Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

1.3 Rechnen mit Intervallschachtelungen

den. Manchmal werden auch andere Unterteilungsverfahren benützt.

a) Beschreibe die Regel, nach der die Intervallfolge $[0;1]$, $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$, $[\frac{4}{9};\frac{5}{9}]$, $[\frac{13}{27};\frac{14}{27}]$, $[\frac{40}{81};\frac{41}{81}]$, ... konstruiert ist. Stelle die ersten vier Intervalle auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 9 cm dar.

b) Begründe, dass die in **a** angegebene Intervallfolge eine Intervallschachtelung ist. Welche Zahl wird durch sie festgelegt?

c) Vom »Halbierungsverfahren« spricht man, wenn das jeweils nächste Intervall eine der Hälften des vorausgehenden ist. Berechne die ersten fünf Intervalle einer Intervallschachtelung für die Zahl $\frac{2}{3}$, indem du mit $[0;1]$ beginnst und die weiteren Intervalle nach dem Halbierungsverfahren bestimmst.

8. Gib Intervalle der Länge 1; 0,1; 0,01 und 0,001 an, in denen eine positive Lösung der Gleichung

a) $x^2 = 3$, **b)** $x^2 = 0{,}5$, **c)** $x^2 = 200$, **d)** $x^2 = \frac{4}{11}$

liegen müßte.

•9. Bestimme Intervalle mit den Längen 1; 0,1; 0,01 und 0,001, in denen die Kantenlänge eines Würfels liegen müsste, dessen Volumen n-mal so groß wie das des Einheitswürfels ist.

a) $n = 2$ **b)** $n = 10$ **c)** $n = 100$

**1.3. Rechnen mit Intervallschachtelungen

Wir haben schon erwähnt, dass man auch mit den irrationalen Zahlen sinnvoll rechnen kann. Das ist keineswegs selbstverständlich. Schon bei der Frage, wie mit ihnen die verschiedenen Rechenarten auszuführen sind, stößt man auf Schwierigkeiten. Da es sich um unendliche Dezimalzahlen handelt, kann man ja z. B. beim Addieren nicht wie bei endlichen Dezimalzahlen mit der letzten Stelle beginnen. Bei den periodischen Dezimalzahlen umgeht man dieses Problem, indem man sie durch die entsprechenden gewöhnlichen Brüche ersetzt, z. B. $0{,}\overline{6}$ durch $\frac{2}{3}$. Bei den unendlichen nicht periodischen Dezimalzahlen scheidet diese Möglichkeit aus. Für das Rechnen mit ihnen benötigen wir andere Hilfsmittel. Als solche eignen sich z. B. die Intervallschachtelungen. Mit ihnen kann man die Rechenoperationen auch für irrationale Zahlen definieren und die weitere Gültigkeit der Rechengesetze nachweisen. Dies soll für die Addition näher erläutert werden. Zunächst betrachten wir ein Beispiel mit zwei rationalen Summanden.

Beispiel 1:

$a = \frac{2}{3}$; $b = 2{,}3 \Rightarrow a + b = \frac{2}{3} + 2{,}3 = \frac{2}{3} + 2\frac{3}{10} = 2\frac{29}{30}$

Intervallschachtelungen für a und b haben wir bereits im vorausgehenden Abschnitt angegeben (vgl. Seite 16). Aus deren ersten Intervallen erkennt man, dass $0 \leqq a \leqq 1$ und $2 \leqq b \leqq 3$ gilt. Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man

$2 \leqq a + b \leqq 4$ d.h., $a + b \in [2;4]$.

Analog erhält man aus den zweiten, dritten, vierten, … Intervallen

$$0{,}6 + 2{,}3 \leqq a + b \leqq 0{,}7 + 2{,}4 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}9; 3{,}1]$$
$$0{,}66 + 2{,}30 \leqq a + b \leqq 0{,}67 + 2{,}31 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}96; 2{,}98]$$
$$0{,}666 + 2{,}300 \leqq a + b \leqq 0{,}667 + 2{,}301 \quad \text{d.h.} \quad a + b \in [2{,}966; 2{,}968] \text{ usw.}$$

Man erkennt leicht, dass die rechts stehenden Intervalle für $a + b$ wieder eine Intervallschachtelung bilden. Durch sie ist die Zahl $a + b$ eindeutig festgelegt. Aus der Dezimalentwicklung von $a + b = 2\frac{20}{30} = 2{,}9\overline{6}$ erkennt man ebenfalls, dass $a + b$ jedem Intervall dieser Schachtelung angehört.

