Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

5.1 Transversalen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

5.1 Transversalen

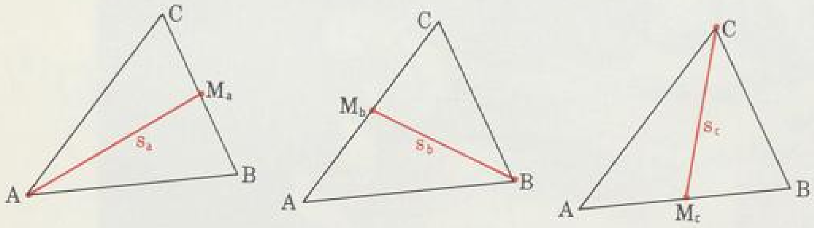
Übersicht

Eine Gerade heißt Transversale bezüglich eines Vielecks, wenn sie keine Seite des Vielecks enthält. Besondere Transversalen des Dreiecks ergeben sich, wenn man die Grundkonstruktionen anwendet:

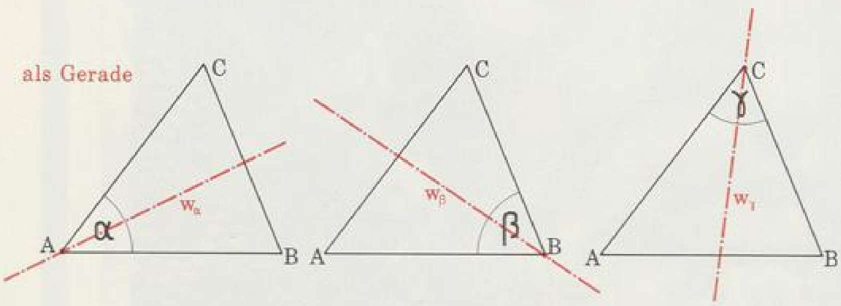
- Streckenhalbieren
- Winkelhalbieren
- Lotfällen
- Loterrichten

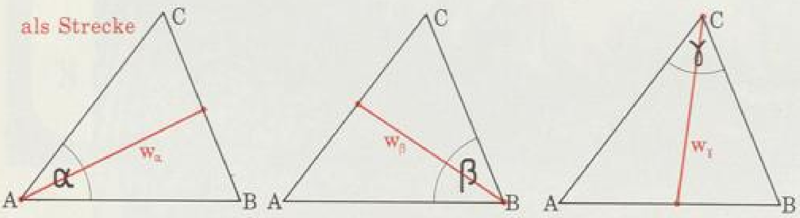
Für diese Transversalen haben sich eigene Bezeichnungen eingebürgert.

Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierende s_a ist die Strecke zwischen der Ecke A und der Mitte M_a der Seite a.

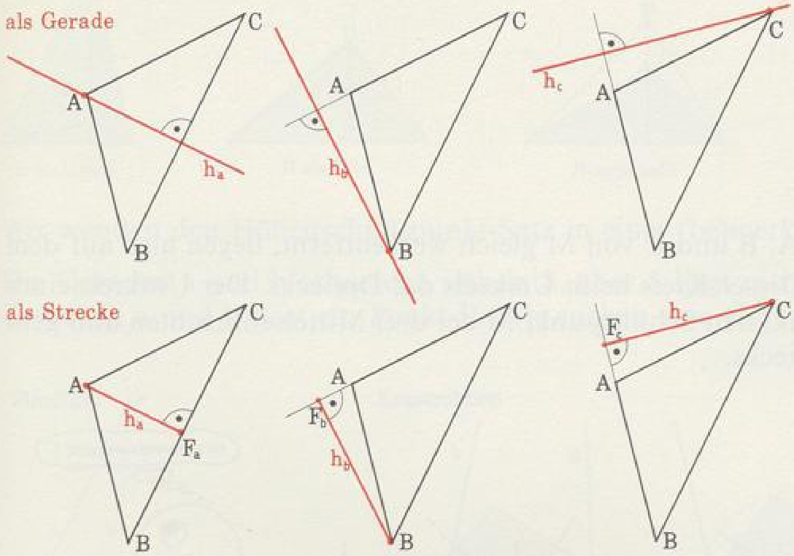


Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende w_α ist die Gerade, die den Winkel α halbiert. Mit w_α bezeichnet man aber auch die Strecke, die das Dreieck aus der Gerade ausschneidet, und manchmal meint man damit sogar die Länge dieser Strecke. Was jeweils gemeint ist, geht aus dem Zusammenhang hervor.

