Algebra

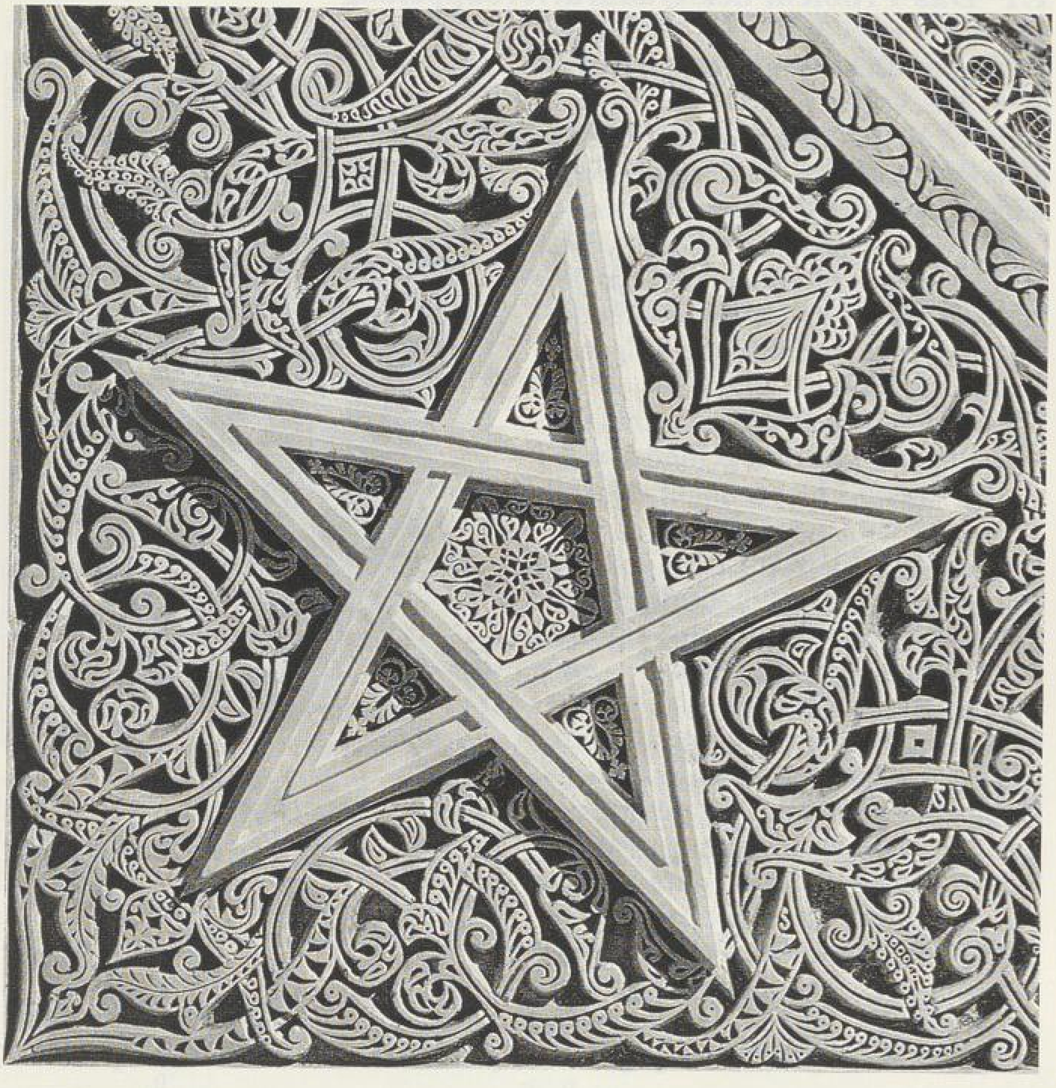
Barth, Friedrich

München, 2001

1 Die reellen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

1 Die reellen Zahlen



Pentagramm – Siegel Salomonis – Drudenfuß
Gipsschnittstukkatur aus Marokko

Das magische Zeichen, das 5-mal A, das große griechische Alpha, enthält und deswegen auch Pentalpha heißt, symbolisiert das Weltall, die Vollkommenheit und auch die Gesundheit. Es diente den PYTHAGOREERN (500–350 v. Chr.) und später den NEUPLATONIKERN (3.–6. Jh. n. Chr.) als Zeichen ihres Bundes. – SALOMO, König von Israel und Juda (um 965–926 v. Chr.), galt in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung bis ins Mittelalter hinein als großer Zauberer; das Pentagramm wurde zu seinem Siegel. – Die Drude ist eine Hexe, ein weiblicher Nachtgeist, der für Alpträume und Magendrücken verantwortlich ist. Ihr Fußabdruck, der Drudenfuß, ist, auf die Schwelle gezeichnet, ein Abwehrsymbol gegen Druden, später ein allgemeines Bannzeichen gegen Geister und den Teufel (siehe GOETHE, *Faust* 1. Teil, Vers 1394ff.)

1 Die reellen Zahlen

1.1 Das Problem der Quadratverdoppelung

Der griechische Philosoph PLATON (428–348 v. Chr.) beschreibt in seinem vor 389 v. Chr. verfassten Dialog *Menon* (82b–85b) die Lehrmethode seines berühmten Lehrers SOKRATES (470–399 v. Chr.). Er schildert, wie SOKRATES einem mathematisch ungebildeten Sklaven seines Freundes MENON dazu verhilft, die folgende Aufgabe zu lösen:

> Zu einem gegebenen Quadrat soll ein zweites Quadrat gefunden werden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist.

Der Sklave schlägt zunächst vor jede Seite des gegebenen Quadrats (Abbildung 10.2) zu verdoppeln, erkennt dann aber, dass sich dabei der Flächeninhalt vervierfacht (Abbildung 10.3). Das gesuchte Quadrat darf nur halb so groß sein; man muss also die Fläche des großen Quadrates halbieren. Die Lösung, zu der SOKRATES den Sklaven anleitet, beruht darauf, dass von jedem der vier Teilquadrate die Hälfte weggenommen wird, indem man sie, wie Abbildung 10.4 zeigt, durch Diagonalen zerschneidet. ABCD ist dann das gesuchte Quadrat. Seine Seite ist die Diagonale des gegebenen Quadrats.

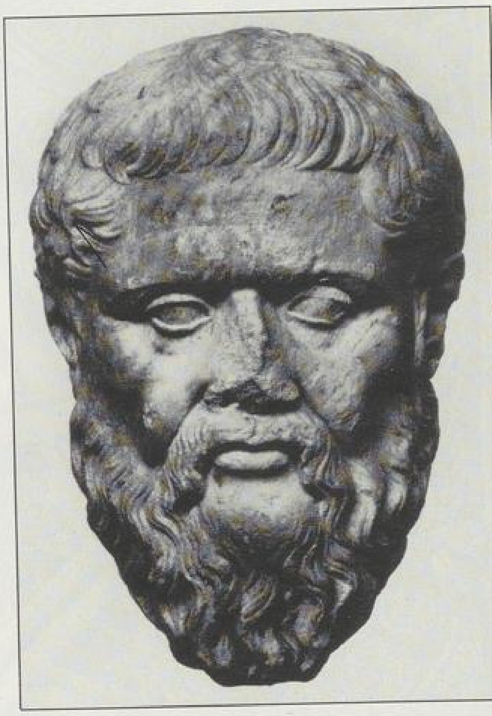


Abb. 10.1 PLATON, eigentlich ARISTOKLES (428 Athen oder Ägina – 348 Athen) Kaiserzeitliche römische Kopie nach dem Werk des SILANION, entstanden wohl bald nach 348 v. Chr. München, Glyptothek

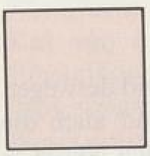


Abb. 10.2 gegebenes Quadrat

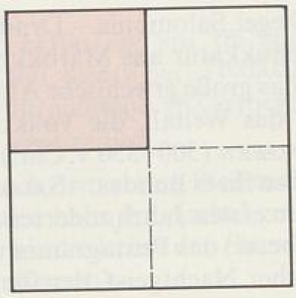


Abb. 10.3 Quadrat mit doppelter Seitenlänge

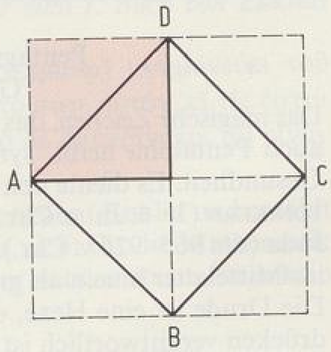


Abb. 10.4 Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt

Uns interessiert die Frage, wie lang die Seite des Lösungsquadrats ist. Das hängt natürlich von der Größe des gegebenen Quadrats ab. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, dass es sich um das Einheitsquadrat handelt, also um das Quadrat mit der Seitenlänge 1 (d.h. 1 Längeneinheit). Sein Flächeninhalt ist damit ebenfalls 1 (d.h. 1 Flächeneinheit). Da somit das Lösungsquadrat ABCD den Flächeninhalt 2 besitzt, muss für seine Seitenlänge x gelten: $x \cdot x = 2$, kurz $x^2 = 2$.
Um die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats angeben zu können muss man also diese Gleichung lösen. Man erkennt leicht, dass x eine Zahl zwischen 1 und 2 sein muss, denn es ist $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$; also muss $1 < x < 2$ gelten. Eine genauere Eingrenzung von x erhält man, indem man die Quadrate von 1,1; 1,2; 1,3; ... berechnet; wegen $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$ gilt: $1{,}4 < x < 1{,}5$. Ebenso findet man mit Hilfe des Taschenrechners schnell die Ergebnisse

$$1{,}41 < x < 1{,}42$$
$$1{,}414 < x < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < x < 1{,}4143.$$

