Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

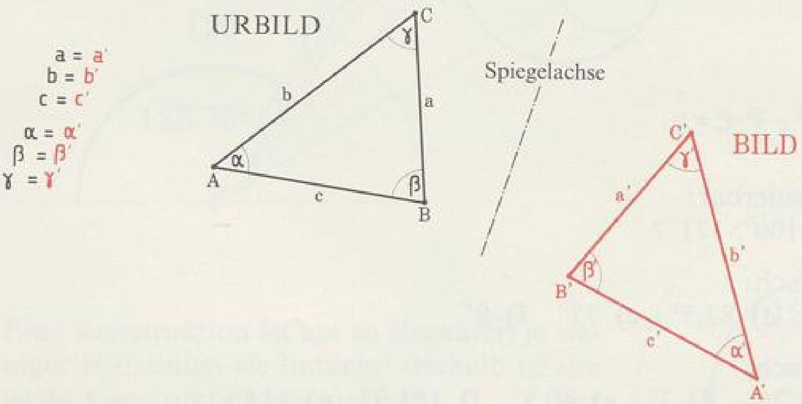
München, 2001

4.5 Achsenspiegelung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

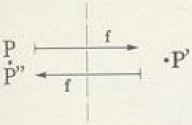
4.5 Achsenspiegelung

Auf dem Foto sehen wir eine Gruppe und ihr Spiegelbild im Wasser. Bild und Spiegelbild treffen sich an einer Trennlinie in der Wasseroberfläche. Jeder Punkt der Gruppe hat einen Spiegelpunkt; Punkt und Spiegelpunkt liegen symmetrisch bezüglich der Trennlinie. Der Teil (Original) über der Wasseroberfläche existiert wirklich, das Spiegelbild dagegen ist nur ein Schein. Die spiegelnde Wasseroberfläche bildet jeden Originalpunkt auf seinen Bildpunkt ab. Der Mathematiker nennt das Original **Urbild**, die Zuordnung eine Abbildung und das Spiegelbild einfach nur **Bild.**



Definition:

Eine **Abbildung** f ist eine Vorschrift, die jedem Punkt P einer Figur **eindeutig** einen Bildpunkt P′ einer Bildfigur zuordnet.
Man schreibt dafür kurz: $P \xrightarrow{f} P'$ oder $f(P) = P'$.



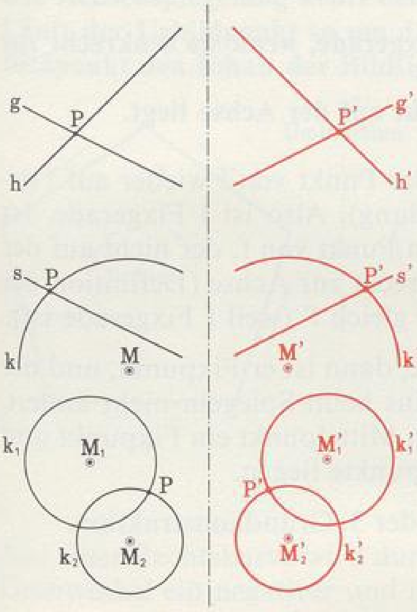
Die Abbildung, die wir am Foto beschrieben haben, ist die Achsenspiegelung.

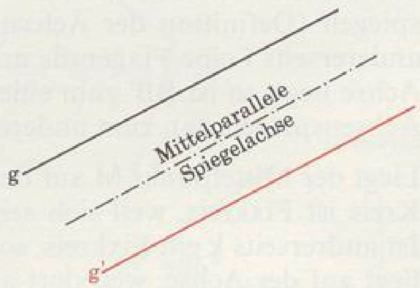
Definition:

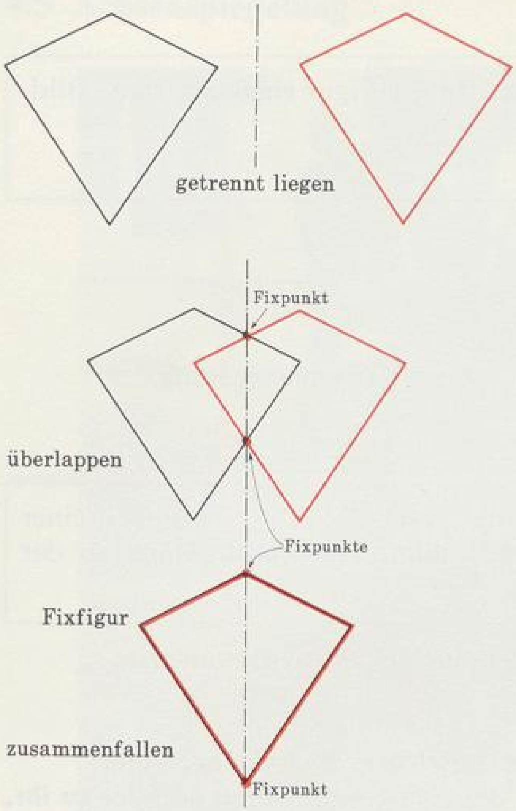
Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P′ ab, der bezüglich einer Achse a symmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung **Achsenspiegelung** an der Achse a.

