Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

1.1 Das Problem der Quadratverdoppelung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

1 Die reellen Zahlen

1.1 Das Problem der Quadratverdoppelung

Der griechische Philosoph PLATON (428–348 v. Chr.) beschreibt in seinem vor 389 v. Chr. verfassten Dialog *Menon* (82b–85b) die Lehrmethode seines berühmten Lehrers SOKRATES (470–399 v. Chr.). Er schildert, wie SOKRATES einem mathematisch ungebildeten Sklaven seines Freundes MENON dazu verhilft, die folgende Aufgabe zu lösen:

> Zu einem gegebenen Quadrat soll ein zweites Quadrat gefunden werden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß ist.

Der Sklave schlägt zunächst vor jede Seite des gegebenen Quadrats (Abbildung 10.2) zu verdoppeln, erkennt dann aber, dass sich dabei der Flächeninhalt vervierfacht (Abbildung 10.3). Das gesuchte Quadrat darf nur halb so groß sein; man muss also die Fläche des großen Quadrates halbieren. Die Lösung, zu der SOKRATES den Sklaven anleitet, beruht darauf, dass von jedem der vier Teilquadrate die Hälfte weggenommen wird, indem man sie, wie Abbildung 10.4 zeigt, durch Diagonalen zerschneidet. ABCD ist dann das gesuchte Quadrat. Seine Seite ist die Diagonale des gegebenen Quadrats.

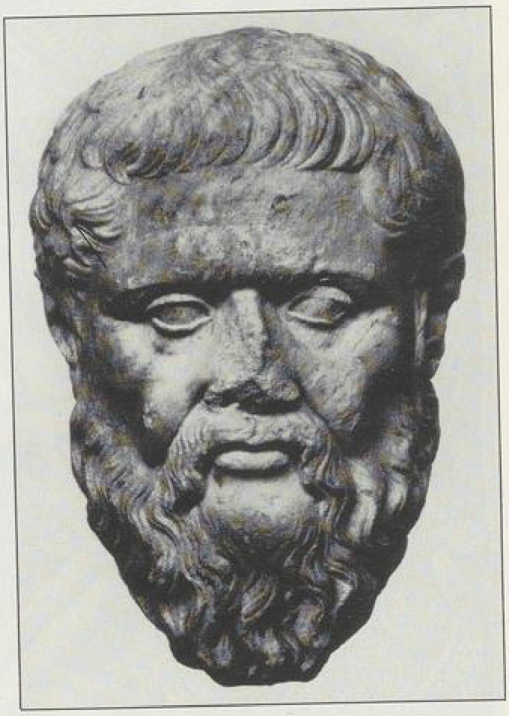

Abb. 10.1 PLATON, eigentlich ARISTOKLES (428 Athen oder Ägina – 348 Athen) Kaiserzeitliche römische Kopie nach dem Werk des SILANION, entstanden wohl bald nach 348 v. Chr. München, Glyptothek