Können wir auf diesem Wege den genauen Wert von x finden?
Sicherlich nicht! Denn wenn man einen Dezimalbruch mit einer, zwei, drei, ... Stellen nach dem Komma quadriert, erhält man eine Zahl mit zwei, vier, sechs, ... Stellen nach dem Komma, also niemals eine ganze Zahl.* Die Gleichung $x^2 = 2$ kann somit keinen endlichen Dezimalbruch als Lösung haben.
Neben den ganzen Zahlen und den endlichen Dezimalbrüchen gehören zu der uns zur Verfügung stehenden Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auch Brüche, deren Dezimalentwicklung unendlich und periodisch ist. Das sind bekanntlich diejenigen Brüche, deren Nenner nach vollständigem Kürzen noch einen von 2 und 5 verschiedenen Primfaktor enthalten. Gibt es unter ihnen eine Lösung von $x^2 = 2$?
Angenommen, $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ wäre eine solche Lösung; dabei sei dieser Bruch vollständig gekürzt. Da x keine ganze Zahl ist, muss $q > 1$ gelten. Durch Quadrieren erhält man $x^2 = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$. Dieser Bruch kann aber keine ganze Zahl sein; denn, da p und q teilerfremd sind, lässt er sich nicht kürzen, und wegen $q > 1$ ist sein Nenner von 1 verschieden. Das heißt aber: **Es gibt keinen Bruch, dessen Quadrat den Wert 2 hat**.
Das Ergebnis unserer Überlegungen lautet somit: Die Gleichung $x^2 = 2$ ist mit rationalen Zahlen nicht lösbar. Wir sind mit den uns zur Verfügung stehenden Zahlen nicht in der Lage die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats anzugeben. Man erkennt leicht, dass es neben $x^2 = 2$ noch viele andere, ebenso einfache Gleichungen gibt, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind. Weitere Beispiele findest du in den folgenden Aufgaben.

* Wir setzen dabei voraus, dass die letzte Stelle der zu quadrierenden Zahl jeweils nicht 0 ist.

Aufgaben

1. Zeige: Die folgenden Gleichungen haben keine rationalen Lösungen.
   a) $x^2 = 3$ **b)** $x^2 = 6$ **c)** $x^2 = 8$ **d)** $x^2 = 500$
2. Die folgenden Gleichungen sind in $\mathbb{Q}$ lösbar. Gib alle Lösungen an.
   a) $x^2 = 1$ **b)** $x^2 = 4$ **c)** $x^2 = 121$ **d)** $x^2 = 625$
   e) $x^2 = \frac{9}{16}$ **f)** $x^2 = 2\frac{7}{9}$ **g)** $x^2 = 0{,}64$ **h)** $x^2 = 0{,}0004$

• **3.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = n$, $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann in $\mathbb{Q}$ lösbar, wenn n eine Quadratzahl ist.

4. Der folgende auf den Begriff »gerade Zahl« sich stützende Beweis für die Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ in der Menge $\mathbb{Q}$ wurde bereits von ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) in seinen *Analytica priora* (I. 23. 41a. 23–27) angedeutet und ist als Anhang zu Buch X der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.) überliefert.

> Angenommen, der vollständig gekürzte Bruch $\frac{p}{q}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Dann gilt
>
> $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad \| \cdot q^2$$
> $$p^2 = 2q^2$$
>
> Daher ist p^2 und somit auch p eine gerade Zahl. Man kann deshalb $p = 2n$ setzen, mit $n \in \mathbb{N}$.
>
> $$(2n)^2 = 2q^2 \qquad \| : 2$$
> $$2n^2 = q^2$$
>
> Also ist auch q^2 und damit q eine gerade Zahl.

Begründe die angewandten Schlüsse. Erkläre, wieso die Annahme zu einem Widerspruch geführt hat und somit falsch ist.

• **5.** Der Beweis von Aufgabe **4**, bei dem die Teilbarkeit durch den Primfaktor 2 die entscheidende Rolle spielt, lässt sich auch auf andere Primfaktoren übertragen. Zeige nach dieser Methode, dass auch die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Q}$ unlösbar sind: **a)** $x^2 = 7$ **b)** $x^2 = 12$ **c)** $x^2 = 15$

6. Die Gleichung $x^2 = \frac{2}{3}$ hat keine rationale Lösung. Das kann man so beweisen: Aus $x^2 = \frac{2}{3}$ erhält man $(3x)^2 = 2 \cdot 3$ (Multiplikation mit 3^2). Mit der Substitution $z = 3x$ wird daraus $z^2 = 6$, eine in $\mathbb{Q}$ unlösbare Gleichung (vgl. Aufgabe **1b**).
   Begründe mit dieser Methode die Unlösbarkeit der Gleichungen
   a) $x^2 = \frac{1}{6}$, **b)** $x^2 = 2\frac{2}{7}$, **c)** $x^2 = 0{,}2$, **d)** $x^2 = 1{,}25$
   in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

•• **7.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, ist in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar, wenn $p \cdot q$ eine Quadratzahl ist. (Hinweis: Beachte die Aufgaben **6** und **3**.)

8. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a, $a \in \mathbb{Q}^+$.

a) Bestimme die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt **1)** 4-mal, **2)** 49-mal, **3)** 2,25-mal, **4)** $\frac{25}{36}$-mal so groß ist.

b) Gibt es eine rationale Zahl, welche die Seitenlänge eines Quadrats mit dem **1)** 5fachen, **2)** 16fachen, **3)** 1,6fachen Flächeninhalt angibt?

9. Kannst du mit Hilfe rationaler Zahlen angeben, wie lang die Seiten folgender Figur sind?

a) Quadrat mit **1)** $15\,\text{m}^2$, **2)** $16\,\text{cm}^2$, **3)** $2{,}3\,\text{dm}^2$ Flächeninhalt

b) Rechteck mit dem Seitenverhältnis $2:3$ und **1)** $36\,\text{cm}^2$, **2)** $324\,\text{mm}^2$, **3)** $0{,}24\,\text{m}^2$ Flächeninhalt

10. Dem Problem der Quadratverdoppelung entspricht bei den Körpern das der Würfelverdoppelung:

Zu einem gegebenen Würfel soll ein zweiter Würfel gefunden werden, dessen Rauminhalt doppelt so groß ist.

Diese Aufgabe wird als **delisches Problem** bezeichnet aufgrund einer Erzählung des Eratosthenes (3. Jh. v. Chr.):

Als auf der Insel Delos die Pest wütete, wandten sich die Bewohner Hilfe suchend an Apollo. Sie erhielten den Auftrag, den würfelförmigen Altar in seinem Heiligtum zu verdoppeln, aber dabei die Gestalt zu bewahren.

a) Zeige, dass die Kantenlänge x eines Würfels, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das des Einheitswürfels, die Gleichung $x^3 = 2$ erfüllen muss.

•**b)** Begründe nach der bei $x^2 = 2$ angewandten Methode, dass auch die Gleichung $x^3 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist.

•**11.** Die Tatsache, dass es Streckenpaare gibt, deren Verhältnis sich nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken lässt, wurde zuerst von den Griechen erkannt. Die Pythagoreer, deren Bundeszeichen das regelmäßige Fünfeck war (vgl. Abbildung 9.1), entdeckten gerade an diesem Fünfeck, dass – ebenso wie beim Quadrat – Seite und Diagonale kein rationales Verhältnis haben.

Aus der Ähnlichkeit der Fünfecke ABCDE und A′B′C′D′E′ in Abbildung 13.1 folgt, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale in beiden Fällen gleich ist.

