Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten

In den Gleichungen der Beispiele 1, 2 und 3 des vorausgehenden Abschnitts kommen die Unbekannten jeweils nur in der ersten Potenz vor. Solche Gleichungen bezeichnet man bekanntlich als linear. Allgemein hat also eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten die Gestalt $ax + by = c$, mit drei Unbekannten die Gestalt $ax + by + cz = d$, usw. Man nennt a, b, c bzw. a, b, c, d die Koeffizienten der Gleichung.
Eine Gleichung stellt die Aufgabe, ihre sämtlichen Lösungen zu bestimmen. Diese bilden die Lösungsmenge L.

Beispiele:

$3x - 5y = 1 \qquad L = \{(x|y) | 3x - 5y = 1\}$

$5x - 7y + 3z - 6 = 0 \qquad L = \{(x|y|z) | 5x - 7y + 3z - 6 = 0\}$

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung überblickt man am besten, wenn man die Gleichung nach einer der Unbekannten auflöst. Dazu benötigt man nur die Addition eines Terms und die Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl. Bei diesen Schritten handelt es sich, wie wir schon wissen, um Äquivalenzumformungen, bei denen sich also die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 7 && \| -5x + 3y \\ 2z &= -5x + 3y + 7 && \| \cdot \tfrac{1}{2} \\ z &= -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dass man für x und y beliebige Zahlen wählen darf; der dazugehörige Wert für z ist dann durch die Gleichung eindeutig bestimmt. So ergibt sich etwa
für $x = 2$ und $y = 4$ der Wert $z = \frac{9}{2}$, also die Lösung $(2|4|\frac{9}{2})$,
für $x = -1$ und $y = 10$ der Wert $z = 21$, also die Lösung $(-1|10|21)$,
für $x = 0$ und $y = \frac{1}{6}$ der Wert $z = \frac{15}{4}$, also die Lösung $(0|\frac{1}{6}|\frac{15}{4})$, usw.
Man kann die Lösungsmenge dieser Gleichung also auch so schreiben:

$$L = \{(x|y|z) | x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z = -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2}\}$$

In ganz entsprechender Weise lässt sich die Lösungsmenge jeder linearen Gleichung schreiben.
Bei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man die Lösungsmenge in einfacher Weise geometrisch veranschaulichen. Man deutet jede Lösung $(x|y)$ als Punkt $(x|y)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die so erhaltene Punktmenge ist der Graph der durch die Gleichung $ax + by = c$ beschriebenen Relation. Falls der Koeffizient b von null verschieden ist, kann man die Gleichung nach y auflösen und die Lösungsmenge in der Form

$L = \left\{(x|y) \middle| x \in \mathbb{Q} \wedge y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\}$ darstellen. Daraus erkennt man, dass L aus allen Wertepaaren der linearen Funktion f: $x \mapsto -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ besteht, die sich als Punkte einer Geraden graphisch darstellen lassen.

Im Falle $b = 0 \wedge a \neq 0$ kann man die Gleichung nach x auflösen und erhält $x = \frac{0}{a}y + \frac{c}{a}$, also $x = \frac{c}{a}$. Die ausführlichere Schreibweise zeigt, dass man für y jede beliebige Zahl wählen kann; der davon unabhängige x-Wert liegt eindeutig fest. Es gilt also $L = \left\{(x|y) \middle| x = \frac{c}{a} \wedge y \in \mathbb{Q}\right\}$. Man erkennt leicht, dass die entsprechenden Punkte auf einer Parallelen zur y-Achse, also wieder auf einer Geraden liegen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den praktisch unbedeutenden Fall $a = b = 0$, also die Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ betrachten. Die linke Seite ist für beliebige Werte von x und y stets null. Falls $c \neq 0$ gilt, liegt also immer eine falsche Aussage vor. Ist jedoch $c = 0$, so ist jedes Paar $(x|y)$ eine Lösung. Der Lösungsbaum von Abbildung 126.1 veranschaulicht diese Fallunterscheidung.

