Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

4.6 Punktsymmetrie und Punktspiegelung

•**13.** Spiegelt man jede Ecke eines Dreiecks ABC an ihrer Gegenseite, so entsteht das Dreieck A′B′C′. Zeichne jeweils ein Dreieck ABC so, dass:
a) keine Ecke **b)** genau eine Ecke **c)** genau zwei **d)** drei Ecken des Dreiecks ABC außerhalb des Dreiecks A′B′C′ liegen.
(Tipp: Vor **13** kommt **12.**)

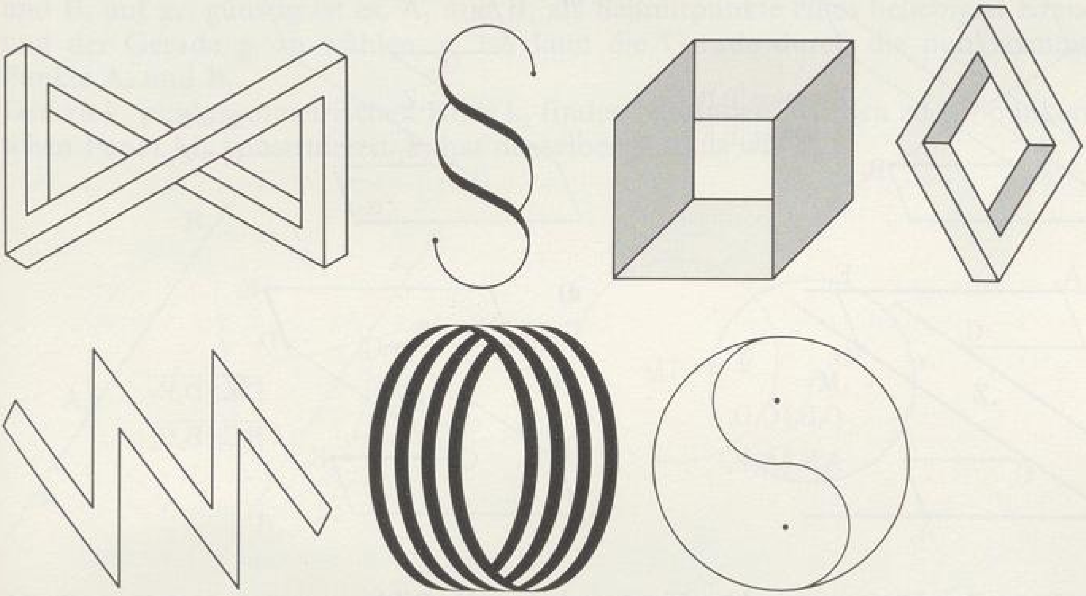
⁚**14.** Gegeben sind drei Geraden r, s und t, von denen keine zwei parallel sind.
Konstruiere ein Quadrat ABCD mit Ecke A auf r, Ecke B auf s, C auf r und D auf t.
(Tipp: Spiegle an r!)

15. Gegeben sind drei Geraden r, s und t, von denen keine zwei parallel sind.
Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit A auf r, B auf s und h_c auf t.

16. Zeichne U(6|2), V(1|7) und M(5|−2,5). Konstruiere ein Quadrat ABCD 8
mit A und C auf OU, B auf OV und D auf dem Kreis um M mit r = 2,5. 3 0 9
(Zwei Möglichkeiten!) 6

4.6 Punktsymmetrie und Punktspiegelung

Neben der Achsensymmetrie gibt es bei geometrischen Figuren noch eine andere, besonders wichtige Art von Regelmäßigkeit, zum Beispiel:

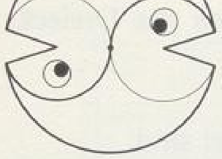


Alle Figuren gehen bei einer Drehung um 180° in sich über. Der zugehörige Drehpunkt heißt **Zentrum Z.**

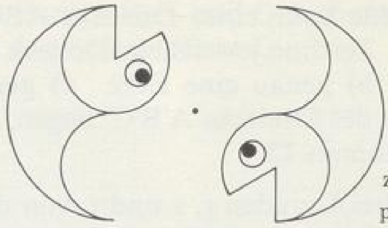
Definition:

Eine Figur heißt **punktsymmetrisch** bezüglich Z, wenn sie bei einer 180°-Drehung um Z in sich übergeht.