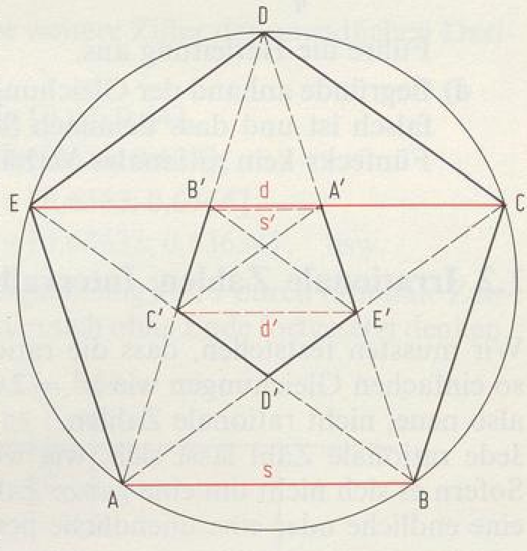


Abb. 13.1 Das regelmäßige Fünfeck

Es gilt also

$$\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'}. \tag{1}$$

a) Weise nach, dass sich d' und s' folgendermaßen durch d und s ausdrücken lassen:

$$d' = d - s \quad \text{und} \quad s' = 2s - d \tag{2}$$

(Hinweis: Welche besondere Eigenschaft haben die Vierecke ABCB′, ABA′E, C′E′CA′ und C′E′B′E?)
Begründe sodann die Abschätzung

$$s < d < 2s. \tag{3}$$

b) Zeige mit Hilfe von (2), dass die Gleichung (1) durch die Substitution $x := \frac{d}{s}$ folgende Form erhält:

$$x = \frac{x-1}{2-x} \tag{4}$$

Welche Abschätzung für x ergibt sich aus (3)?

c) Aus der Annahme, ein Bruch $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q sei Lösung der Gleichung (4), lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$p + q = \frac{p^2}{q} \tag{5}$$

Führe die Herleitung aus.

d) Begründe anhand der Gleichung (5), dass die in **c** gemachte Annahme falsch ist und dass demnach Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks kein rationales Verhältnis haben.

1.2 Irrationale Zahlen; Intervallschachtelungen

Wir mussten feststellen, dass die rationalen Zahlen schon zum Lösen von so einfachen Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht ausreichen. Dazu benötigen wir also neue, nicht rationale Zahlen.
Jede rationale Zahl lässt sich, wie wir wissen, als Dezimalzahl schreiben. Sofern es sich nicht um eine ganze Zahl handelt, erhält man dabei entweder eine endliche oder eine unendliche periodische Dezimalzahl.

Beispiele:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$; $\quad \frac{29}{22} = 1{,}3\overline{18}$; $\quad 3\frac{7}{100} = 3{,}07$

Natürlich kann man sich auch Dezimalzahlen vorstellen, bei denen die Ziffernfolge hinter dem Komma unendlich und nicht periodisch ist, zum Beispiel
0,63 633 6333 63333... oder
5,18 1188 111888 11118888...,
wobei man sich die Ziffernfolge nach der leicht erkennbaren Gesetzmäßigkeit endlos fortgesetzt denken muss. Dass man auch mit solchen Gebilden ebenso rechnen kann wie mit den rationalen Zahlen, ist keineswegs selbstverständlich. Darauf soll erst im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.
Diese neuen nicht rationalen Zahlen werden in der mathematischen Fachsprache als **irrationale*** Zahlen bezeichnet. Es gilt also

> **Definition 15.1:** Eine Zahl, deren Dezimalentwicklung unendlich und nicht periodisch ist, heißt **irrationale Zahl**.

Es ist nicht schwer, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie die neuen irrationalen Zahlen in die bekannten rationalen Zahlen einzuordnen sind. Als Beispiel betrachten wir die irrationale Zahl $z = 0{,}63\,633\,6333\ \ldots$ und vergleichen sie mit geeigneten rationalen Zahlen. Die Ziffer 0 vor dem Komma sagt uns, dass z zwischen den ganzen Zahlen 0 und 1, also im Intervall $[0; 1]$ liegen soll:

$$0 \leqq z \leqq 1 \quad \text{d.h.} \quad z \in [0; 1]$$

Nimmt man die erste Stelle nach dem Komma hinzu, so ergibt sich die Abschätzung

$$0{,}6 \leqq z \leqq 0{,}7 \quad \text{d.h.} \quad z \in [0{,}6; 0{,}7].$$

Indem man so fortfährt und jeweils eine weitere Ziffer der unendlichen Dezimalzahl berücksichtigt, erhält man

$$\begin{aligned} 0{,}63 \leqq z \leqq 0{,}64 \quad & \text{d.h.} \quad z \in [0{,}63; 0{,}64], \\ 0{,}636 \leqq z \leqq 0{,}637 \quad & \text{d.h.} \quad z \in [0{,}636; 0{,}637], \\ 0{,}6363 \leqq z \leqq 0{,}6364 \quad & \text{d.h.} \quad z \in [0{,}6363; 0{,}6364], \\ 0{,}63633 \leqq z \leqq 0{,}63634 \quad & \text{d.h.} \quad z \in [0{,}63633; 0{,}63634], \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Man erreicht so eine immer schärfere Eingrenzung von z durch rationale Zahlen. Die Folge der Intervalle für z muss man sich ohne Ende fortgesetzt denken.

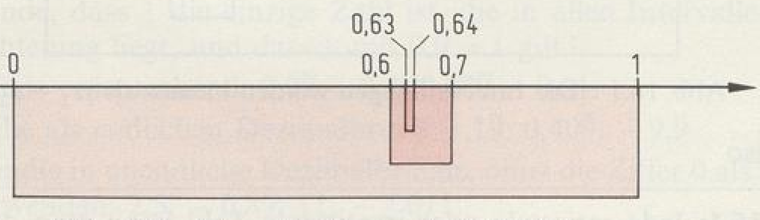


Abb. 15.1 Intervalle für $z = 0{,}636336333\ldots$

* irrational = nicht rational. Zur Geschichte dieses Wortes siehe Seite 63.

Man erkennt leicht (Abbildung 15.1), dass diese Intervalle »ineinander geschachtelt« sind, d. h., dass das jeweils nächste ganz im vorausgehenden enthalten ist. Die Längen dieser Intervalle sind der Reihe nach $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$; sie nehmen schnell ab und werden beliebig klein, d. h., jede positive Zahl, auch wenn sie noch so klein ist, wird von den Intervalllängen schließlich unterschritten. Für eine solche Intervallfolge führt man eine passende Bezeichnung ein:

Definition 16.1: Eine Folge von unendlich vielen abgeschlossenen Intervallen, bei welcher
(1) jedes Intervall in allen vorangehenden enthalten ist und
(2) die Intervallängen beliebig klein werden,
heißt **Intervallschachtelung**.

Das vorausgehende Beispiel zeigt, dass und wie man zu einer irrationalen Zahl eine Intervallschachtelung angeben kann. Aber auch für rationale Zahlen gibt es Intervallschachtelungen. Das zeigen die folgenden

Beispiele:

1) $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$
Intervallschachtelung: $[0; 1]$, $[0,6; 0,7]$, $[0,66; 0,67]$, $[0,666; 0,667]$, …

2) $1\frac{7}{22} = 1,3\overline{18}$
Intervallschachtelung:
$[1; 2]$, $[1,3; 1,4]$, $[1,31; 1,32]$, $[1,318; 1,319]$, $[1,3181; 1,3182]$, …

3) $2,3 = 2,3\overline{0}$(!)
Intervallschachtelung: $[2; 3]$, $[2,3; 2,4]$, $[2,30; 2,31]$, $[2,300; 2,301]$, …

Man kann also für alle Zahlen, gleichgültig ob rational oder irrational, Intervallschachtelungen angeben. Wichtig ist, dass durch eine solche Schachtelung die entsprechende Zahl eindeutig bestimmt ist. Es können nämlich niemals zwei verschiedene Zahlen allen Intervallen einer Intervallschachtelung angehören. Denn ein Intervall, in dem zwei verschiedene Zahlen z_1 und z_2 liegen, muss mindestens eine Länge $|z_1 - z_2|$ haben. Diese positive Zahl wird aber bei einer Intervallschachtelung von den Intervalllängen schließlich unterschritten, da diese ja beliebig klein werden (Abbildung 16.1).

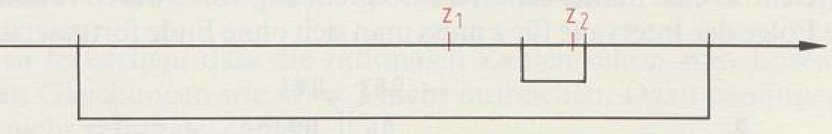


Abb. 16.1 Die Intervalllängen werden kleiner als $|z_1 - z_2|$.

Es gilt also

Satz 16.1: Jede rationale oder irrationale Zahl kann man durch eine Intervallschachtelung eindeutig festlegen.