Das vorausgehende Beispiel zeigt, wie man aus Intervallschachtelungen für zwei Zahlen a und b durch Addition entsprechender Intervallgrenzen wieder eine Intervallschachtelung für die Summe $a + b$ erhält. Der Vorteil dieser an sich umständlichen Additionsmethode liegt darin, dass man sie auch auf irrationale Summanden anwenden kann.

Beispiel 2:

$z_1 = 0{,}636336333\ldots; \quad z_2 = 5{,}181188111888\ldots$

Intervallschachtelung für z_1:

$[0; 1], [0{,}6; 0{,}7], [0{,}63; 0{,}64], [0{,}636; 0{,}637], [0{,}6363; 0{,}6364], \ldots$

Intervallschachtelung für z_2:

$[5; 6], [5{,}1; 5{,}2], [5{,}18; 5{,}19], [5{,}181; 5{,}182], [5{,}1811; 5{,}1812], \ldots$

Durch Addieren entsprechender Intervallgrenzen erhält man die Intervallfolge

$[5; 7], [5{,}7; 5{,}9], [5{,}81; 5{,}83], [5{,}817; 5{,}819], [5{,}8174; 5{,}8176], \ldots$

Dies ist wieder eine Intervallschachtelung, durch welche die Summe $z_1 + z_2$ bestimmt ist. Ihre Dezimalentwicklung beginnt mit 5,817; man kann durch fortgesetzte Intervalladdition beliebig viele weitere Dezimalen berechnen.

Allgemein gilt: Zwei Zahlen a und b kann man addieren, indem man für sie Intervallschachtelungen $[a_1; A_1]$, $[a_2; A_2]$, $[a_3; A_3], \ldots$ bzw. $[b_1; B_1]$, $[b_2; B_2]$, $[b_3; B_3], \ldots$ aufstellt und aus den Intervallpaaren $[a_n; A_n]$, $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, die Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ berechnet. Diese bilden wieder eine Intervallschachtelung, wie du anhand der Aufgabe 20/**6** begründen kannst.
Da aus den Ungleichungen $a_n \leqq a \leqq A_n$ und $b_n \leqq b \leqq B_n$ die Doppelungleichung $a_n + b_n \leqq a + b \leqq A_n + B_n$ folgt, liegt die Summe $a + b$ in jedem der Intervalle $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ und ist damit durch diese Intervallschachtelung eindeutig bestimmt.
Da die bei Vertauschung der Summanden a und b erhaltenen Intervalle $[b_n + a_n; B_n + A_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dieselbe Intervallschachtelung liefern, gilt $a + b = b + a$, d.h. das Kommutativgesetz der Addition für beliebige, also auch für irrationale Zahlen. Ebenso kann man zeigen, dass auch die übrigen Rechengesetze der Addition gültig bleiben.

Auch die Multiplikation von rationalen und irrationalen Zahlen kann man mit Hilfe von Intervallschachtelungen durchführen. Es zeigt sich, dass auch für sie die bekannten Rechengesetze gültig bleiben (vgl. die Aufgaben 20/7 bis 21/**10**).

Aufgaben

1. Gib für a und b Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a+b$. Gib die Dezimalentwicklung von $a+b$ an, soweit sie durch die berechneten Intervalle gesichert ist.

a) $a = 0{,}373373337\ldots$ und $b = \frac{7}{11}$

b) $a = 2{,}0408016\ldots$ und $b = 1{,}505505550\ldots$

c) $a = 2{,}\overline{039}$ und $b = -1{,}808008000\ldots$

d) $a = -0{,}771771177111\ldots$ und $b = -3{,}141144111444\ldots$

2. Die Subtraktion zweier Zahlen lässt sich nach der Regel $a - b = a + (-b)$ auf die Addition zurückführen. Berechne so die ersten fünf Intervalle einer Schachtelung für $a - b$ mit den Zahlen

a) von Aufgabe **1a**, **b)** von Aufgabe **1d**.

3. a) Berechne die Summe der Irrationalzahlen $z_1 = 0{,}151151115\ldots$ und $z_2 = 2{,}626626662\ldots$ Ist das Ergebnis wieder eine irrationale Zahl?

b) Gib zwei irrationale Zahlen an, deren Summe null ist.

4. a) Welche Zahl muss man zu $0{,}585585558\ldots$ addieren um 1 zu erhalten? Ist die gesuchte Zahl rational oder irrational?

b) Welche Zahl muss man von $0{,}585585558\ldots$ subtrahieren um $0{,}252252225\ldots$ zu erhalten? Handelt es sich wieder um eine irrationale Zahl?