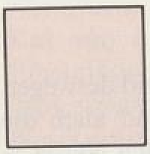

Abb. 10.2 gegebenes Quadrat

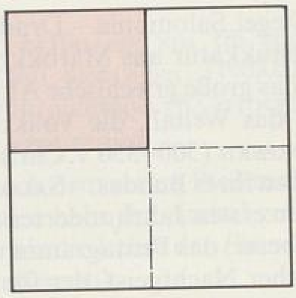

Abb. 10.3 Quadrat mit doppelter Seitenlänge

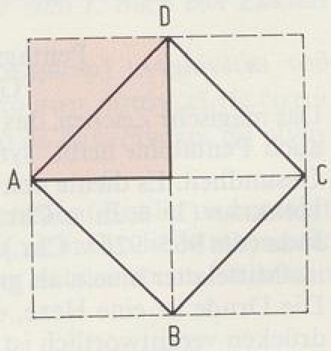

Abb. 10.4 Quadrat mit doppeltem Flächeninhalt

Uns interessiert die Frage, wie lang die Seite des Lösungsquadrats ist. Das hängt natürlich von der Größe des gegebenen Quadrats ab. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, dass es sich um das Einheitsquadrat handelt, also um das Quadrat mit der Seitenlänge 1 (d.h. 1 Längeneinheit). Sein Flächeninhalt ist damit ebenfalls 1 (d.h. 1 Flächeneinheit). Da somit das Lösungsquadrat ABCD den Flächeninhalt 2 besitzt, muss für seine Seitenlänge x gelten: $x \cdot x = 2$, kurz $x^2 = 2$.
Um die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats angeben zu können muss man also diese Gleichung lösen. Man erkennt leicht, dass x eine Zahl zwischen 1 und 2 sein muss, denn es ist $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$; also muss $1 < x < 2$ gelten. Eine genauere Eingrenzung von x erhält man, indem man die Quadrate von 1,1; 1,2; 1,3; ... berechnet; wegen $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$ gilt: $1{,}4 < x < 1{,}5$. Ebenso findet man mit Hilfe des Taschenrechners schnell die Ergebnisse

$$1{,}41 < x < 1{,}42$$
$$1{,}414 < x < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < x < 1{,}4143.$$

Können wir auf diesem Wege den genauen Wert von x finden?
Sicherlich nicht! Denn wenn man einen Dezimalbruch mit einer, zwei, drei, ... Stellen nach dem Komma quadriert, erhält man eine Zahl mit zwei, vier, sechs, ... Stellen nach dem Komma, also niemals eine ganze Zahl.* Die Gleichung $x^2 = 2$ kann somit keinen endlichen Dezimalbruch als Lösung haben.
Neben den ganzen Zahlen und den endlichen Dezimalbrüchen gehören zu der uns zur Verfügung stehenden Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auch Brüche, deren Dezimalentwicklung unendlich und periodisch ist. Das sind bekanntlich diejenigen Brüche, deren Nenner nach vollständigem Kürzen noch einen von 2 und 5 verschiedenen Primfaktor enthalten. Gibt es unter ihnen eine Lösung von $x^2 = 2$?
Angenommen, $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ wäre eine solche Lösung; dabei sei dieser Bruch vollständig gekürzt. Da x keine ganze Zahl ist, muss $q > 1$ gelten. Durch Quadrieren erhält man $x^2 = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$. Dieser Bruch kann aber keine ganze Zahl sein; denn, da p und q teilerfremd sind, lässt er sich nicht kürzen, und wegen $q > 1$ ist sein Nenner von 1 verschieden. Das heißt aber: **Es gibt keinen Bruch, dessen Quadrat den Wert 2 hat**.
Das Ergebnis unserer Überlegungen lautet somit: Die Gleichung $x^2 = 2$ ist mit rationalen Zahlen nicht lösbar. Wir sind mit den uns zur Verfügung stehenden Zahlen nicht in der Lage die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats anzugeben. Man erkennt leicht, dass es neben $x^2 = 2$ noch viele andere, ebenso einfache Gleichungen gibt, die in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar sind. Weitere Beispiele findest du in den folgenden Aufgaben.

* Wir setzen dabei voraus, dass die letzte Stelle der zu quadrierenden Zahl jeweils nicht 0 ist.

Aufgaben

1. Zeige: Die folgenden Gleichungen haben keine rationalen Lösungen.
   a) $x^2 = 3$ **b)** $x^2 = 6$ **c)** $x^2 = 8$ **d)** $x^2 = 500$
2. Die folgenden Gleichungen sind in $\mathbb{Q}$ lösbar. Gib alle Lösungen an.
   a) $x^2 = 1$ **b)** $x^2 = 4$ **c)** $x^2 = 121$ **d)** $x^2 = 625$
   e) $x^2 = \frac{9}{16}$ **f)** $x^2 = 2\frac{7}{9}$ **g)** $x^2 = 0{,}64$ **h)** $x^2 = 0{,}0004$

• **3.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = n, n \in \mathbb{N}$, ist genau dann in $\mathbb{Q}$ lösbar, wenn n eine Quadratzahl ist.