Aufgaben

1. Entwickle die folgenden Zahlen in Dezimalbrüche:

a) $\frac{7}{25}$ **b)** $\frac{91}{35}$ **c)** $\frac{35}{91}$ **d)** $\frac{8}{15}$ **e)** $\frac{9}{15}$
f) $\frac{15}{32}$ **g)** $\frac{1}{17}$ **h)** $9\frac{10}{11}$ **i)** $\frac{53}{360}$ **k)** $\frac{54}{360}$

2. Gib drei neue Beispiele für unendliche nicht periodische Dezimalbrüche an. Beschreibe jeweils die Regel, nach der die Ziffernfolge sich endlos fortsetzen soll.

•3. Begründe, dass die folgenden unendlichen Dezimalzahlen irrational sind. (Hinweis: Untersuche das Auftreten der Ziffer 0. Gibt es beliebig lange Abschnitte, die nur aus Nullen bestehen?)

a) $x = 0{,}12345678910111213\ldots$; d.h., die Ziffernfolge nach dem Komma entsteht durch »Hintereinanderschreiben aller natürlichen Zahlen«.

b) $y = 0{,}149162536496481100121\ldots$; d.h., die Ziffernfolge nach dem Komma entsteht durch »Hintereinanderschreiben aller Quadratzahlen«.

c) $z = 0{,}1\,2\,6\,24\,120\,720\,5040\ldots$; der k-te Abschnitt der Ziffernfolge nach dem Komma ergibt sich hier durch die Berechnung des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, wofür man kurz $k!$ schreibt, gelesen »k Fakultät«.

4. Welche der folgenden Dezimalzahlen stellen irrationale Zahlen dar? (Die Ziffernfolge soll sich nach der erkennbaren Gesetzmäßigkeit endlos fortsetzen.)

a) $0{,}367999\ldots$ **b)** $-1{,}343443444\ldots$ **c)** $5{,}211221122211\ldots$
d) $-7{,}727727727\ldots$ **e)** $0{,}204080160\ldots$ **f)** $-4{,}32100000\ldots$

5. Stelle fest, ob die angegebene Intervallfolge eine Intervallschachtelung ist.

a) $[5; 6], [5{,}6; 5{,}7], [5{,}66; 5{,}67], [5{,}666; 5{,}667], \ldots$
b) $[0; 2], [0{,}9; 1{,}1], [0{,}99; 1{,}01], [0{,}999; 1{,}001], \ldots$
c) $[3; 3{,}5], [3; 3{,}05], [3; 3{,}005], [3; 3{,}0005], \ldots$
d) $[1; 2], [2; 2{,}1], [3; 3{,}01], [4; 4{,}001], \ldots$
e) $[-2; -1], [-2{,}1; -1{,}9], [-2{,}11; -1{,}99], [-2{,}111; -1{,}999], \ldots$
f) $[-1; 2], [-0{,}1; 0{,}2], [-0{,}01; 0{,}02], [-0{,}001; 0{,}002], \ldots$

•6. a) Gib eine Intervallschachtelung für die Zahl $0{,}\overline{9}$ an.

b) Begründe, dass 1 die einzige Zahl ist, die in allen Intervallen dieser Schachtelung liegt, und dass somit $0{,}\overline{9} = 1$ gilt.

c) Begründe entsprechend: $0{,}0\overline{9} = 0{,}1$; $0{,}00\overline{9} = 0{,}01$.

d) Schreibe als endlichen Dezimalbruch: $1{,}1\overline{9}$; $0{,}40\overline{9}$; $-9{,}\overline{9}$.

e) Verwandle in unendliche Dezimalbrüche, ohne die Ziffer 0 als Periode zu verwenden: $2{,}5$; $-0{,}89$; 11; $-2{,}011$.

•7. Bei den bisher betrachteten Beispielen von Intervallschachtelungen entstand das jeweils nächste Intervall durch Zehnteilung des vorausgehenden. Manchmal werden auch andere Unterteilungsverfahren benützt.

a) Beschreibe die Regel, nach der die Intervallfolge $[0;1]$, $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$, $[\frac{4}{9};\frac{5}{9}]$, $[\frac{13}{27};\frac{14}{27}]$, $[\frac{40}{81};\frac{41}{81}]$, … konstruiert ist. Stelle die ersten vier Intervalle auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 9 cm dar.

b) Begründe, dass die in **a** angegebene Intervallfolge eine Intervallschachtelung ist. Welche Zahl wird durch sie festgelegt?

c) Vom »Halbierungsverfahren« spricht man, wenn das jeweils nächste Intervall eine der Hälften des vorausgehenden ist. Berechne die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung für die Zahl $\frac{2}{3}$, indem du mit $[0;1]$ beginnst und die weiteren Intervalle nach dem Halbierungsverfahren bestimmst.

8. Gib Intervalle der Länge 1; 0,1; 0,01 und 0,001 an, in denen eine positive Lösung der Gleichung

a) $x^2 = 3$, **b)** $x^2 = 0{,}5$, **c)** $x^2 = 200$, **d)** $x^2 = \frac{4}{11}$

liegen müßte.

•9. Bestimme Intervalle mit den Längen 1; 0,1; 0,01 und 0,001, in denen die Kantenlänge eines Würfels liegen müsste, dessen Volumen n-mal so groß wie das des Einheitswürfels ist.

a) $n = 2$ **b)** $n = 10$ **c)** $n = 100$

**1.3. Rechnen mit Intervallschachtelungen

Wir haben schon erwähnt, dass man auch mit den irrationalen Zahlen sinnvoll rechnen kann. Das ist keineswegs selbstverständlich. Schon bei der Frage, wie mit ihnen die verschiedenen Rechenarten auszuführen sind, stößt man auf Schwierigkeiten. Da es sich um unendliche Dezimalzahlen handelt, kann man ja z. B. beim Addieren nicht wie bei endlichen Dezimalzahlen mit der letzten Stelle beginnen. Bei den periodischen Dezimalzahlen umgeht man dieses Problem, indem man sie durch die entsprechenden gewöhnlichen Brüche ersetzt, z. B. $0{,}\overline{6}$ durch $\frac{2}{3}$. Bei den unendlichen nicht periodischen Dezimalzahlen scheidet diese Möglichkeit aus. Für das Rechnen mit ihnen benötigen wir andere Hilfsmittel. Als solche eignen sich z. B. die Intervallschachtelungen. Mit ihnen kann man die Rechenoperationen auch für irrationale Zahlen definieren und die weitere Gültigkeit der Rechengesetze nachweisen. Dies soll für die Addition näher erläutert werden. Zunächst betrachten wir ein Beispiel mit zwei rationalen Summanden.

Beispiel 1:

$a = \frac{2}{3}$; $b = 2{,}3 \Rightarrow a + b = \frac{2}{3} + 2{,}3 = \frac{2}{3} + 2\frac{3}{10} = 2\frac{29}{30}$

Intervallschachtelungen für a und b haben wir bereits im vorausgehenden Abschnitt angegeben (vgl. Seite 16). Aus deren ersten Intervallen erkennt man, dass $0 \leqq a \leqq 1$ und $2 \leqq b \leqq 3$ gilt. Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man

$2 \leqq a + b \leqq 4$ d.h., $a + b \in [2; 4]$.

Analog erhält man aus den zweiten, dritten, vierten, ... Intervallen

$$0{,}6 + 2{,}3 \leqq a + b \leqq 0{,}7 + 2{,}4 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}9; 3{,}1]$$
$$0{,}66 + 2{,}30 \leqq a + b \leqq 0{,}67 + 2{,}31 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}96; 2{,}98]$$
$$0{,}666 + 2{,}300 \leqq a + b \leqq 0{,}667 + 2{,}301 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}966; 2{,}968] \text{ usw.}$$

Man erkennt leicht, dass die rechts stehenden Intervalle für $a + b$ wieder eine Intervallschachtelung bilden. Durch sie ist die Zahl $a + b$ eindeutig festgelegt. Aus der Dezimalentwicklung von $a + b = 2\frac{20}{30} = 2{,}9\overline{6}$ erkennt man ebenfalls, dass $a + b$ jedem Intervall dieser Schachtelung angehört.

Das vorausgehende Beispiel zeigt, wie man aus Intervallschachtelungen für zwei Zahlen a und b durch Addition entsprechender Intervallgrenzen wieder eine Intervallschachtelung für die Summe $a + b$ erhält. Der Vorteil dieser an sich umständlichen Additionsmethode liegt darin, dass man sie auch auf irrationale Summanden anwenden kann.