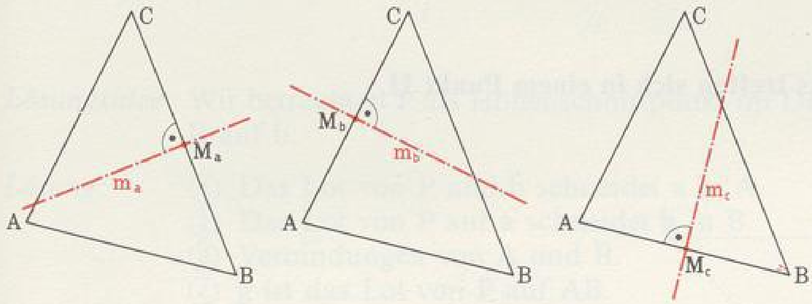




Höhe: Die Höhe h_a ist das Lot, das von A auf die Seite a (oder ihre Verlängerung) gefällt wird. Genau wie bei der Winkelhalbierenden bezeichnet man mit h_a auch die Länge der Strecke zwischen Ecke und Lotfußpunkt. Was jeweils gemeint ist, geht wieder aus dem Zusammenhang hervor.



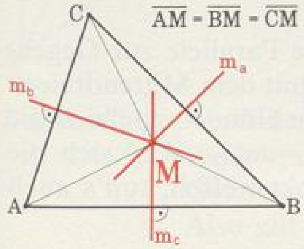
Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte m_a ist das Lot zu a durch die Seitenmitte M_a.



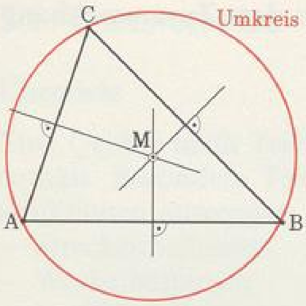
Besondere Eigenschaften

Beim Zeichnen von Mittelsenkrechten, Höhen, Winkel- und Seitenhalbierenden hat man den Eindruck, als ob sich gleichartige Linien jeweils in einem Punkt träfen. Das stimmt tatsächlich. Und diese Schnittpunkte haben auch alle eine besondere Bedeutung im Dreieck.

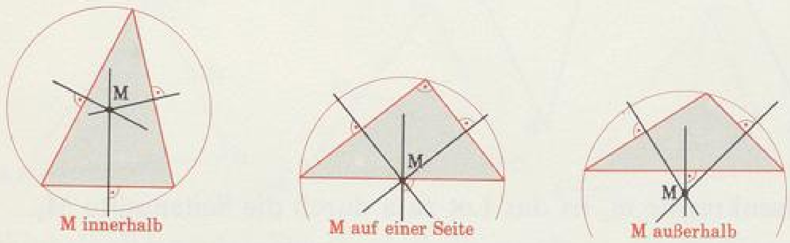
Umkreissatz:
Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt M.



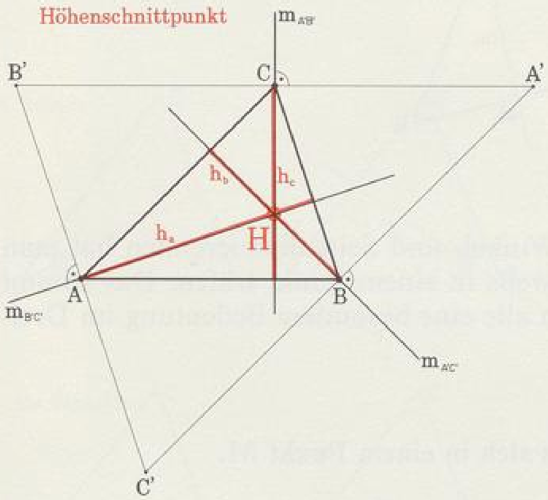
Begründung: M sei der Schnittpunkt von m_a und m_c.
Weil m_c die Symmetrieachse von A und B ist, gilt: $\overline{MA} = \overline{MB}$.
Genauso ist $\overline{MB} = \overline{MC}$, da M auf m_a liegt.
Also gilt auch $\overline{MA} = \overline{MC}$, das heißt M liegt auch auf m_b.



Wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ sind A, B und C von M gleich weit entfernt, liegen also auf dem Kreis um M mit Radius $\overline{MA}$. Dieser Kreis heißt **Umkreis** des Dreiecks. Der Umkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt M der drei Mittelsenkrechten und geht durch alle drei Ecken des Dreiecks.

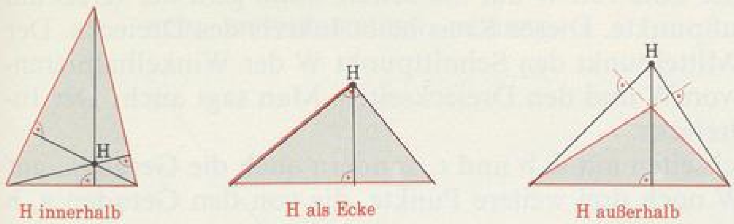


Höhenschnittpunkt-Satz:
Die drei Höhen eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt H.



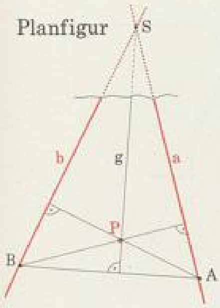
Begründung: Durch jede Ecke des Dreiecks ABC zeichnet man die Parallele zur Gegenseite. Diese Parallelen bestimmen das Dreieck A′B′C′ mit dem Mittendreieck ABC. Weil h_c die Seite [A′B′] senkrecht halbiert, ist die Höhe h_c zugleich die Mittelsenkrechte $m_{A'B'}$. Ebenso gilt $h_a = m_{B'C'}$ und $m_b = m_{A'C'}$. Weil sich die Mittelsenkrechten des Dreiecks A′B′C′ in einem Punkt treffen, tun's auch die Höhen im Dreieck ABC.

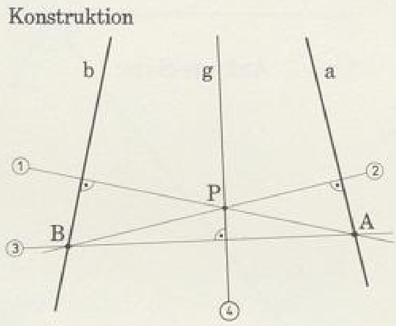
Auch der Höhenschnittpunkt muss nicht im Inneren des Dreiecks liegen.



Wir wenden den Höhenschnittpunkt-Satz in einer (be)merkenswerten Konstruktion an:

Die Geraden a und b schneiden sich in S, aber S liegt nicht mehr auf dem Zeichenblatt. Zwischen a und b liegt ein Punkt P. Wir suchen eine Gerade g, die durch P und S geht.

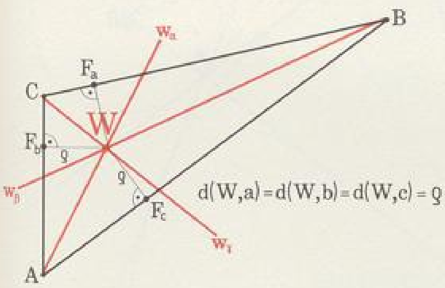


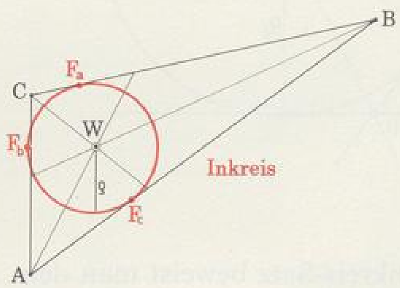


Lösungsidee: Wir betrachten P als Höhenschnittpunkt im Dreieck ABS, A liegt auf a und B auf b.

Lösung:
① Das Lot von P und b schneidet a in A.
② Das Lot von P auf a schneidet b in B.
③ Verbindungen von A und B.
④ g ist das Lot von P auf AB.

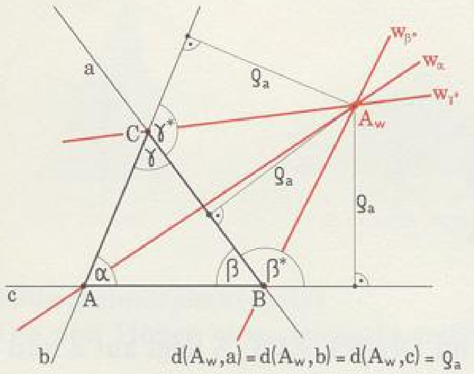
Inkreissatz:
Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt W.