4. Der folgende auf den Begriff »gerade Zahl« sich stützende Beweis für die Unlösbarkeit der Gleichung $x^2 = 2$ in der Menge $\mathbb{Q}$ wurde bereits von ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) in seinen *Analytica priora* (I. 23. 41a. 23–27) angedeutet und ist als Anhang zu Buch X der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.) überliefert.

> Angenommen, der vollständig gekürzte Bruch $\frac{p}{q}$ sei eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Dann gilt
>
> $$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad \| \cdot q^2$$
> $$p^2 = 2q^2$$
>
> Daher ist p^2 und somit auch p eine gerade Zahl. Man kann deshalb $p = 2n$ setzen, mit $n \in \mathbb{N}$.
>
> $$(2n)^2 = 2q^2 \qquad \| : 2$$
> $$2n^2 = q^2$$
>
> Also ist auch q^2 und damit q eine gerade Zahl.

Begründe die angewandten Schlüsse. Erkläre, wieso die Annahme zu einem Widerspruch geführt hat und somit falsch ist.

• **5.** Der Beweis von Aufgabe **4**, bei dem die Teilbarkeit durch den Primfaktor 2 die entscheidende Rolle spielt, lässt sich auch auf andere Primfaktoren übertragen. Zeige nach dieser Methode, dass auch die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Q}$ unlösbar sind: **a)** $x^2 = 7$ **b)** $x^2 = 12$ **c)** $x^2 = 15$

6. Die Gleichung $x^2 = \frac{2}{3}$ hat keine rationale Lösung. Das kann man so beweisen: Aus $x^2 = \frac{2}{3}$ erhält man $(3x)^2 = 2 \cdot 3$ (Multiplikation mit 3^2). Mit der Substitution $z = 3x$ wird daraus $z^2 = 6$, eine in $\mathbb{Q}$ unlösbare Gleichung (vgl. Aufgabe **1b**).
   Begründe mit dieser Methode die Unlösbarkeit der Gleichungen
   a) $x^2 = \frac{1}{6}$, **b)** $x^2 = 2\frac{2}{7}$, **c)** $x^2 = 0{,}2$, **d)** $x^2 = 1{,}25$
   in der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

•• **7.** Beweise: Die Gleichung $x^2 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, ist in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar, wenn $p \cdot q$ eine Quadratzahl ist. (Hinweis: Beachte die Aufgaben **6** und **3**.)

8. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a, $a \in \mathbb{Q}^+$.

a) Bestimme die Seitenlänge eines Quadrats, dessen Flächeninhalt **1)** 4-mal, **2)** 49-mal, **3)** 2,25-mal, **4)** $\frac{25}{36}$-mal so groß ist.

b) Gibt es eine rationale Zahl, welche die Seitenlänge eines Quadrats mit dem **1)** 5fachen, **2)** 16fachen, **3)** 1,6fachen Flächeninhalt angibt?

9. Kannst du mit Hilfe rationaler Zahlen angeben, wie lang die Seiten folgender Figur sind?

a) Quadrat mit **1)** $15\,\mathrm{m}^2$, **2)** $16\,\mathrm{cm}^2$, **3)** $2{,}3\,\mathrm{dm}^2$ Flächeninhalt

b) Rechteck mit dem Seitenverhältnis $2:3$ und **1)** $36\,\mathrm{cm}^2$, **2)** $324\,\mathrm{mm}^2$, **3)** $0{,}24\,\mathrm{m}^2$ Flächeninhalt

10. Dem Problem der Quadratverdoppelung entspricht bei den Körpern das der Würfelverdoppelung:

Zu einem gegebenen Würfel soll ein zweiter Würfel gefunden werden, dessen Rauminhalt doppelt so groß ist.