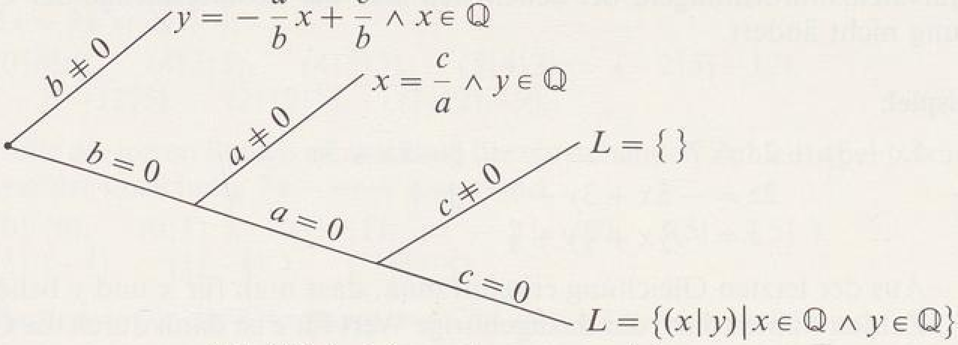

Abb. 126.1 Lösungsbaum zu $ax + by = c$

Wir halten fest:

> **Satz 126.1:** Eine lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $(a|b) \neq (0|0)$ beschreibt eine Relation, deren Graph aus Punkten einer Geraden besteht.

Dieser Satz bedeutet, dass zu jeder Gleichung $ax + by = c$, bei der mindestens einer der Koeffizienten bei x und y von 0 verschieden ist, im Koordinatensystem eine Gerade g gehört. Man sagt auch, die Gerade g habe die Gleichung $ax + by = c$. Abbildung 127.1 zeigt die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$, also die Gerade mit dieser Gleichung. Um sie zu zeichnen, genügt es, zwei Lösungen zu berechnen und die entsprechenden Punkte in das Koordinatensystem einzutragen. Zweckmäßigerweise bestimmt man zur Kontrolle noch einen dritten Punkt.

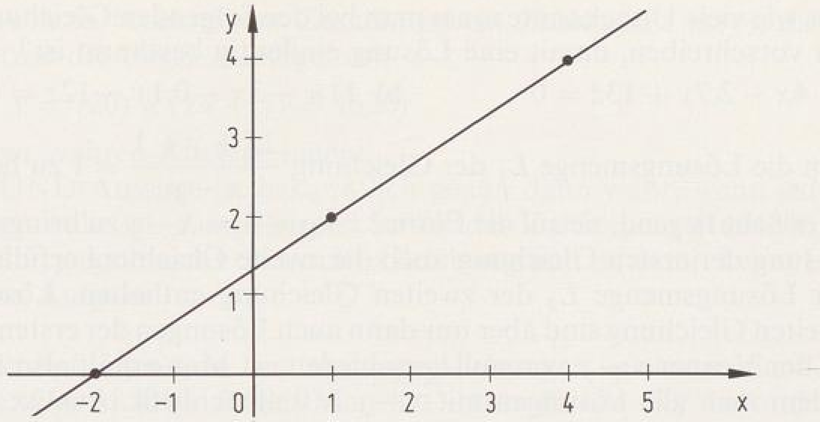

Abb. 127.1 Veranschaulichung der Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Lösungsmengen folgender Gleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:
   a) $x + 2y - 3 = 0$ **b)** $5x - 3y = 0$ **c)** $x - 5y - 5 = 0$
   d) $10x + 3y = 20$ **e)** $1{,}2x + 0{,}5y = 0{,}7$ **f)** $3x + 1\frac{5}{7} \cdot y = -6$

2. Unter den Lösungen einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kommen im Allgemeinen solche von der Form $(s|0)$ bzw. $(0|t)$ vor. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die zugehörigen Punkte?

3. Was kann man über die Koeffizienten der Gleichung $ax + by + c = 0$ aussagen, wenn ihre Lösungsmenge das Paar $(0|0)$ enthält?