Beispiel 2:

$z_1 = 0{,}636336333\ldots$; $z_2 = 5{,}181188111888\ldots$

Intervallschachtelung für z_1:

$[0; 1], [0{,}6; 0{,}7], [0{,}63; 0{,}64], [0{,}636; 0{,}637], [0{,}6363; 0{,}6364], \ldots$

Intervallschachtelung für z_2:

$[5; 6], [5{,}1; 5{,}2], [5{,}18; 5{,}19], [5{,}181; 5{,}182], [5{,}1811; 5{,}1812], \ldots$

Durch Addieren entsprechender Intervallgrenzen erhält man die Intervallfolge

$[5; 7], [5{,}7; 5{,}9], [5{,}81; 5{,}83], [5{,}817; 5{,}819], [5{,}8174; 5{,}8176], \ldots$

Dies ist wieder eine Intervallschachtelung, durch welche die Summe $z_1 + z_2$ bestimmt ist. Ihre Dezimalentwicklung beginnt mit 5,817; man kann durch fortgesetzte Intervalladdition beliebig viele weitere Dezimalen berechnen.

Allgemein gilt: Zwei Zahlen a und b kann man addieren, indem man für sie Intervallschachtelungen $[a_1; A_1]$, $[a_2; A_2]$, $[a_3; A_3], \ldots$ bzw. $[b_1; B_1]$, $[b_2; B_2]$, $[b_3; B_3], \ldots$ aufstellt und aus den Intervallpaaren $[a_n; A_n]$, $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, die Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ berechnet. Diese bilden wieder eine Intervallschachtelung, wie du anhand der Aufgabe 20/**6** begründen kannst.
Da aus den Ungleichungen $a_n \leqq a \leqq A_n$ und $b_n \leqq b \leqq B_n$ die Doppelungleichung $a_n + b_n \leqq a + b \leqq A_n + B_n$ folgt, liegt die Summe $a + b$ in jedem der Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ und ist damit durch diese Intervallschachtelung eindeutig bestimmt.
Da die bei Vertauschung der Summanden a und b erhaltenen Intervalle $[b_n + a_n; B_n + A_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dieselbe Intervallschachtelung liefern, gilt $a + b = b + a$, d.h. das Kommutativgesetz der Addition für beliebige, also auch für irrationale Zahlen. Ebenso kann man zeigen, dass auch die übrigen Rechengesetze der Addition gültig bleiben.

Auch die Multiplikation von rationalen und irrationalen Zahlen kann man mit Hilfe von Intervallschachtelungen durchführen. Es zeigt sich, dass auch für sie die bekannten Rechengesetze gültig bleiben (vgl. die Aufgaben 20/7 bis 21/**10**).

Aufgaben

1. Gib für a und b Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a+b$. Gib die Dezimalentwicklung von $a+b$ an, soweit sie durch die berechneten Intervalle gesichert ist.

a) $a = 0{,}373373337\ldots$ und $b = \frac{7}{11}$
b) $a = 2{,}0408016\ldots$ und $b = 1{,}505505550\ldots$
c) $a = 2{,}\overline{039}$ und $b = -1{,}808008000\ldots$
d) $a = -0{,}771771177111\ldots$ und $b = -3{,}141144111444\ldots$

2. Die Subtraktion zweier Zahlen lässt sich nach der Regel $a - b = a + (-b)$ auf die Addition zurückführen. Berechne so die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a - b$ mit den Zahlen

a) von Aufgabe **1a**, **b)** von Aufgabe **1d**.

3. a) Berechne die Summe der Irrationalzahlen $z_1 = 0{,}151151115\ldots$ und $z_2 = 2{,}626626662\ldots$ Ist das Ergebnis wieder eine irrationale Zahl?
b) Gib zwei irrationale Zahlen an, deren Summe null ist.

4. a) Welche Zahl muss man zu $0{,}585585558\ldots$ addieren um 1 zu erhalten? Ist die gesuchte Zahl rational oder irrational?
b) Welche Zahl muss man von $0{,}585585558\ldots$ subtrahieren um $0{,}252252225\ldots$ zu erhalten? Handelt es sich wieder um eine irrationale Zahl?

•**5.** Beweise, dass die Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl stets irrational ist. (Hinweis: Welche Folgerung für b ergibt sich aus $a + b = c$, wenn man annimmt, dass a und c rational sind?)

:**6.** $[a_n; A_n]$ bzw. $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, seien Intervallschachtelungen.
a) Beweise, dass für jede natürliche Zahl n gilt: Das Intervall $[a_{n+1} + b_{n+1}; A_{n+1} + B_{n+1}]$ liegt ganz in $[a_n + b_n; A_n + B_n]$.
b) Zeige, dass die Länge des Intervalls $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ die Summe der Längen von $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$ ist.
Begründe damit, dass die Längen der Intervalle $[a_n + b_n; a_n + B_n]$ mit wachsendem n beliebig klein werden.

7. a) Berechne mit den auf Seite 16 angegebenen Intervallschachtelungen für $a = \frac{2}{3}$ und $b = 2{,}3$ die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ für $n = 1$ bis $n = 4$. Prüfe, ob sie ineinander geschachtelt sind und ob die Zahl $a \cdot b$ in jedem dieser Intervalle liegt.

b) Berechne die Längen der in **a** bestimmten Intervalle.

c) Sprechen die Ergebnisse von **a** und **b** dafür, dass die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ eine Intervallschachtelung für $a \cdot b$ bilden?

8. a) Stelle für die beiden Irrationalzahlen $a = 1{,}505505550\ldots$ und $b = 0{,}20406080\ldots$ Intervallschachtelungen auf und berechne die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ bis $n = 4$.

b) Zeige, dass diese Intervalle ineinander geschachtelt sind, und berechne ihre Längen.

⁝9. Wenn $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Intervallschachtelungen mit *positiven* Intervallgrenzen sind, dann bilden die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ wieder eine Intervallschachtelung. Der nicht ganz einfache Beweis dafür beruht auf den folgenden Schlüssen. Erläutere sie!

a) Aus $a_n < A_n$ und $b_n < B_n$ folgt $a_n b_n < A_n B_n$; also ist $[a_n b_n; A_n B_n]$ ein Intervall.

b) Aus $a_n \leqq a_{n+1}$ und $b_n \leqq b_{n+1}$ folgt $a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1}$, aus $A_n \geqq A_{n+1}$ und $B_n \geqq B_{n+1}$ folgt $A_n B_n \geqq A_{n+1} B_{n+1}$.
Daher gilt: $[a_{n+1} b_{n+1}; A_{n+1} B_{n+1}] \subset [a_n b_n; A_n B_n]$.

c) Für die Länge des Intervalls $[a_n b_n; A_n B_n]$ gilt:
$A_n B_n - a_n b_n = A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$
Da mit wachsendem n die Werte der geklammerten Terme beliebig klein werden, gilt dies auch für die Intervallänge.

10. Welche einfachere Form ergibt sich für die Abschätzung in Aufgabe **9c**, wenn die beiden Intervallschachtelungen nach der Zehnteilungsmethode konstruiert sind und die ersten Intervalle die Länge 1 haben?

•11. a) Gib für $a = -\frac{4}{3}$ und $b = -3{,}6$ Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten vier Intervalle für das Produkt $a \cdot b$.

b) Erkläre, warum bei Intervallschachtelungen mit *negativen* Intervallgrenzen die Intervalle der Produktschachtelung die Form $[A_n \cdot B_n; a_n \cdot b_n]$ haben.

1.4 Die Menge der reellen Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen werden unter dem gemeinsamen Namen **reelle Zahlen*** zusammengefasst.

* Das Fachwort **reell** geht auf René DESCARTES (1596–1650) zurück. Er unterteilte 1637 in seiner *La Géométrie* die Lösungen von nicht linearen Gleichungen (wie z. B. $ax^2 + bx + c = 0$) in wirkliche und nur denkbare. Das französische Wort für wirklich ist *réel*, das auf ein erst im Mittelalter auftauchendes lateinisches *realis* zurückgeht, das zu *res = Sache* gebildet worden war. Mit *realis* wird DESCARTES' *réel* 1649 in der lateinischen Übersetzung seiner *La Géométrie* wiedergegeben. Wann aus *realis* das deutsche Fachwort *reell* entstand, konnten wir nicht feststellen. Nach 1831 ist es auf alle Fälle bei Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) belegt.

Man verwendet folgende Bezeichnungen:

Definition 22.1:
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ = Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$ = Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = Menge der nicht negativen reellen Zahlen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen gelten die schon bekannten Rechengesetze, die wir in der folgenden Tabelle noch einmal zusammenstellen.

Für reelle Zahlen *a*, *b*, *c* gelten folgende Rechengesetze:

Gesetze der Addition	Gesetze der Multiplikation	Bezeichnungen
(E_+) $a+b \in \mathbb{R}$	$(E_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{R}$	Existenz der Summe/des Produkts
(K_+) $a+b=b+a$	$(K_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz
(A_+) $(a+b)+c = a+(b+c)$	$(A_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz
(N_+) $a+0=a$	$(N_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	Existenz des neutralen Elements
(I_+) $a+(-a)=0$	$(I_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	Existenz des inversen Elements
(D) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		Distributivgesetz
$a<b \Rightarrow a+c<b+c$	$\left.\begin{matrix} a<b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	Monotoniegesetz
	$\left.\begin{matrix} a<b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	Umkehrung der Monotonie

Jede reelle Zahl x lässt sich durch eine Intervallschachtelung darstellen. Da deren Intervalle beliebig klein werden, ziehen sie sich auf der Zahlengeraden auf einen Punkt zusammen, den wir ebenfalls mit x bezeichnen. Jeder reellen Zahl ist somit eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet.