Die Eigenschaften der Achsenspiegelung ergeben sich aus der Achsensymmetrie:

Satz:
- **Geraden werden auf Geraden, Kreise auf Kreise mit gleichem Radius abgebildet. Gerade und Bildgerade treffen sich entweder auf der Achse oder liegen parallel zu ihr, sodass die Achse Mittelparallele ist.**
- **Strecken werden auf gleich lange Strecken abgebildet.**
- **Winkel werden auf gleich große Winkel abgebildet.**
- **Ist P′ das Bild von P und bildet man P′ mit derselben Achsenspiegelung ab, dann ist das Bild von P′ wieder P: $f(P) = P' \Leftrightarrow f(P') = P'' = P$.**
- **Ist ein Punkt P der Schnittpunkt zweier Geraden bzw. Kreise, so ist sein Bildpunkt P′ der Schnittpunkt der Bildgeraden bzw. Bildkreise.**







Urbild und Bild können auf verschiedenen Seiten der Achse liegen, sie können sich aber auch überlappen oder sogar zusammenfallen. Im letzten Fall spricht man von einer **Fixfigur.** Als Fixpunkte kommen nur Punkte in Frage, die auf der Achse liegen. Urbild und Bild sind immer zueinander symmetrisch, eine Fixfigur ist in sich achsensymmetrisch. Für Fixgeraden und Fixkreise gilt der

Satz:

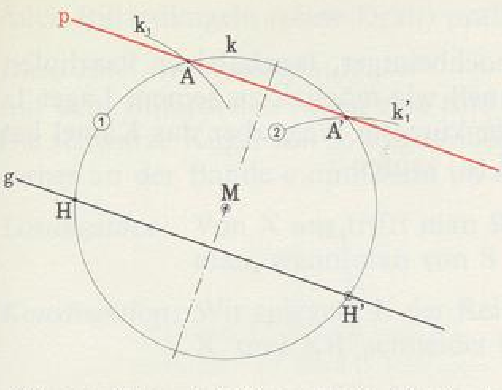
a) Eine Gerade, die nicht die Achse ist, ist genau dann Fixgerade, wenn sie senkrecht zur Achse ist.

b) Ein Kreis ist genau dann Fixkreis, wenn sein Mittelpunkt auf der Achse liegt.

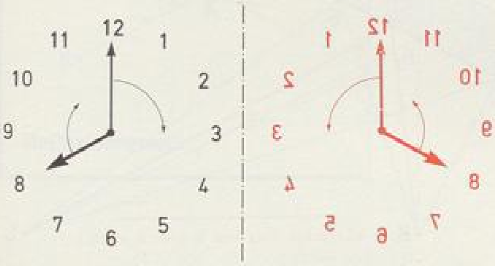
Begründung zu **a):** Ist l ein Lot der Achse, dann wird jeder Punkt von l wieder auf l gespiegelt (Definition der Achsenspiegelung). Also ist l Fixgerade. Ist andererseits f eine Fixgerade und B ein Punkt von f, der nicht auf der Achse liegt, so ist BB′ zum einen senkrecht zur Achse (Definition der Achsenspiegelung), zum anderen aber gleich f′ (weil f Fixgerade ist).

Begründung zu **b):** Liegt der Mittelpunkt M auf der Achse, dann ist er Fixpunkt, und der Kreis ist Fixkreis, weil sich sein Radius beim Spiegeln nicht ändert. Ist andrerseits k ein Fixkreis, so ist sein Mittelpunkt ein Fixpunkt und liegt auf der Achse, weil dort alle Fixpunkte liegen.

Dieser Satz erklärt uns eine verblüffend einfache Lösung der 3. Grundkonstruktion.
Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt A nicht auf g.
Gesucht ist die Parallele p zu g durch A.

