,|\,1)$, $S_2(4{,}7\,|\,0)$, $S_3(11\,|\,5)$.

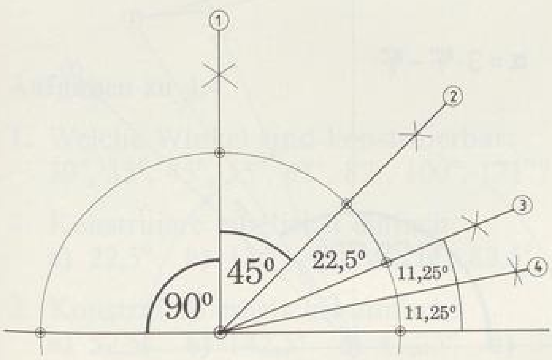
a) Wo vermutet jeder die Mitte des Tors? Gib die Koordinaten der vermuteten Mitte an.

b) Wo auf der Torlinie sollte der Torwart stehen, wenn S_3 einen Freistoß schießt? (Winkel verkürzen)

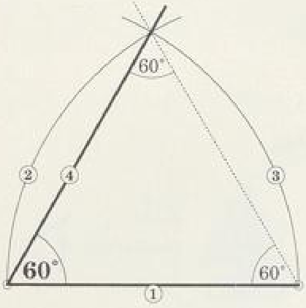


4.4 Konstruierbare Winkel

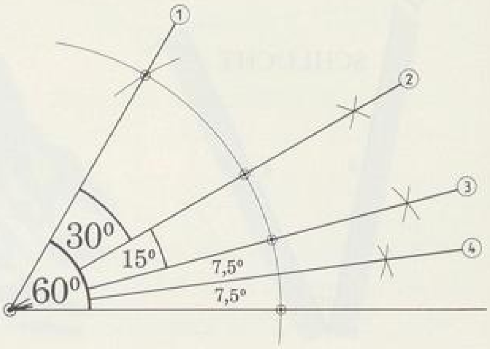
Seit man Geometrie treibt, hat man sich mit der Frage beschäftigt, welche Winkel sich allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.
Beim Loterrichten halbieren wir einen gestreckten Winkel und konstruieren so einen 90°-Winkel. Durch wiederholte Halbierung ergeben sich 45°, 22,5°, 11,25° usw.



Eine zweite Serie startet mit einem 60°-Winkel. Wegen der Winkelsumme im Dreieck hat ein Dreieck mit gleich großen Winkeln lauter 60°-Winkel. Weil ein solches Dreieck auch lauter gleich lange Seiten hat, liefert die Konstruktion (siehe Bild) einen 60°-Winkel. Durch wiederholte Halbierung ergeben sich 30°, 15°, 7,5° usw.



Konstruktion eines 60°-Winkels



Mit der Winkeladdition ist es uns möglich, Winkel aus beiden Serien zu neuen konstruierbaren Winkeln zu kombinieren.

Beispiel:

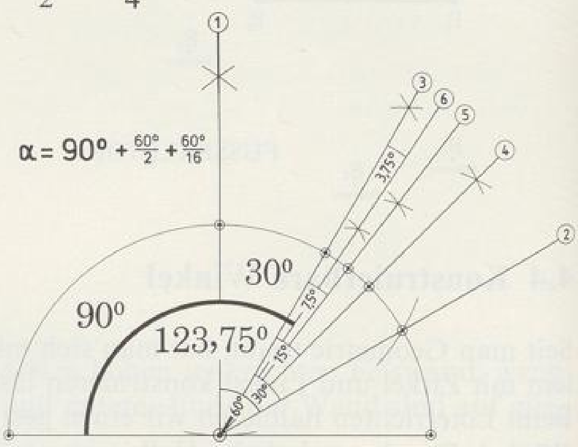
Konstruktion von $\alpha = 123\tfrac{3}{4}^\circ$

