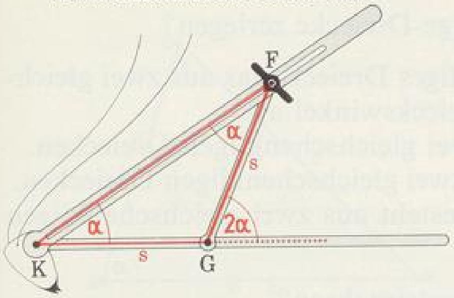
Anschauliche Geometrie

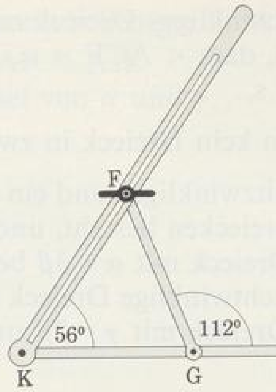
Barth, Friedrich

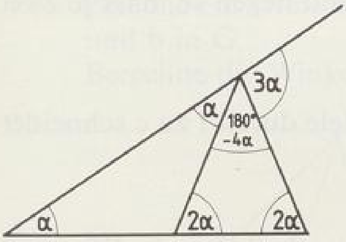
München, 2001

Aufgaben

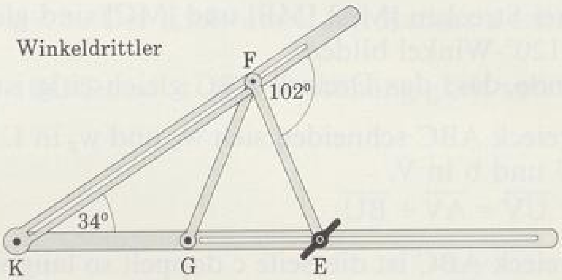
Winkelhalbierender Heuschreck







Winkeldrittler



Ein zusätzlicher Arm von derselben Länge erweitert diesen Gelenkmechanismus zum Winkeldrittler. Man schiebt den Einstellknopf E in der Führung so, dass bei F der Winkel 3α entsteht, und liest bei K den Drittelwinkel ab.

Aufgaben zu 5.2

1. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C gilt:
a) $\gamma = 68°$ **b)** $\alpha = 17{,}8°$ **c)** $\beta = 2\gamma$
d) $\gamma^* = 100°$ **e)** $\alpha^* = 98°$ **f)** $\alpha^* = 4\gamma$.
Berechne die Winkel des Dreiecks.

2. In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel φ bekannt. Berechne die übrigen Winkel.
a) $\varphi = 110°$ **b)** $\varphi = 60°$ **c)** $\varphi = 50°$ (zwei Fälle)

3. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Spitze C ist $\beta = 40°$. Unter welchem Winkel schneiden sich
a) m_a und m_b **b)** m_a und m_c **c)** s_c und c
d) w_γ und w_α **e)** w_α und w_β **f)** w_α und h_c?

4. Zeichne einen Kreis mit r = 4. Trage den Radius immer wieder als Sehne so ab, dass ein Sehnenzug entsteht.
Begründe, warum sich der Sehnenzug schließt.
(Tipp: Verbinde alle Sehnenenden mit dem Kreismittelpunkt.)

5. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit C als Spitze ein Schenkel doppelt so lang wie die Basis, so schneidet s_b ein gleichschenkliges Dreieck ab. Begründe dies. Drücke die Winkel des abgeschnittenen Dreiecks mit $\gamma = \sphericalangle ACB$ aus.

6. ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.
F liegt so auf AB, dass $\sphericalangle$ ACF = α.
Begründe: $[CF] = s_c$.

•7. Warum kann man kein Dreieck in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegen?

:8. **a)** Zeichne ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck, das aus zwei gleichschenkligen Dreiecken besteht, und gib die Dreieckswinkel an.
b) Zeige: Jedes Dreieck mit $\alpha = 3\beta$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
c) Zeige: Jedes rechtwinklige Dreieck besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.
d) Zeige: Jedes Dreieck mit $\gamma = 2\beta$ und $\beta \leqq 45°$ besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.

•9. Warum gibt es kein Dreieck mit genau zwei Symmetrieachsen?

10. Die drei Strecken [MA], [MB] und [MC] sind gleich lang und liegen so, dass je zwei einen 120°-Winkel bilden.
Begründe, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

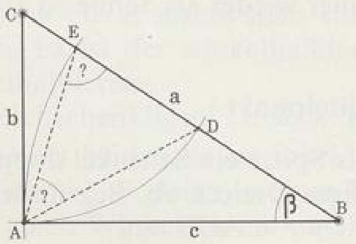
•11. Im Dreieck ABC schneiden sich w_α und w_β in I. Die Parallele durch I zu c schneidet a in U und b in V.
Zeige: $\overline{UV} = \overline{AV} + \overline{BU}$.