Zu einer 180°-Drehung sagt man auch Halbdrehung.



punktsymmetrischer Doppelbold



zueinander punktsymmetrische Geobolde

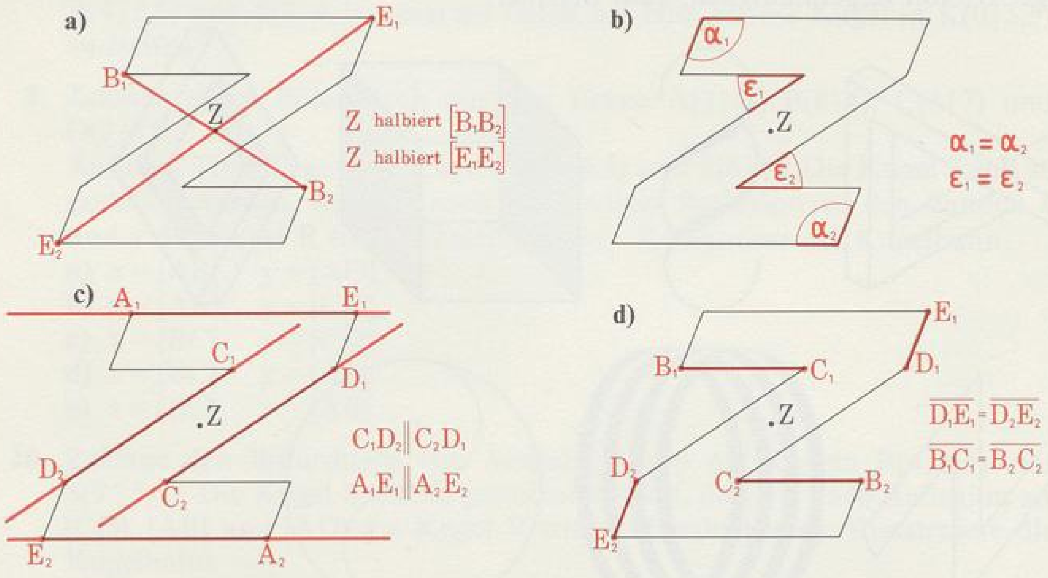
Der Doppelbold ist punktsymmetrisch, die beiden Geobolde dagegen sind zueinander punktsymmetrisch.

An einer einfachen Figur überlegen wir uns die Eigenschaften der Punktsymmetrie. Die wichtigste Eigenschaft ist:

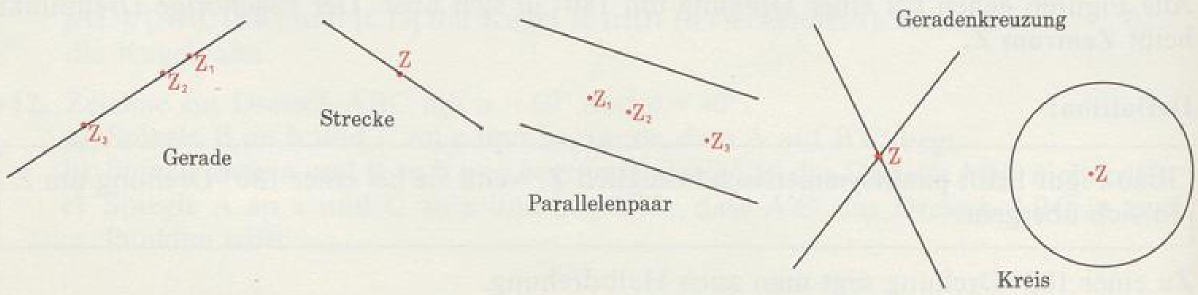
Zwei zueinander punktsymmetrische Punkte bestimmen eine Strecke, die vom Zentrum Z halbiert wird.