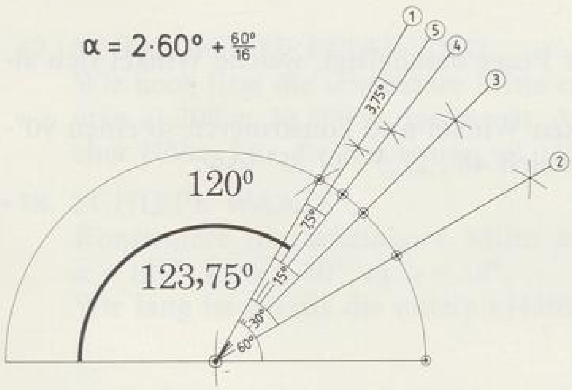
Überlegung: $\alpha = 123\tfrac{3}{4}^\circ = 90^\circ + 30^\circ + 3\tfrac{3}{4}^\circ = 90^\circ + \dfrac{60^\circ}{2} + \dfrac{15^\circ}{4}$

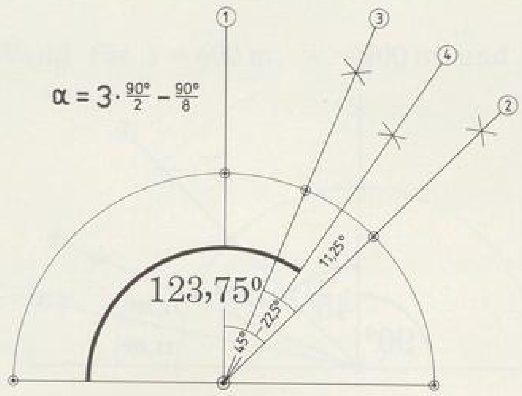
$$= 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} + \frac{60^\circ}{16}$$

oder: $\alpha = 2 \cdot 60^\circ + 3\tfrac{3}{4}^\circ = 2 \cdot 60^\circ + \dfrac{60^\circ}{16}$

oder: $\alpha = 3 \cdot \dfrac{90^\circ}{2} - \dfrac{90^\circ}{8}.$



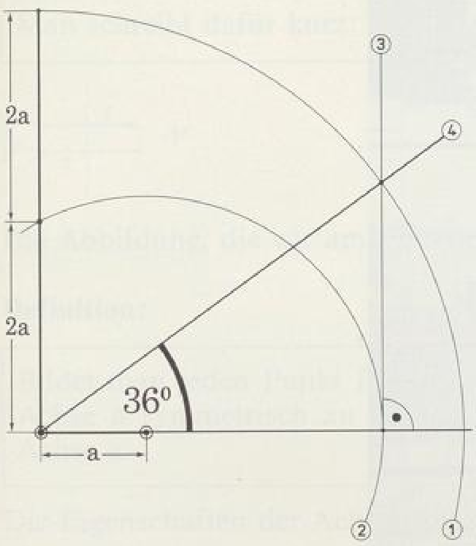




Eine Konstruktion ist um so eleganter, je weniger Hilfslinien sie braucht; deshalb ist die letzte Konstruktion vorzuziehen.

Es gibt eine dritte konstruierbare Serie, sie startet bei 36°. Wie man diesen Winkel konstruiert, erklärt das Bild. Die Begründung können wir erst später geben.

Konstruktion eines 36° -Winkels



Ein Winkel mit ganzzahligem Gradmaß ist nur konstruierbar, wenn er sich aus Winkeln dieser drei Serien zusammensetzen lässt. Der kleinste konstruierbare ganzzahlige Winkel misst 3°, denn:

$$3° = 18° - 15° = \frac{36°}{2} - \frac{60°}{4}.$$

Damit ist auch jedes Vielfache von 3° konstruierbar, das heißt, man kann jeden Winkel konstruieren, dessen Gradzahl durch 3 teilbar ist. Umgekehrt gilt: Wenn ein Winkel mit ganzer Gradzahl konstruierbar ist, dann ist seine Gradzahl durch 3 teilbar.

Aufgaben zu 4.4

1. Welche Winkel sind konstruierbar:
   30°, 35°, 45°, 55°, 63°, 87°, 100°, 171°?
2. Konstruiere möglichst einfach:
   a) 22,5° **b)** 135° **c)** 75° **d)** 82,5° **e)** 72° **f)** 9°.
3. Konstruiere möglichst einfach:
   a) 52,5° **b)** 142,5° **c)** 41,25° **d)** 3° **e)** 40,5° **f)** 151,5° **g)** 111°.