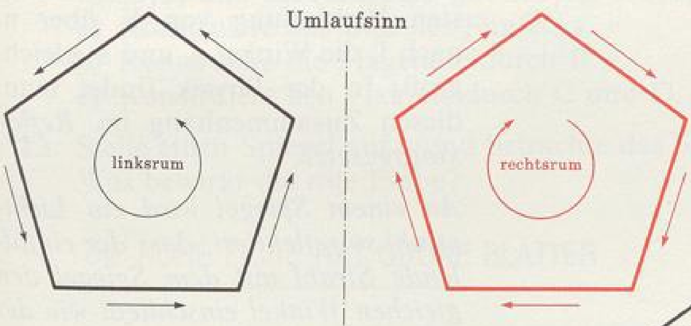


Lösungsidee: k ist irgendein Kreis durch A, der g in H und H′ schneidet. Wir stellen uns eine Achsenspiegelung vor, deren Achse das Lot von M auf g ist. K ist dann Fixkreis, und g ist Fixgerade, also ist H′ der Spiegelpunkt von H.
In A schneiden sich k und der Kreis k_1 um H mit dem Radius $\overline{HA}$, also schneiden sich in A′ der Kreis k und der Spiegelkreis k_1' um H′ mit dem Radius $\overline{HA}$. AA′ und g sind Lote auf der Achse, also sind sie parallel.



Spiegeln wir das Zifferblatt einer Uhr, so sehen wir die gespiegelten Zeiger verkehrt herum laufen. Allgemein gilt der

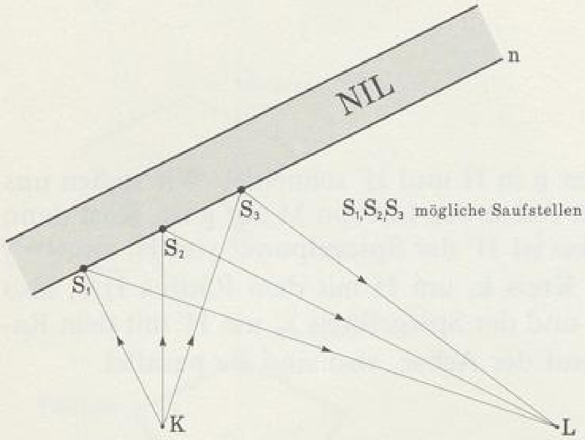
Satz:
Die Achsenspiegelung kehrt den Umlaufsinn um:
Läuft der Urbildpunkt so um die Figur, dass der Inhalt links liegt, so lässt der wandernde Bildpunkt den Inhalt der Bildfigur rechts liegen.

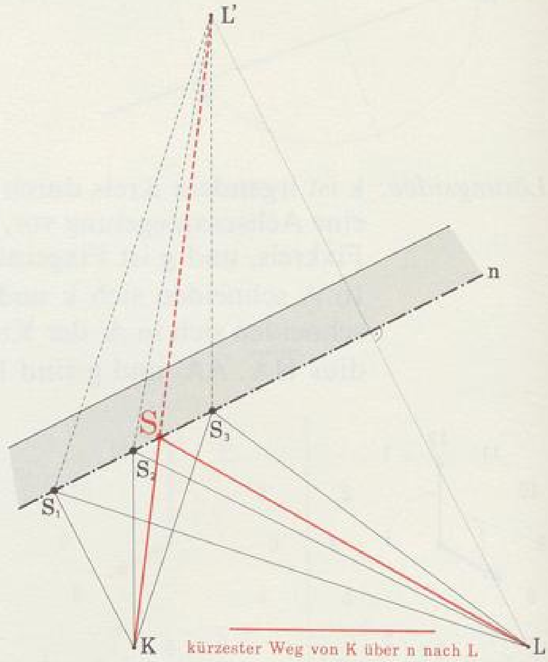


Aus einer Rechtskurve wird durch Achsenspiegelung eine Linkskurve, aus einem positiven Drehwinkel ein negativer und umgekehrt.

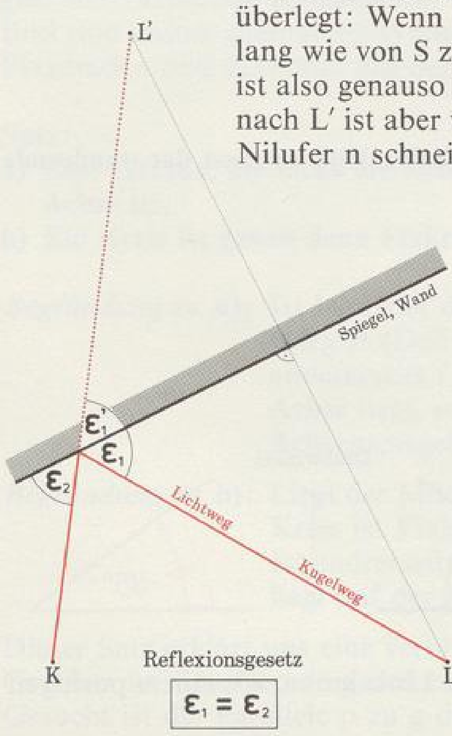
Als Anwendung: Eine Aufgabe für Kamele

In K steht ein wiederkäuender, hochbeiniger, langhalsiger Paarhufer, kurz ein Kamel. Es möchte so schnell wie möglich zu seinem Lager L. Die Strecke [KL] wäre natürlich der kürzeste Weg, aber das Kamel hat Durst und will vorher noch im Nil (n) saufen.