4. Veranschauliche die Lösungsmenge der Gleichung $x + y = 1$. Gibt es Lösungen dieser Gleichung mit der Eigenschaft
   a) $x > 0 \wedge y > 0$ **b)** $x < 0 \wedge y < 0$
   c) $x \geqq 1 \wedge y \geqq 1$ **d)** $|x| > 1 \wedge |y| > 1$?

5. Es besteht ein begrifflicher Unterschied zwischen der Gleichung $x = 1$ (Gleichung mit *einer* Unbekannten) und der Gleichung $x + 0 \cdot y = 1$ (Gleichung mit *zwei* Unbekannten). Wie zeigt sich dieser Unterschied in den Lösungsmengen? Veranschauliche die Lösungsmengen der Gleichungen $x + 0 \cdot y = 1$ und $0 \cdot x + y = 2$.

6. Zeige, dass die folgende Gleichung zu einer linearen Gleichung äquivalent ist, und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
   a) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = (5-y)^2$
   b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x^2+2) + (y^2+3)$

7. Beschreibe die Lösungsmengen möglichst übersichtlich:
   a) $x + y + z = 0$ **b)** $x + 3y - 7z = 8$ **c)** $2x + y = 3y + 4z$
   d) $2(x-3) + 4(x+y) = 7(2x-y)$ **e)** $(x-5)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2$

8. Für wie viele Unbekannte muss man bei den folgenden Gleichungen Zahlen vorschreiben, damit eine Lösung eindeutig bestimmt ist?

a) $4x - 2{,}7y + 13z = 0$ **b)** $11w - 3x - 0{,}1y - 12z = 17$

•9. Um die Lösungsmenge L_1 der Gleichung $\frac{2x + y + 1}{x - y} = 1$ zu bestimmen, ist es nahe liegend, sie auf die Form $2x + y + 1 = x - y$ zu bringen. Da jede Lösung der ersten Gleichung auch die zweite Gleichung erfüllt, ist L_1 in der Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung enthalten. Lösungen der zweiten Gleichung sind aber nur dann auch Lösungen der ersten, wenn für sie der Nenner $x - y$ von null verschieden ist. Man erhält also L_1 aus L_2, indem man alle Lösungen mit $x - y = 0$ ausschließt. Aus $2x + y + 1 = = x - y \Leftrightarrow x = -2y - 1$ folgt $L_2 = \{(x|y) | y \in \mathbb{Q} \wedge x = -2y - 1\}$. Die einzige Lösung aus L_2 mit $x - y = 0$ oder $x = y$ ist $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Es ergibt sich daher

$L_1 = \{(x|y) | y \neq -\frac{1}{3} \wedge x = -2y - 1\}$.

Bestimme in derselben Weise die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\frac{x + y}{x - 1} = 5$ **b)** $\frac{8x - y}{2y + 3} = 0$

c) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y + 2} = 0$ **d)** $\frac{x^2 + 2x - y}{x^2 + 1} = 1$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten sind meistens auch mehrere Bedingungen zu beachten, welche die gesuchten Zahlen erfüllen müssen.

Beispiel:

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3 kg Äpfel und 1 kg Birnen kauft und dafür 7,20 € bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 2 kg Äpfel und 5 kg Birnen derselben Sorten 15,20 €. Auf dem Heimweg versucht Hans den Preis für 1 kg jeder Sorte herauszufinden. Um diese nicht ganz leichte Aufgabe mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir den Preis für 1 kg Äpfel mit x Cent, den Preis für 1 kg Birnen mit y Cent. Aus den von Hans beobachteten Einkäufen zweier Kunden ergeben sich zwei Bedingungen für x und y.

1. Kunde: $3x + y = 720$
2. Kunde: $2x + 5y = 1520$

Wir erhalten also zwei Gleichungen für x und y. Die gesuchten Zahlen müssen *beide* Gleichungen *zugleich* erfüllen. Man kann diesen Sachver-