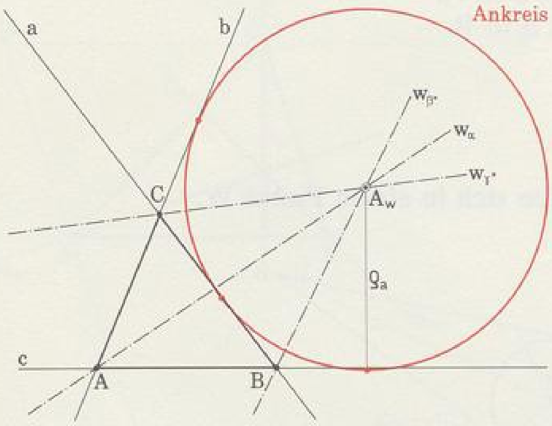
Begründung: W sei der Schnittpunkt von w_γ und w_α.
Weil w_γ die Symmetrieachse von a und b ist, gilt: d(W, a) = d(W, b).
Genauso ist d(W, b) = d(W, c), da W auf w_α liegt.
Also gilt auch d(W, a) = d(W, c), das heißt W liegt auch auf w_β.

Wegen d(W, a) = d(W, b) = d(W, c) hat W von allen Dreieckseiten denselben Abstand ϱ. Sind F_a, F_b und F_c die Fußpunkte der Lote von W auf die Seiten, dann geht der Kreis um W mit Radius ϱ durch diese drei Fußpunkte. Dieser Kreis heißt **Inkreis** des Dreiecks. Der Inkreis eines Dreiecks hat also als Mittelpunkt den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, sein Radius ϱ ist der Abstand von W und den Dreieckseiten. Man sagt auch: Der Inkreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks.
Bezeichnen wir nicht nur die Dreieckseiten mit a, b und c, sondern auch die Geraden, auf denen sie liegen, so gibt es außer W noch drei weitere Punkte, die von den Geraden a, b und c denselben Abstand haben.
Betrachten wir zum Beispiel A_w: Er ist der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden w_{γ^*} und w_{β^*} und der Innenwinkelhalbierenden w_α. Weil A_w von a, b und c denselben Abstand hat, liegen die Fußpunkte der Lote von A_w auf die Geraden auf einem Kreis um A_w mit dem Radius ϱ_a. Dieser Kreis heißt **Ankreis** des Dreiecks ABC. Die Bilder zeigen jeweils ein Dreieck mit seinen drei Ankreisen und seinem Inkreis.



$d(A_w, a) = d(A_w, b) = d(A_w, c) = \varrho_a$

Ankreis-Satz:

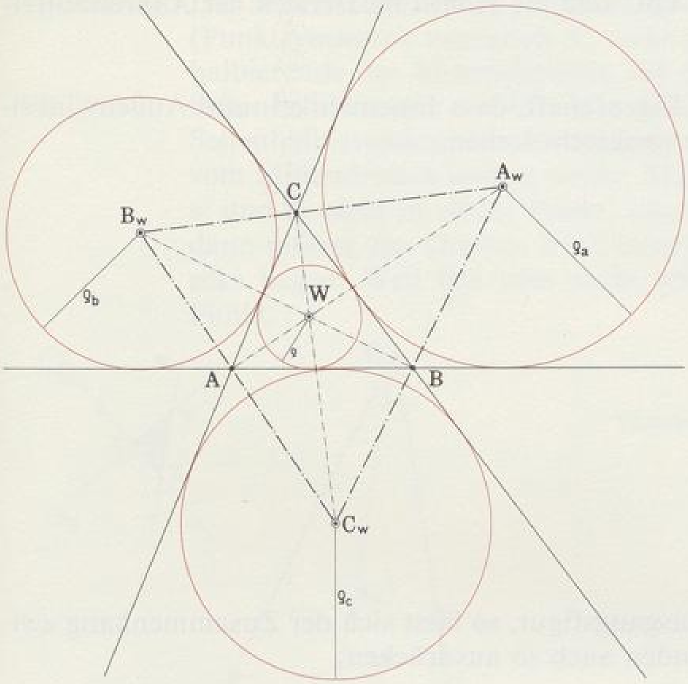


Ähnlich wie den Inkreis-Satz beweist man den

Ankreis-Satz:
Je zwei Außenwinkelhalbierende treffen sich mit der Innenwinkelhalbierenden des dritten Winkels in einem Punkt.
Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines Ankreises des Dreiecks.