Daneben erkennen wir:

- Jede Gerade durch Z ist zu sich selbst punktsymmetrisch.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Geraden sind parallel.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß.
- Zwei zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang.

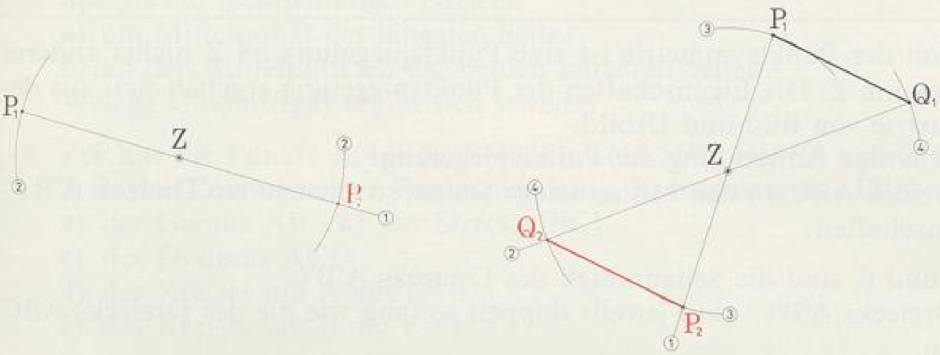


Die einfachsten punktsymmetrischen Figuren zeigen die Bilder.