•**5.** Beweise, dass die Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl stets irrational ist. (Hinweis: Welche Folgerung für b ergibt sich aus $a + b = c$, wenn man annimmt, dass a und c rational sind?)

:**6.** $[a_n; A_n]$ bzw. $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, seien Intervallschachtelungen.

a) Beweise, dass für jede natürliche Zahl n gilt: Das Intervall $[a_{n+1} + b_{n+1}; A_{n+1} + B_{n+1}]$ liegt ganz in $[a_n + b_n; A_n + B_n]$.

b) Zeige, dass die Länge des Intervalls $[a_n + b_n; A_n + B_n]$ die Summe der Längen von $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$ ist.

Begründe damit, dass die Längen der Intervalle $[a_n + b_n; a_n + B_n]$ mit wachsendem n beliebig klein werden.

7. a) Berechne mit den auf Seite 16 angegebenen Intervallschachtelungen für $a = \frac{2}{3}$ und $b = 2{,}3$ die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ für $n = 1$ bis $n = 4$. Prüfe, ob sie ineinander geschachtelt sind und ob die Zahl $a \cdot b$ in jedem dieser Intervalle liegt.

b) Berechne die Längen der in **a** bestimmten Intervalle.

c) Sprechen die Ergebnisse von **a** und **b** dafür, dass die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ eine Intervallschachtelung für $a \cdot b$ bilden?

8. a) Stelle für die beiden Irrationalzahlen $a = 1{,}505505550\ldots$ und $b = 0{,}20406080\ldots$ Intervallschachtelungen auf und berechne die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ bis $n = 4$.

b) Zeige, dass diese Intervalle ineinander geschachtelt sind, und berechne ihre Längen.

9. Wenn $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Intervallschachtelungen mit *positiven* Intervallgrenzen sind, dann bilden die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ wieder eine Intervallschachtelung. Der nicht ganz einfache Beweis dafür beruht auf den folgenden Schlüssen. Erläutere sie!

a) Aus $a_n < A_n$ und $b_n < B_n$ folgt $a_n b_n < A_n B_n$; also ist $[a_n b_n; A_n B_n]$ ein Intervall.

b) Aus $a_n \leqq a_{n+1}$ und $b_n \leqq b_{n+1}$ folgt $a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1}$, aus $A_n \geqq A_{n+1}$ und $B_n \geqq B_{n+1}$ folgt $A_n B_n \geqq A_{n+1} B_{n+1}$.
Daher gilt: $[a_{n+1} b_{n+1}; A_{n+1} B_{n+1}] \subset [a_n b_n; A_n B_n]$.

c) Für die Länge des Intervalls $[a_n b_n; A_n B_n]$ gilt:
$$A_n B_n - a_n b_n = A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$$
Da mit wachsendem n die Werte der geklammerten Terme beliebig klein werden, gilt dies auch für die Intervallänge.

10. Welche einfachere Form ergibt sich für die Abschätzung in Aufgabe **9c**, wenn die beiden Intervallschachtelungen nach der Zehnteilungsmethode konstruiert sind und die ersten Intervalle die Länge 1 haben?

• **11. a)** Gib für $a = -\frac{4}{3}$ und $b = -3{,}6$ Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten vier Intervalle für das Produkt $a \cdot b$.

b) Erkläre, warum bei Intervallschachtelungen mit *negativen* Intervallgrenzen die Intervalle der Produktschachtelung die Form $[A_n \cdot B_n; a_n \cdot b_n]$ haben.

1.4 Die Menge der reellen Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen werden unter dem gemeinsamen Namen **reelle Zahlen*** zusammengefasst.

* Das Fachwort **reell** geht auf René Descartes (1596–1650) zurück. Er unterteilte 1637 in seiner *La Géométrie* die Lösungen von nicht linearen Gleichungen (wie z.B. $ax^2 + bx + c = 0$) in wirkliche und nur denkbare. Das französische Wort für wirklich ist *réel*, das auf ein erst im Mittelalter auftauchendes lateinisches *realis* zurückgeht, das zu *res = Sache* gebildet worden war. Mit *realis* wird Descartes' *réel* 1649 in der lateinischen Übersetzung seiner *La Géométrie* wiedergegeben. Wann aus *realis* das deutsche Fachwort *reell* entstand, konnten wir nicht feststellen. Nach 1831 ist es auf alle Fälle bei Carl Friedrich Gauss (1777–1855) belegt.