Diese Aufgabe wird als **delisches Problem** bezeichnet aufgrund einer Erzählung des ERATOSTHENES (3. Jh. v. Chr.):
Als auf der Insel Delos die Pest wütete, wandten sich die Bewohner Hilfe suchend an Apollo. Sie erhielten den Auftrag, den würfelförmigen Altar in seinem Heiligtum zu verdoppeln, aber dabei die Gestalt zu bewahren.

a) Zeige, dass die Kantenlänge x eines Würfels, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das des Einheitswürfels, die Gleichung $x^3 = 2$ erfüllen muss.

•**b)** Begründe nach der bei $x^2 = 2$ angewandten Methode, dass auch die Gleichung $x^3 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar ist.

•**11.** Die Tatsache, dass es Streckenpaare gibt, deren Verhältnis sich nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken lässt, wurde zuerst von den Griechen erkannt. Die PYTHAGOREER, deren Bundeszeichen das regelmäßige Fünfeck war (vgl. Abbildung 9.1), entdeckten gerade an diesem Fünfeck, dass – ebenso wie beim Quadrat – Seite und Diagonale kein rationales Verhältnis haben.

Aus der Ähnlichkeit der Fünfecke ABCDE und A′B′C′D′E′ in Abbildung 13.1 folgt, dass das Verhältnis von Seite und Diagonale in beiden Fällen gleich ist.

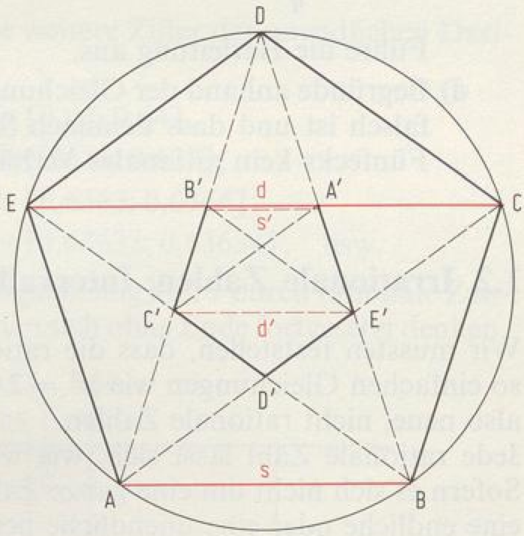

Abb. 13.1 Das regelmäßige Fünfeck

Es gilt also

$$\frac{d}{s} = \frac{d'}{s'}. \tag{1}$$

a) Weise nach, dass sich d' und s' folgendermaßen durch d und s ausdrücken lassen:

$$d' = d - s \quad \text{und} \quad s' = 2s - d \tag{2}$$

(Hinweis: Welche besondere Eigenschaft haben die Vierecke ABCB′, ABA′E, C′E′CA′ und C′E′B′E?)
Begründe sodann die Abschätzung

$$s < d < 2s. \tag{3}$$

b) Zeige mit Hilfe von (2), dass die Gleichung (1) durch die Substitution $x := \frac{d}{s}$ folgende Form erhält:

$$x = \frac{x-1}{2-x} \tag{4}$$

Welche Abschätzung für x ergibt sich aus (3)?

c) Aus der Annahme, ein Bruch $\frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q sei Lösung der Gleichung (4), lässt sich folgende Gleichung herleiten:

$$p + q = \frac{p^2}{q} \tag{5}$$

Führe die Herleitung aus.

d) Begründe anhand der Gleichung (5), dass die in **c** gemachte Annahme falsch ist und dass demnach Seite und Diagonale des regelmäßigen Fünfecks kein rationales Verhältnis haben.

1.2 Irrationale Zahlen; Intervallschachtelungen

Wir mussten feststellen, dass die rationalen Zahlen schon zum Lösen von so einfachen Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht ausreichen. Dazu benötigen wir also neue, nicht rationale Zahlen.
Jede rationale Zahl lässt sich, wie wir wissen, als Dezimalzahl schreiben. Sofern es sich nicht um eine ganze Zahl handelt, erhält man dabei entweder eine endliche oder eine unendliche periodische Dezimalzahl.

Beispiele:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$; $\quad \frac{29}{22} = 1{,}3\overline{18}$; $\quad 3\frac{7}{100} = 3{,}07$