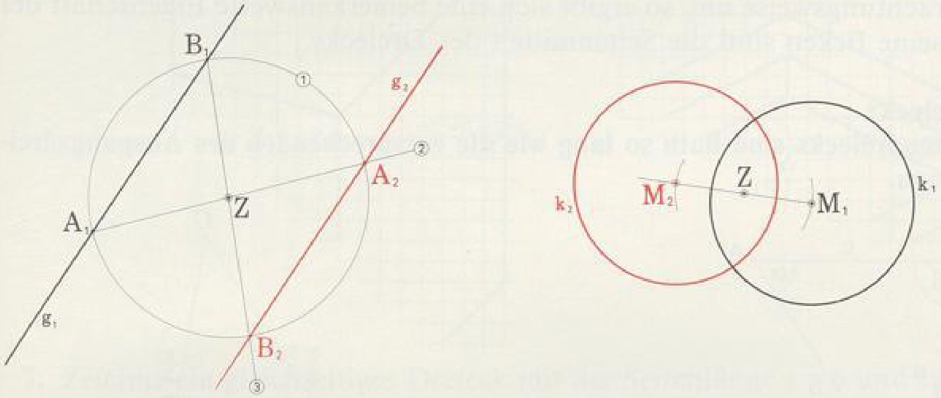


Konstruktion punktsymmetrischer Figuren

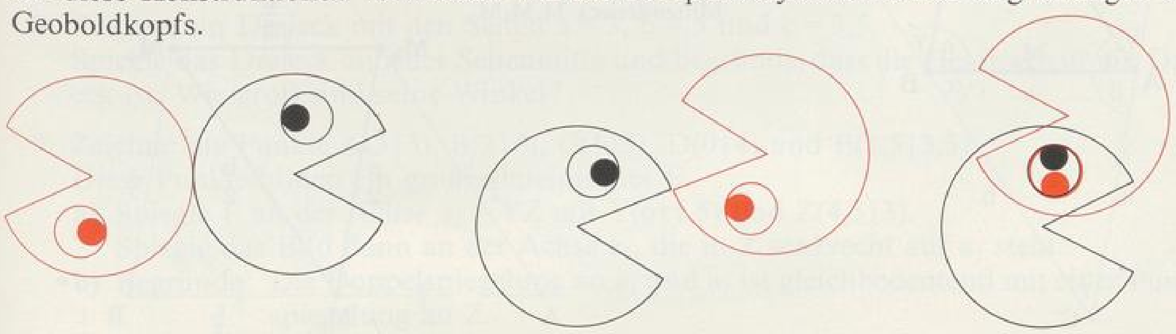
Wie findet man bei gegebenem Zentrum Z die punktsymmetrische Ergänzung einer Figur? Wir nützen die Eigenschaften der Punktsymmetrie aus. Bei einfachen Figuren genügt es, zu einzelnen Punkten die dazu punktsymmetrischen Punkte zu konstruieren.
Der zu P_1 bezüglich Z punktsymmetrische Punkt P_2 ist der Schnittpunkt der Gerade P_1Z und des Kreises um Z mit $r = \overline{P_1Z}$.



Die zu $[P_1Q_1]$ punktsymmetrische Strecke $[P_2Q_2]$ ist die Verbindung der punktsymmetrischen Punkte P_2 und Q_2.
Zum Konstruieren der zu g_1 punktsymmetrischen Gerade g_2 wählt man zwei Punkte A_1 und B_1 auf g_1; günstig ist es, A_1 und B_1 als Schnittpunkte eines beliebigen Kreises um Z und der Gerade g_1 zu wählen. g_2 ist dann die Gerade durch die punktsymmetrischen Punkte A_2 und B_2.
Den zu k_1 punktsymmetrischen Kreis k_2 finden wir, indem wir den zu M_1 punktsymmetrischen Punkt M_2 konstruieren. k_2 hat denselben Radius wie k_1.



All diese Konstruktionen verwenden wir bei den punktsymmetrischen Ergänzungen des Geoboldkopfs.



Wir definieren eine neue Abbildung:

Definition:

> Bildet man jeden Punkt P einer Figur auf einen Bildpunkt P′ ab, der bezüglich eines festen Punkts Z punktsymmetrisch zu P liegt, so heißt diese Abbildung **Punktspiegelung** am Zentrum Z.

Wegen der Definition der Punktsymmetrie ist eine Punktspiegelung an Z nichts anderes als eine Halbdrehung um Z. Die Eigenschaften der Punktspiegelung ergeben sich aus denen der Punktsymmetrie von Bild und Urbild.
Zum Schluss eine wichtige Anwendung der Punktspiegelung:
Spiegelt man ein Dreieck ABC an den Mitten seiner Seiten, so entsteht ein Dreieck A′B′C′ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Ecken A, B und C sind die Seitenmitten des Dreiecks A′B′C′
- Die Seiten des Dreiecks A′B′C′ sind jeweils doppelt so lang wie die des Dreiecks ABC und parallel dazu.
- Die Winkel des Dreiecks A′B′C′ sind so groß wie die des Dreiecks ABC.

Begründung: [CA′] ist das Bild von [BA] bei der Punktspiegelung an M_a.
Deshalb ist CA′ parallel zu AB und $\overline{CA'} = \overline{AB} = c$,
CB′ ist parallel zu AB und $\overline{CB'} = \overline{AB} = c$.
Also ist C die Mitte von [A′B′] und es gilt $\overline{A'B'} = 2c = 2\overline{AB}$.
Aus den Eigenschaften der Punktspiegelung folgt $\sphericalangle C' = \gamma$. Für die andern beiden Seiten gelten entsprechende Überlegungen.

Kehren wir die Betrachtungsweise um, so ergibt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft des »Mittendreiecks«, seine Ecken sind die Seitenmitten des Dreiecks.

Satz vom Mittendreieck:
Die Seiten des Mittendreiecks sind halb so lang wie die entsprechenden des Ausgangsdreiecks und parallel dazu.