Es stellt sich nun die Frage:
Gehört umgekehrt auch zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl? Solange man nur die rationalen Zahlen zur Verfügung hatte, musste man diese Frage verneinen! Zum Beispiel zeigt Abbildung 23.1 die Konstruktion eines Punktes P der Zahlengeraden, zu dem keine rationale Zahl gehört.

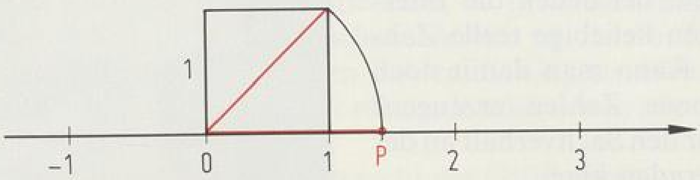


Abb. 23.1 Konstruktion eines »nicht rationalen Punktes«

Nach der Einführung der irrationalen Zahlen muss aber die oben gestellte Frage anders beantwortet werden: Zu jedem Punkt P der Zahlengeraden gehört eine reelle Zahl.

Dies kann man so begründen:
Wir betrachten zunächst die den ganzen Zahlen zugeordneten Punkte. Es kann sein, dass P einer von ihnen ist; dann gehört zu P eine ganze Zahl. Andernfalls liegt P zwischen zwei derartigen Punkten; wir bezeichnen sie mit n und $n+1$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir zerlegen nun $[n; n+1]$ in zehn gleiche Teile. Falls P einer der Teilpunkte ist, gehört zu ihm eine Zahl $n + \frac{k}{10}$ mit $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Andernfalls liegt P zwischen zwei Teilpunkten. Das von diesen begrenzte Intervall zerlegen wir wieder in zehn gleiche Teile usw.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
Entweder: P fällt irgendwann mit einem Teilungspunkt zusammen; dann gehört zu ihm eine Zahl mit einer endlichen Dezimaldarstellung.
Oder: P wird niemals ein Teilungspunkt; dann erhält man eine Intervallschachtelung, die sich auf den Punkt P zusammenzieht. Zu ihr, und damit zu P, gehört eine Zahl mit einer unendlichen Dezimalentwicklung.

Somit gilt

Satz 23.1: Jeder reellen Zahl ist eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet und umgekehrt ist jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet.

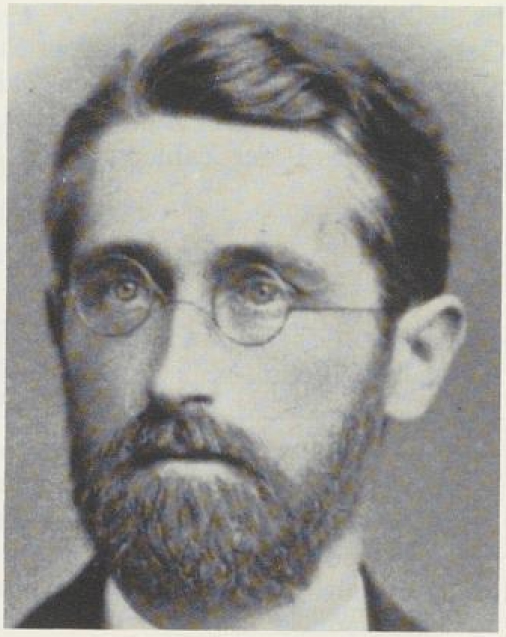
Aufgaben

Kennzeichne auf der Zahlengeraden die Zahlenmenge

1. **a)** $\mathbb{R}^+$, **b)** $\mathbb{R}^-$, **c)** $\mathbb{R}_0^+$.

Beschreibe die folgenden Zahlenmengen möglichst einfach:

2. **a)** $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ **d)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



1868

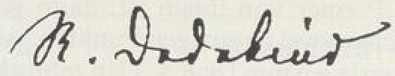


Abb. 24.1
Julius Wilhelm Richard DEDEKIND
(6.10.1831 Braunschweig–12.2.1916 ebd.)

: **3.** Bei den bisher betrachteten Intervallschachtelungen haben wir jeweils rationale Zahlen als Intervallgrenzen benützt. Man kann nun auch Intervallschachtelungen bilden, bei denen die Intervallgrenzen beliebige reelle Zahlen sind. Kann man damit noch einmal neue Zahlen erzeugen? Mache dir den Sachverhalt an der Zahlengeraden klar.

4. Begründe die folgenden Aussagen durch Widerspruchsbeweise:

a) Das Produkt einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl mit einer irrationalen Zahl ist irrational.

b) Der Kehrwert einer irrationalen Zahl ist irrational.

5. **a)** Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den irrationalen Zahlen $a = 0{,}414114111\ldots$ und $b = 0{,}414414441\ldots$ liegt.

b) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer rationale Zahlen angeben, die dazwischen liegen. Begründe diese Aussage.

• **6.** **a)** Gib eine irrationale Zahl an, die
1) zwischen 1,5 und 1,6 **2)** zwischen $\frac{25}{33}$ und $\frac{26}{33}$ liegt.

b) Gib eine irrationale Zahl an, die zwischen den Zahlen von Aufgabe **5 a** liegt.

c) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer eine irrationale Zahl angeben, die dazwischen liegt. Begründung!

7. Wenn bei einer Zahlenmenge M für die Addition und die Multiplikation die Rechengesetze E, K, A, N, I und D gelten, spricht man von einem **Zahlenkörper** $(M; +, \cdot)$.*

a) Du kennst nunmehr zwei verschiedene Zahlenkörper. Welche sind dies?

: **b)** Für die Menge der irrationalen Zahlen gilt:
$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; +, \cdot)$ ist kein Zahlenkörper. Welche Rechengesetze sind in diesem Fall nicht gültig?

* Den Begriff **Körper** prägte 1871 Richard DEDEKIND (1831–1916); seine Verwendung im heutigen Sinn (seit 1893) geht auf Heinrich WEBER (1842–1913) zurück.

**1.5 Ein Vergleich der Zahlenmengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

In welchem Maße hat sich durch die Einführung der irrationalen Zahlen unser Zahlenvorrat vergrößert? Ist die Menge* der irrationalen Zahlen »größer« oder »kleiner« als $\mathbb{Q}$?
Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten, da ja beide Mengen unendlich viele Elemente haben. Beim Vergleichen können wir uns auf die positiven Zahlen beschränken; da die negativen Zahlen die Gegenzahlen der positiven sind, liefert bei ihnen ein Vergleich der rationalen mit den irrationalen dasselbe Ergebnis.
Die Zahlen der Menge $\mathbb{Q}^+$ kann man nicht der Größe nach geordnet aufzählen. Dennoch ist es möglich, sie in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen und dadurch abzuzählen. Georg CANTOR (1845–1918) erfuhr dies bereits als Student in einem Seminar bei seinem großen Lehrer Karl WEIERSTRASS (1815 bis 1897) und erwähnte diese Möglichkeit im Brief vom 29. 11. 1873 an Richard DEDEKIND (1831–1916). Vorgeführt hat es CANTOR aber erst in einem sehr ausführlichen Brief vom 18.6.1886 an den Berliner Gymnasiallehrer F. GOLDSCHEIDER. Veranschaulichen kann man dieses Abzählen durch ein Verfahren, das auf Augustin Louis CAUCHY (1789–1857) zurückgeht und das **1. Diagonalverfahren** heißt. In Abbildung 25.1 ist es dargestellt.

