Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

Aufgaben

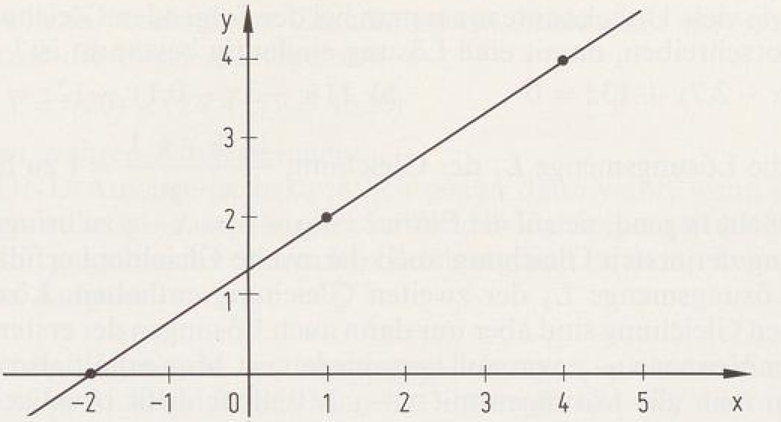

Abb. 127.1 Veranschaulichung der Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Lösungsmengen folgender Gleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:

a) $x + 2y - 3 = 0$ **b)** $5x - 3y = 0$ **c)** $x - 5y - 5 = 0$
d) $10x + 3y = 20$ **e)** $1{,}2x + 0{,}5y = 0{,}7$ **f)** $3x + 1\frac{5}{7} \cdot y = -6$

2. Unter den Lösungen einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kommen im Allgemeinen solche von der Form $(s|0)$ bzw. $(0|t)$ vor. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die zugehörigen Punkte?

3. Was kann man über die Koeffizienten der Gleichung $ax + by + c = 0$ aussagen, wenn ihre Lösungsmenge das Paar $(0|0)$ enthält?

4. Veranschauliche die Lösungsmenge der Gleichung $x + y = 1$. Gibt es Lösungen dieser Gleichung mit der Eigenschaft

a) $x > 0 \wedge y > 0$ **b)** $x < 0 \wedge y < 0$
c) $x \geqq 1 \wedge y \geqq 1$ **d)** $|x| > 1 \wedge |y| > 1$?

5. Es besteht ein begrifflicher Unterschied zwischen der Gleichung $x = 1$ (Gleichung mit *einer* Unbekannten) und der Gleichung $x + 0 \cdot y = 1$ (Gleichung mit *zwei* Unbekannten). Wie zeigt sich dieser Unterschied in den Lösungsmengen? Veranschauliche die Lösungsmengen der Gleichungen $x + 0 \cdot y = 1$ und $0 \cdot x + y = 2$.

6. Zeige, dass die folgende Gleichung zu einer linearen Gleichung äquivalent ist, und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.

a) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = (5-y)^2$
b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x^2+2) + (y^2+3)$

7. Beschreibe die Lösungsmengen möglichst übersichtlich:

a) $x + y + z = 0$ **b)** $x + 3y - 7z = 8$ **c)** $2x + y = 3y + 4z$
d) $2(x-3) + 4(x+y) = 7(2x-y)$ **e)** $(x-5)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2$

8. Für wie viele Unbekannte muss man bei den folgenden Gleichungen Zahlen vorschreiben, damit eine Lösung eindeutig bestimmt ist?

a) $4x - 2{,}7y + 13z = 0$ **b)** $11w - 3x - 0{,}1y - 12z = 17$

•9. Um die Lösungsmenge L_1 der Gleichung $\dfrac{2x+y+1}{x-y} = 1$ zu bestimmen, ist es nahe liegend, sie auf die Form $2x + y + 1 = x - y$ zu bringen. Da jede Lösung der ersten Gleichung auch die zweite Gleichung erfüllt, ist L_1 in der Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung enthalten. Lösungen der zweiten Gleichung sind aber nur dann auch Lösungen der ersten, wenn für sie der Nenner $x - y$ von null verschieden ist. Man erhält also L_1 aus L_2, indem man alle Lösungen mit $x - y = 0$ ausschließt. Aus $2x + y + 1 = = x - y \Leftrightarrow x = -2y - 1$ folgt $L_2 = \{(x|y) | y \in \mathbb{Q} \wedge x = -2y - 1\}$. Die einzige Lösung aus L_2 mit $x - y = 0$ oder $x = y$ ist $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Es ergibt sich daher

$L_1 = \{(x|y) | y \neq -\frac{1}{3} \wedge x = -2y - 1\}$.

Bestimme in derselben Weise die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\dfrac{x+y}{x-1} = 5$ **b)** $\dfrac{8x-y}{2y+3} = 0$

c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 0$ **d)** $\dfrac{x^2+2x-y}{x^2+1} = 1$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten sind meistens auch mehrere Bedingungen zu beachten, welche die gesuchten Zahlen erfüllen müssen.

Beispiel:

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3 kg Äpfel und 1 kg Birnen kauft und dafür 7,20 € bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 2 kg Äpfel und 5 kg Birnen derselben Sorten 15,20 €. Auf dem Heimweg versucht Hans den Preis für 1 kg jeder Sorte herauszufinden. Um diese nicht ganz leichte Aufgabe mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir den Preis für 1 kg Äpfel mit x Cent, den Preis für 1 kg Birnen mit y Cent. Aus den von Hans beobachteten Einkäufen zweier Kunden ergeben sich zwei Bedingungen für x und y.

1. Kunde: $3x + y = 720$
2. Kunde: $2x + 5y = 1520$

Wir erhalten also zwei Gleichungen für x und y. Die gesuchten Zahlen müssen *beide* Gleichungen *zugleich* erfüllen. Man kann diesen Sachver-