12. Im Dreieck ABC ist die Seite c doppelt so lang wie ihre Seitenhalbierende. Wie groß ist der Winkel γ?

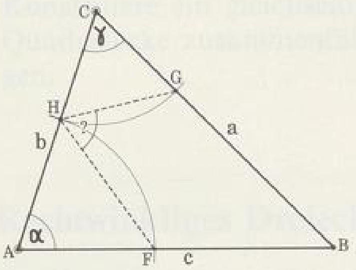
13. Im Dreieck ABC schneidet w_β die Seite b in D. Die Parallele durch D zu a schneidet c in E.
a) Begründe: $\overline{EB} = \overline{ED}$.
•b) Welcher Zusammenhang muss zwischen β und γ bestehen, damit $\overline{BD} = \overline{DC}$ ist? Welche Bedeutung hat DE dann für den Winkel $\sphericalangle$ADB? Begründung!

Hinweis für die nächsten Aufgaben:
Suche in den Figuren gleichschenklige Teildreiecke!

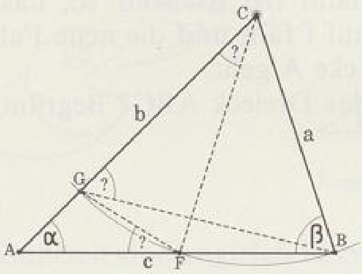
:14. Das Dreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel.
D und E liegen so auf a, dass $\overline{CA} = \overline{CD}$ und $\overline{BA} = \overline{BE}$.
Zeichne die Figur ins Heft.
a) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle$EAD?
b) Berechne $\sphericalangle$ADE in Abhängigkeit von β.
c) Wie groß muss β sein, damit ADE ein gleichschenkliges Dreieck ist? Warum muss A die Spitze sein?



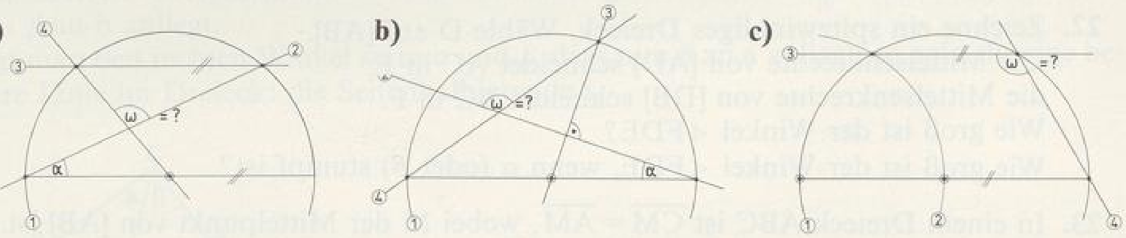
•**15.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. F ist ein beliebiger Punkt auf c. G liegt so auf a, dass $\overline{CH} = \overline{CG}$; H liegt so auf b, dass $\overline{AF} = \overline{AH}$.
Zeige: $\sphericalangle FHG$ ist das arithmetische Mittel von α und γ.



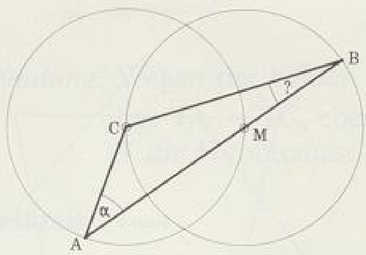
•**16.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $a < b$. Der Kreis um C mit Radius a schneidet c in F und b in G.
Berechne die Winkel $\sphericalangle GCF$, $\sphericalangle BGC$ und $\sphericalangle GFA$ in Abhängigkeit von α und β.



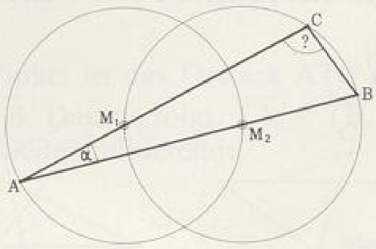
17. a) b) c)



18. Zeichne zwei Kreise mit gleichem Radius so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle B auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Berechne β in Abhängigkeit von α.



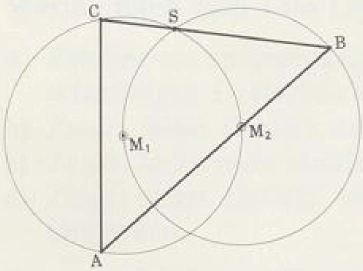
18



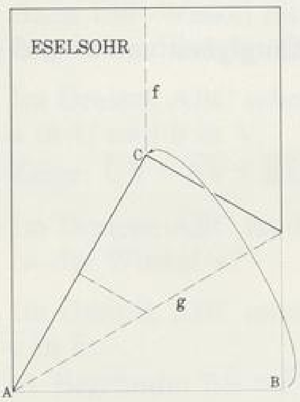
19

•**19.** Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Berechne γ in Abhängigkeit von α.