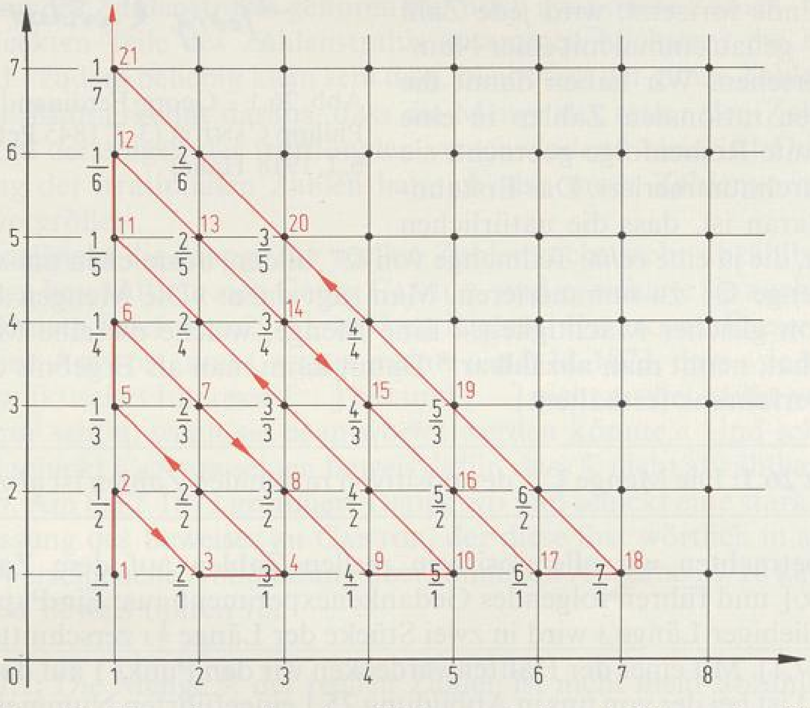
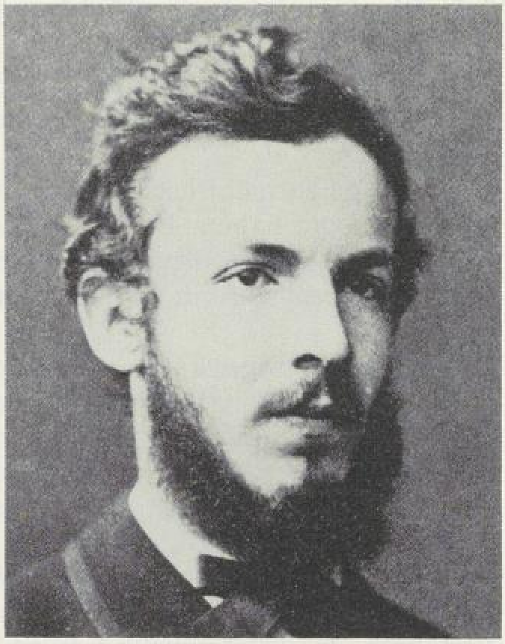


Abb. 25.1 Abzählen der rationalen Zahlen nach dem 1. Diagonalverfahren

* Der Philosoph, Theologe und Mathematiker Bernard BOLZANO (1781–1848) verwendete das Wort **Menge** als mathematischen Begriff in seiner um 1835 geschriebenen *Größenlehre*, die erst 1975 veröffentlicht wurde, und auch in den 1847 verfassten und 1851 gedruckten *Paradoxien des Unendlichen*. Georg CANTOR (1845–1918), der diese Schrift sehr bewunderte, benützte das Wort *Menge* erst ab 1895; bis dahin sprach er von Mannigfaltigkeit oder Inbegriff.

Wir betrachten die Gitterpunkte im 1. Quadranten eines Koordinatensystems und ordnen dem Punkt $P(x|y)$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ den Bruch $\frac{x}{y}$ zu. Dann durchlaufen wir von $\frac{1}{1}$ aus die Gitterpunkte in der durch die rote Linie angegebenen Weise und nummerieren dabei die Brüche. $\frac{1}{1}$ ist also der erste Bruch, $\frac{1}{2}$ der zweite, $\frac{2}{1}$ der dritte usw. (vgl. die roten Nummern in Abbildung 25.1). $\frac{2}{2}$ können wir übergehen, da dieser Bruch wieder dieselbe Zahl wie $\frac{1}{1}$ darstellt. Auch $\frac{4}{2}$ $(=\frac{2}{1})$, $\frac{3}{3}$ $(=\frac{1}{1})$, $\frac{2}{4}$ $(=\frac{1}{2})$ liefern keine neuen rationalen Zahlen; man erkennt, dass alle kürzbaren Brüche beim Nummerieren übergangen werden können (vgl. dazu Aufgabe 28/**2**). Wenn man dieses Durchlaufen der Gitterpunkte ohne Ende fortsetzt, wird jede Zahl aus $\mathbb{Q}^+$ genau einmal mit einer Nummer versehen. Wir haben damit die positiven rationalen Zahlen in eine bestimmte Reihenfolge gebracht; sie sind durchnummeriert. Das Erstaunliche daran ist, dass die natürlichen Zahlen, die ja eine *echte* Teilmenge von $\mathbb{Q}^+$ bilden, ausreichen um *alle* Zahlen der Menge $\mathbb{Q}^+$ zu nummerieren. Man sagt dazu: »Die Mengen $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{N}$ sind von gleicher Mächtigkeit.« Eine Menge, welche dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ hat, nennt man **abzählbar**.* Damit kann man als Ergebnis des 1. Diagonalverfahrens festhalten:



um 1870

Georg Cantor

Abb. 26.1 Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR (3.3.1845 Petersburg bis 6.1.1918 Halle)

Satz 26.1: Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen ist abzählbar.

Nun betrachten wir alle positiven reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl $]0; +\infty[$ und führen folgendes Gedankenexperiment aus: Ein Papierstreifen von beliebiger Länge s wird in zwei Stücke der Länge $\frac{1}{2}s$ zerschnitten (Abbildung 27.1). Mit einer der Hälften verdecken wir den Punkt 1 auf dem Zahlenstrahl. 1 ist bei der von uns in Abbildung 25.1 eingeführten Nummerierung die erste rationale Zahl! Auch die übrigen rationalen Punkte** werden sodann in

* Das Fachwort **Mächtigkeit** hat CANTOR 1878 bei dem großen Geometer Jakob STEINER (1796–1863) entlehnt und auf seine heutige Bedeutung erweitert. Im gleichen Jahr verwendete er erstmals den Begriff **abzählbar** im oben angegebenen Sinn.

** Punkte der Zahlengeraden, denen eine rationale Zahl zugeordnet ist, nennen wir kurz »rationale Punkte«.

der durch die Nummerierung festgelegten Reihenfolge abgedeckt, indem man immer wieder folgende Anweisung ausführt: »Halbiere den verbliebenen Teil des Streifens und verdecke mit einer Hälfte denjenigen Punkt des Zahlenstrahls, welcher zu der nächsten rationalen Zahl gehört.«

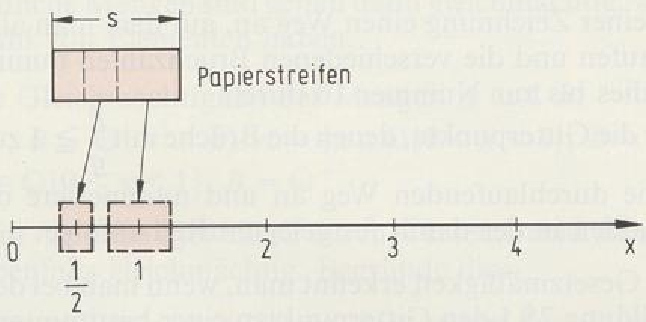


Abb. 27.1 Die rationalen Punkte werden verdeckt.

Natürlich werden durch das fortgesetzte Halbieren die Streifenstücke immer schmäler, aber zum Abdecken von Punkten, die ja die Breite null haben, reichen sie immer wieder aus. Wir können auf diese Weise alle rationalen Punkte des Zahlenstrahls (und nicht nur sie!) bedecken. Zu den nicht verdeckten Punkten des Zahlenstrahls gehören nur noch irrationale Zahlen. Da aber die abgedeckten Teile des Zahlenstrahls zusammen höchstens die Länge s haben und s zudem beliebig klein sein darf, bleibt fast der ganze Zahlenstrahl unbedeckt. Man erkennt daraus, dass die Menge der rationalen Zahlen im Vergleich zu derjenigen der irrationalen verschwindend klein ist! Durch die Einführung der irrationalen Zahlen hat sich also unser Zahlenvorrat ganz gewaltig vergrößert.
Ist dann vielleicht die Menge der reellen Zahlen nicht mehr abzählbar? Mit dieser Frage beschäftigte sich Georg CANTOR, und er richtete sie auch in dem oben erwähnten Brief vom 29.11.1873 an Richard DEDEKIND. Dieser wusste darauf keine Antwort, und CANTOR meinte am 2.12.1873, dass »sie kein besonderes praktisches Interesse [...] hat und [...] nicht zu viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte.« Und schon am 7.12.1873 schickt CANTOR seinen Beweis dafür, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, an DEDEKIND. Am 8.12.1873 gratuliert DEDEKIND und schickt eine stark vereinfachte Fassung des Beweises an CANTOR, der diese fast wörtlich in seine im Jahre 1874 erschienene Abhandlung übernimmt. In Aufgabe 29/**10** kannst du selbst einen Beweis führen für

Satz 27.1: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht mehr abzählbar.