Welchen Weg soll es gehen? Die Spiegelung hilft weiter, und das Kamel überlegt: Wenn ich bei S saufe, dann ist der Weg von S zu L genauso lang wie von S zum Spiegelbild L'. Der Gesamtweg von K über S nach L ist also genauso lang wie von K über S nach L'. Der kürzeste Weg von K nach L' ist aber wieder die Strecke [KL']. Also saufe ich dort, wo KL' das Nilufer n schneidet.



Wegen der Eigenschaften der Achsenspiegelung sind bei der kürzesten Verbindung von K über n nach L die Winkel ε_1 und ε_2 gleich groß. In der Physik findet man diesen Zusammenhang im *Reflexionsgesetz:*

An einem Spiegel wird ein Lichtstrahl so reflektiert, dass der einfallende Strahl mit dem Spiegel den gleichen Winkel einschließt wie der reflektierte Strahl.

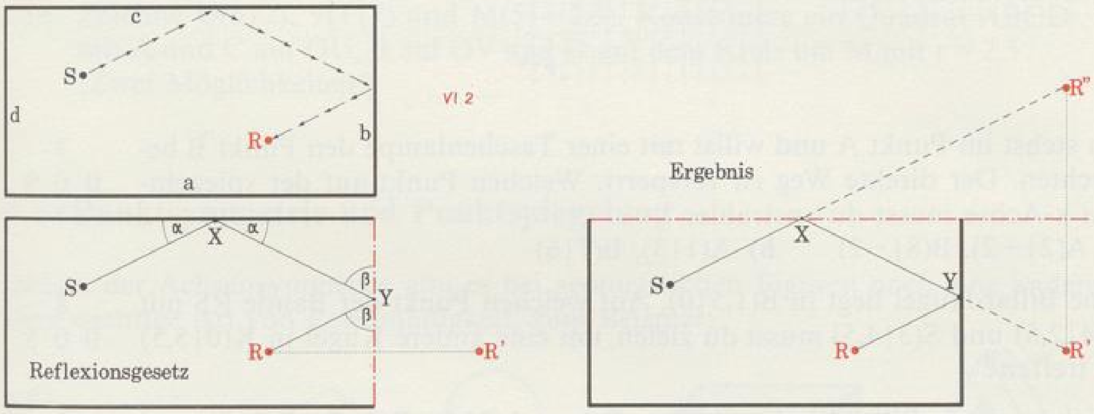
Auch Billardkugeln (ohne Drall) prallen nach diesem Gesetz von der Bande ab.

Dazu eine Anwendungsaufgabe

Auf dem Billardtisch liegen eine rote (R) und eine schwarze Kugel (S).
Die schwarze Kugel soll so angestoßen werden, dass sie die rote Kugel trifft, nachdem sie vorher an der Bande c und dann an der Bande b reflektiert worden ist.

Lösungsidee: Von X aus trifft man R, wenn man aufs Spiegelbild K′ zielt, und X findet man, wenn man von S aus aufs Spiegelbild R″ zielt.

Konstruktion: Wir spiegeln R der Reihe nach an den Banden b und c. SR″ schneidet c in X, und XR′ schneidet b in Y.



Aufgaben zu 4.5

1. Zeichne die Punkte A(4,5|6), B(10,5|0,5), C(10,5|8), D(6|9), S(4|0) und T(9|10). ST ist Spiegelachse. Konstruiere das Spiegelbild
a) der Gerade AB **b)** der Strecke [BC] **c)** der Gerade AD
d) des Kreises um A mit Radius 4 **e)** des Kreises um B mit Radius 1.

2. Gegeben ist das Fünfeck ABCDE mit A(1,5|2), B(6|0,5), C(7,5|2,5), D(5|5), E(2,5|5) und die Achse ST mit S(0|0), T(2|1).
a) Konstruiere das Bild des Fünfecks.
b) Konstruiere die Fixgerade durch E.
c) Konstruiere den Fixkreis durch C und D.

•3. Stelle einen Spiegel auf s und betrachte das Spiegelbild.
Was bewirkt die rote Farbe?

DIE HOHE EICHE HAT GRÜNE BLÄTTER
s

•4. Wie sehen die nächsten drei Figuren aus?  ... ?

5. Zwei Spiegelachsen schneiden sich unter dem Winkel β.
Spiegle eine Gerade, die beide Achsen schneidet, an jeder Achse. Unter welchem Winkel schneiden sich die Spiegelbilder?