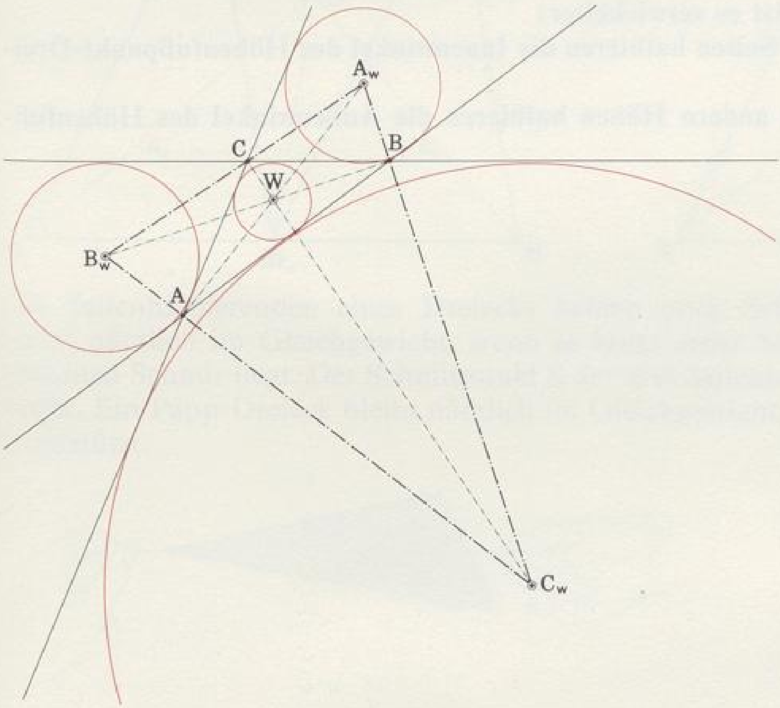
INKREIS UND ANKREISE

BEIM SPITZWINKLIGEN DREIECK



INKREIS UND ANKREISE

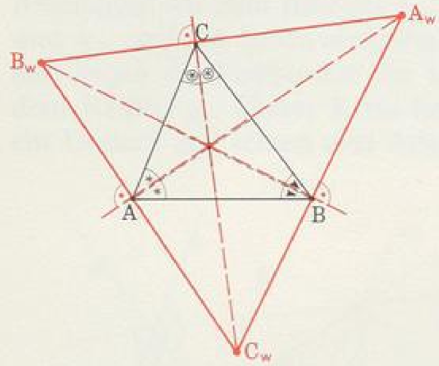
BEIM STUMPFWINKLIGEN DREIECK



Bei genauer Betrachtung der Ankreis-Figur entdecken wir noch den

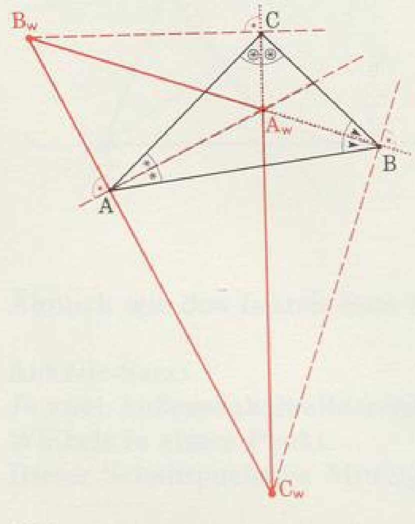
Satz:
Die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind die Höhen im Dreieck der Ankreismittelpunkte A_w, B_w und C_w.

Der Beweis beruht auf der bekannten Eigenschaft, dass Innenwinkel- und Außenwinkelhalbierende an einer Ecke aufeinander senkrecht stehen.



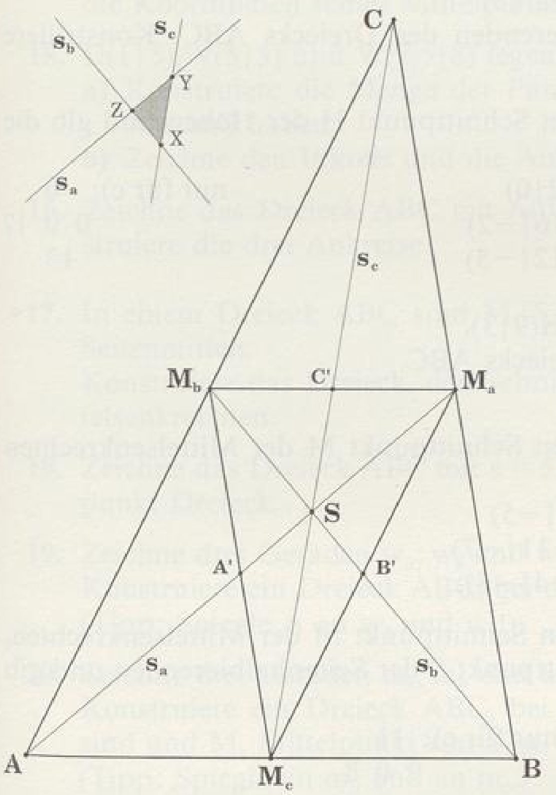
Nehmen wir das äußere Dreieck als Ausgangsfigur, so lässt sich der Zusammenhang zwischen den Höhen und Winkelhalbierenden auch so ausdrücken:

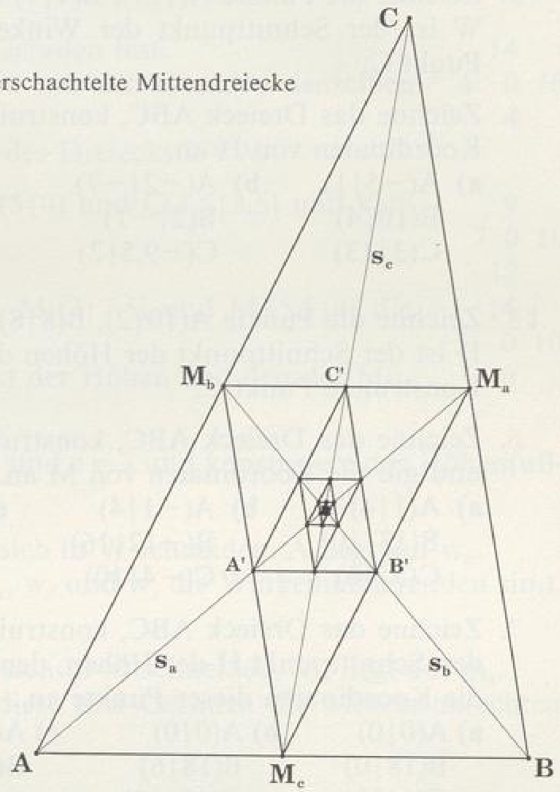
Satz:
Im spitzwinkligen Dreieck gilt:
Die Höhen halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Die Seiten halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Beim stumpfwinkligen Dreieck ist es verwickelter:
Eine Höhe und zwei verlängerte Seiten halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.
Die dritte Seite und die beiden andern Höhen halbieren die Außenwinkel des Höhenfußpunkt-Dreiecks.



Schwerpunkt-Satz:
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks treffen sich in einem Punkt S.

Begründung: Die Seitenhalbierende s_a halbiert die Seite $[M_bM_c]$ des Mittendreiecks in A′ (Punktsymmetrie bezüglich A′, siehe Seite 102). Also liegt auf ihr die Seitenhalbierende des Mittendreiecks, die durch M_a geht. Zeichnet man die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, so hat man damit zugleich auch die Seitenhalbierenden des Mittendreiecks. Dasselbe gilt fürs Mittendreieck vom Mittendreieck und so weiter. Träfen sich die drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c nicht in einem Punkt, sondern in den drei Punkten X, Y und Z, dann müsste das Dreieck XYZ innerhalb jedes noch so kleinen Mittendreiecks liegen. Weil das aber nicht sein kann, schneiden sie sich in einem Punkt.





Verschachtelte Mittendreiecke

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißen auch **Schwerlinien.** Ein Pappe-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn es längs einer Seitenhalbierenden auf einer gespannten Schnur liegt. Der Schnittpunkt S der drei Seitenhalbierenden heißt auch **Schwerpunkt.** Ein Papp-Dreieck bleibt nämlich im Gleichgewicht, wenn man es im Schwerpunkt unterstützt.