Aufgaben

•**1. a)** Wo liegen in Abbildung 25.1 die Gitterpunkte, denen die positiven Bruchzahlen mit $\frac{p}{q} < 1$ zugeordnet sind?
Gib in einer Zeichnung einen Weg an, auf dem man alle diese Punkte durchlaufen und die verschiedenen Bruchzahlen nummerieren kann. Führe dies bis zur Nummer 10 durch.

b) Gib für die Gitterpunkte, denen die Brüche mit $\frac{p}{q} \geqq 1$ zugeordnet sind, einen sie durchlaufenden Weg an und nummeriere die ersten zehn Bruchzahlen in der damit festgelegten Reihenfolge.

2. a) Welche Gesetzmäßigkeit erkennt man, wenn man bei den Brüchen, die in Abbildung 25.1 den Gitterpunkten einer bestimmten Diagonallinie zugeordnet sind, die Summe aus Zähler und Nenner bildet?

b) Wie ändert sich diese Summe beim Übergang zur nächsten Diagonalen?

c) Wie ändert sich die Summe aus Zähler und Nenner, wenn ein Bruch gekürzt wird?

•**d)** Begründe nun, dass bei der in Abbildung 25.1 festgelegten Reihenfolge jedem kürzbaren Bruch einer mit gleichem Wert vorausgeht und somit die entsprechende rationale Zahl bereits nummeriert ist.

3. Zeichne ein Koordinatensystem und betrachte alle Gitterpunkte der oberen Halbebene, also die Punkte $(x|y)$ mit $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$, und ordne jedem Punkt die Zahl $\frac{x}{y}$ zu. Beweise die Abzählbarkeit aller rationalen Zahlen, indem du einen von $(0|1)$ ausgehenden Weg angibst, der alle Gitterpunkte durchläuft. Wie lauten die ersten zehn rationalen Zahlen bei der so erzeugten Anordnung?

4. Die folgenden Mengen sind abzählbar. Gib zum Beweis dafür eine entsprechende Zuordnung ihrer Elemente zu den natürlichen Zahlen, also eine Nummerierung an. Beschreibe diese Zuordnung als Funktion $n \mapsto f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) die Menge der geraden natürlichen Zahlen

b) die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen

c) die Menge $\mathbb{N}_0$ **d)** die Menge $\mathbb{Z}$

e) die Menge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

f)* die Menge der Quadratzahlen n^2, $n \in \mathbb{N}$

5. Zwei Mengen heißen genau dann **gleichmächtig**, wenn man ihre Elemente eineindeutig einander zuordnen kann.
Begründe folgende Aussagen:

* Dieses Beispiel findet sich bereits in den *Discorsi* (1638) des Galileo Galilei (1564–1642).

a) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 77 < n < 138\}$ sind gleichmächtige Zahlenmengen.

b) Die Menge P aller zweistelligen Primzahlen und die Menge V der durch 4 teilbaren zweistelligen Zahlen sind nicht gleichmächtig.

c) Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen haben.

6. Beweise die Gleichmächtigkeit der Mengen A und B:

a) $A = \mathbb{Q}^+$; $B = \mathbb{Q}^-$ **b)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$; $B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 1\}$

•**c)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$; $B = \mathbb{Q}^+$

7. Wenn man in Aufgabe **6** jeweils $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt, sind die neuen Mengen A und B ebenfalls gleichmächtig. Begründe dies.

8. Die von Bernard BOLZANO (1781–1848) in seinen *Paradoxien des Unendlichen* (1847) klar herausgestellte Tatsache, dass bei unendlichen Mengen eine echte Teilmenge dieselbe Mächtigkeit wie die ganze Menge haben kann, wird oft als eine **Paradoxie*** der Mengenlehre bezeichnet.
In welchen Teilaufgaben **a)** von Aufgabe **4**, **b)** von Aufgabe **6** finden sich solche Paradoxien?

9. a) Begründe mit Hilfe der in Abbildung 30.1 angegebenen Zuordnung $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$, dass die Strecken [AB] und [CD] gleichmächtige Punktmengen sind.

b) In Abbildung 30.2 ist M der Mittelpunkt der Strecke [AB], $\bar{\mathrm{A}}$ das Spiegelbild von A bezüglich g und Z der Mittelpunkt von $[\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}]$. Beweise mit Hilfe der Zuordnung $\mathrm{P}_i \mapsto \mathrm{P}_i'$, dass die Strecke [AB] ohne ihre Endpunkte und die Gerade g gleichmächtige Punktmengen sind.

10. Georg CANTOR (1845–1918) gelang 1873 der Nachweis, dass die Menge der reellen Zahlen **überabzählbar**, d.h. nicht mehr abzählbar ist. Einen Beweis dafür kannst du anhand der folgenden Teilaufgaben erbringen.

1839

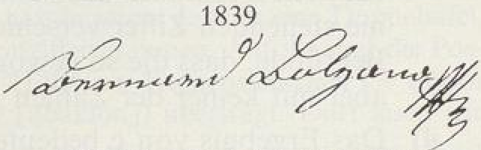


Abb. 29.1 Bernard BOLZANO
(5.10.1781 Prag–18.12.1848 ebd.)

* Die Paradoxie oder das Paradoxon = eine (echte oder scheinbare) Widersinnigkeit; paradox = widersinnig. Zugrunde liegt das griechische Adjektiv παράδοξος (parádoxos) = unerwartet.

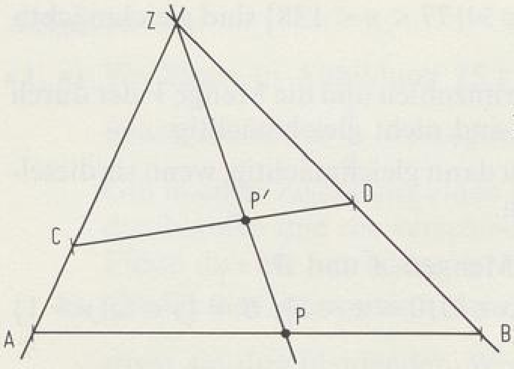


Abb. 30.1 Zu Aufgabe 9a

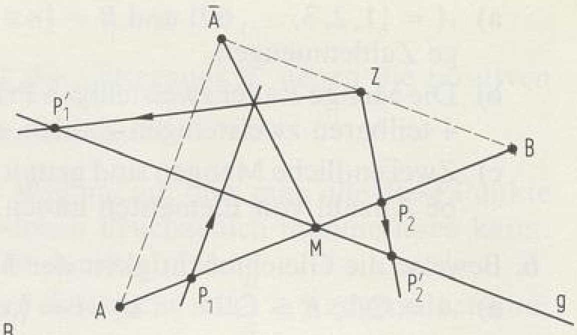


Abb. 30.2 Zu Aufgabe 9b

a) Wenn man von einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$ zeigen kann, dass sie überabzählbar ist, dann gilt das erst recht für $\mathbb{R}$ selbst. Erläutere dies. (Nimm z. B. an, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar!)

b) Die Zahlen der Menge $M := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ kann man in eindeutiger Weise als *unendliche* Dezimalzahlen darstellen, wenn man dabei Dezimalzahlen mit der Periode 0 verbietet. Wie lautet dann die Schreibweise für folgende Zahlen? (Beachte Aufgabe 17/**6.**)

0,5; 0,71; $\frac{3}{8}$; $\frac{17}{250}$.

c) Wir nehmen nun an, die Zahlenmenge M sei abzählbar. Dann kann man ihre Elemente durchnummerieren; sie sollen der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bezeichnet sein. Wir denken uns diese Zahlen als unendliche Dezimalzahlen untereinander geschrieben:

$x_1 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ ($a_i, b_i, c_i, \ldots$ bedeuten die einzelnen Ziffern der Dezimalzahldarstellung)
$x_2 = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$
$x_3 = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots$
usw.

Nun bilden wir eine unendliche Dezimalzahl $z = 0, z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots$ nach folgender Regel: Aus der Ziffernmenge $\{1, 2, \ldots, 8\}$ wählen wir
– für z_1 eine von a_1 verschiedene Ziffer,
– für z_2 eine von b_2 verschiedene Ziffer,
– für z_3 eine von c_3 verschiedene Ziffer usw.,
d. h., man wählt allgemein eine Ziffer z_i aus $\{1, 2, \ldots, 8\}$, welche von der i-ten Dezimalen der Zahl x_i, also von der auf der roten Diagonallinie stehenden Ziffer verschieden ist.*
Begründe, dass die so gewonnene Zahl z zwar zur Menge M gehört, aber mit keiner der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ übereinstimmt.

d) Das Ergebnis von **c** bedeutet, dass die Annahme, die Menge M sei abzählbar, falsch ist. Erläutere dies und folgere daraus auch die Nichtabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

* Man bezeichnet die Auswahlregel für die Ziffern z_i als **2.** oder **Cantor'sches Diagonalverfahren**. CANTOR hat es 1890 entwickelt.