⁝20. Zeichne zwei Kreise so, dass der eine durch den Mittelpunkt des andern geht. Wähle A auf einem Kreis und zeichne das Dreieck ABC.
Begründe, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und die Spitze C hat.



21. ESELSOHR

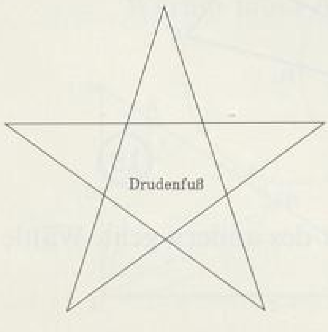


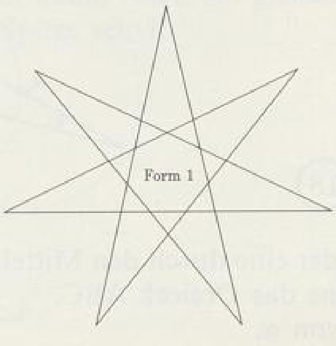
Nimm ein DIN-A4-Blatt und falte es so, dass die längeren Seiten aufeinander liegen, dabei entsteht die Faltlinie f. Knicke dann ein Eselsohr so, dass die Ecke B im Punkt C auf f fällt und die neue Faltlinie g durch die andere Ecke A geht.
Von welcher Art ist das Dreieck ABC? Begründung!

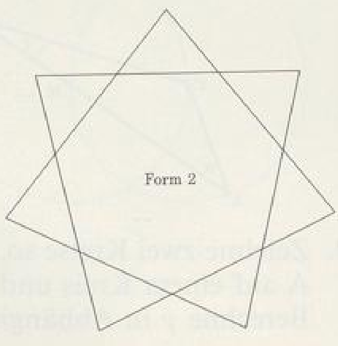
22. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck. Wähle D auf [AB].
Die Mittelsenkrechte von [AD] schneidet AC in E,
die Mittelsenkrechte von [DB] schneidet BC in F.
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle$FDE?
Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle$FDE, wenn α (oder β) stumpf ist?

23. In einem Dreieck ABC ist $\overline{CM} = \overline{AM}$, wobei M der Mittelpunkt von [AB] ist.
Was für Teildreiecke sind AMC und MBC? Wie groß ist der Winkel bei C?

•24. ZACKEN
Wie groß ist die Summe der Zackenwinkel beim regelmäßigen Fünfstern (Drudenfuß) und Siebenstern, Form 1 und Form 2?





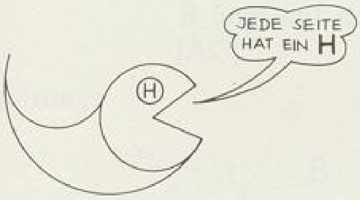


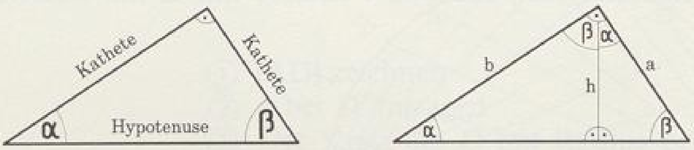
25. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt. Konstruiere durch P eine Gerade e, die mit g und h ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.

26. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck so in ein Quadrat, dass eine Ecke mit einer Quadratecke zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf Quadratseiten liegen.

5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

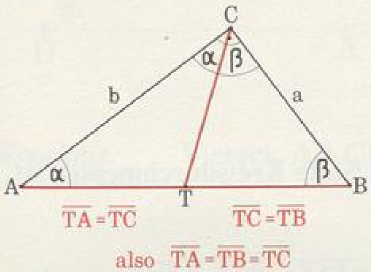
Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck. Die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten, die Gegenseite des rechten Winkels ist die Hypotenuse. Wegen $\alpha + \beta + 90° = 180°$ sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.





Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$

Die Katheten sind zugleich Höhen. Die dritte Höhe hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, deren Winkel mit denen des großen Dreiecks übereinstimmen. Diese Höhe zerlegt also den rechten Winkel so in α und β, dass β an b anliegt.
Zerlegt man den rechten Winkel so in α und β, dass nun β an a anliegt, so entsteht eine besondere Linie im Dreieck: die Seitenhalbierende s_c.



Begründung: Wegen der beiden gleich großen Winkel ist das Dreieck ATC gleichschenklig: $\overline{TA} = \overline{TC}$, ebenso gilt: $\overline{TC} = \overline{TB}$. Daraus folgt: $\overline{TA} = \overline{TB}$, also halbiert T die Hypotenuse und [CT] ist die Seitenhalbierende.

Thaleskreis

Zeichnet man über einer festen Hypotenuse mehrere rechtwinklige Dreiecke, dann schaut es so aus, als ob die Scheitel der rechten Winkel auf einem Kreis lägen. Schon vor etwa zweieinhalbtausend Jahren hat der griechische Philosoph und Mathematiker Thales von Milet tatsächlich folgenden Satz aufgestellt: