UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

1.4 Die Menge der reellen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Visual Library

b) Berechne die Längen der in **a** bestimmten Intervalle.

c) Sprechen die Ergebnisse von **a** und **b** dafür, dass die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ eine Intervallschachtelung für $a \cdot b$ bilden?

8. a) Stelle für die beiden Irrationalzahlen $a = 1{,}505505550\ldots$ und $b = 0{,}20406080\ldots$ Intervallschachtelungen auf und berechne die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ bis $n = 4$.

b) Zeige, dass diese Intervalle ineinander geschachtelt sind, und berechne ihre Längen.

9. Wenn $[a_n; A_n]$ und $[b_n; B_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, Intervallschachtelungen mit *positiven* Intervallgrenzen sind, dann bilden die Intervalle $[a_n \cdot b_n; A_n \cdot B_n]$ wieder eine Intervallschachtelung. Der nicht ganz einfache Beweis dafür beruht auf den folgenden Schlüssen. Erläutere sie!

a) Aus $a_n < A_n$ und $b_n < B_n$ folgt $a_n b_n < A_n B_n$; also ist $[a_n b_n; A_n B_n]$ ein Intervall.

b) Aus $a_n \leqq a_{n+1}$ und $b_n \leqq b_{n+1}$ folgt $a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1}$, aus $A_n \geqq A_{n+1}$ und $B_n \geqq B_{n+1}$ folgt $A_n B_n \geqq A_{n+1} B_{n+1}$.
Daher gilt: $[a_{n+1} b_{n+1}; A_{n+1} B_{n+1}] \subset [a_n b_n; A_n B_n]$.

c) Für die Länge des Intervalls $[a_n b_n; A_n B_n]$ gilt:
$A_n B_n - a_n b_n = A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$
Da mit wachsendem n die Werte der geklammerten Terme beliebig klein werden, gilt dies auch für die Intervallänge.

10. Welche einfachere Form ergibt sich für die Abschätzung in Aufgabe **9c**, wenn die beiden Intervallschachtelungen nach der Zehnteilungsmethode konstruiert sind und die ersten Intervalle die Länge 1 haben?

• **11. a)** Gib für $a = -\frac{4}{3}$ und $b = -3{,}6$ Intervallschachtelungen an und berechne daraus die ersten vier Intervalle für das Produkt $a \cdot b$.

b) Erkläre, warum bei Intervallschachtelungen mit *negativen* Intervallgrenzen die Intervalle der Produktschachtelung die Form $[A_n \cdot B_n; a_n \cdot b_n]$ haben.

1.4 Die Menge der reellen Zahlen

Die rationalen und die irrationalen Zahlen werden unter dem gemeinsamen Namen **reelle Zahlen*** zusammengefasst.

* Das Fachwort **reell** geht auf René DESCARTES (1596–1650) zurück. Er unterteilte 1637 in seiner *La Géométrie* die Lösungen von nicht linearen Gleichungen (wie z. B. $ax^2 + bx + c = 0$) in wirkliche und nur denkbare. Das französische Wort für wirklich ist *réel*, das auf ein erst im Mittelalter auftauchendes lateinisches *realis* zurückgeht, das zu *res* = *Sache* gebildet worden war. Mit *realis* wird DESCARTES' *réel* 1649 in der lateinischen Übersetzung seiner *La Géométrie* wiedergegeben. Wann aus *realis* das deutsche Fachwort *reell* entstand, konnten wir nicht feststellen. Nach 1831 ist es auf alle Fälle bei Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) belegt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man verwendet folgende Bezeichnungen:

Definition 22.1:
$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ = Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$ = Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = Menge der nicht negativen reellen Zahlen

Für das Rechnen mit den reellen Zahlen gelten die schon bekannten Rechengesetze, die wir in der folgenden Tabelle noch einmal zusammenstellen.

Für reelle Zahlen *a*, *b*, *c* gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a+b \in \mathbb{R}$	$(E_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{R}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a+b=b+a$	$(K_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a+b)+c = a+(b+c)$	$(A_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a+0=a$	$(N_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a+(-a)=0$	$(I_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		**Distributivgesetz**
$a<b \Rightarrow a+c<b+c$	$\left.\begin{matrix} a<b \\ c>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix} a<b \\ c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**

Jede reelle Zahl x lässt sich durch eine Intervallschachtelung darstellen. Da deren Intervalle beliebig klein werden, ziehen sie sich auf der Zahlengeraden auf einen Punkt zusammen, den wir ebenfalls mit x bezeichnen. Jeder reellen Zahl ist somit eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es stellt sich nun die Frage:
Gehört umgekehrt auch zu jedem Punkt der Zahlengeraden eine Zahl?
Solange man nur die rationalen Zahlen zur Verfügung hatte, musste man diese Frage verneinen! Zum Beispiel zeigt Abbildung 23.1 die Konstruktion eines Punktes P der Zahlengeraden, zu dem keine rationale Zahl gehört.

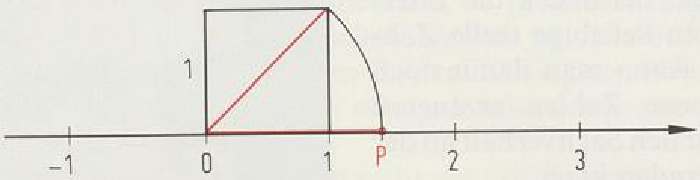


Abb. 23.1 Konstruktion eines »nicht rationalen Punktes«

Nach der Einführung der irrationalen Zahlen muss aber die oben gestellte Frage anders beantwortet werden: Zu jedem Punkt P der Zahlengeraden gehört eine reelle Zahl.

Dies kann man so begründen:
Wir betrachten zunächst die den ganzen Zahlen zugeordneten Punkte. Es kann sein, dass P einer von ihnen ist; dann gehört zu P eine ganze Zahl. Andernfalls liegt P zwischen zwei derartigen Punkten; wir bezeichnen sie mit n und $n+1$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir zerlegen nun $[n; n+1]$ in zehn gleiche Teile. Falls P einer der Teilpunkte ist, gehört zu ihm eine Zahl $n + \frac{k}{10}$ mit $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Andernfalls liegt P zwischen zwei Teilpunkten. Das von diesen begrenzte Intervall zerlegen wir wieder in zehn gleiche Teile usw.
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
Entweder: P fällt irgendwann mit einem Teilungspunkt zusammen; dann gehört zu ihm eine Zahl mit einer endlichen Dezimaldarstellung.
Oder: P wird niemals ein Teilungspunkt; dann erhält man eine Intervallschachtelung, die sich auf den Punkt P zusammenzieht. Zu ihr, und damit zu P, gehört eine Zahl mit einer unendlichen Dezimalentwicklung.

Somit gilt

Satz 23.1: Jeder reellen Zahl ist eindeutig ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet und umgekehrt ist jedem Punkt der Zahlengeraden eindeutig eine reelle Zahl zugeordnet.

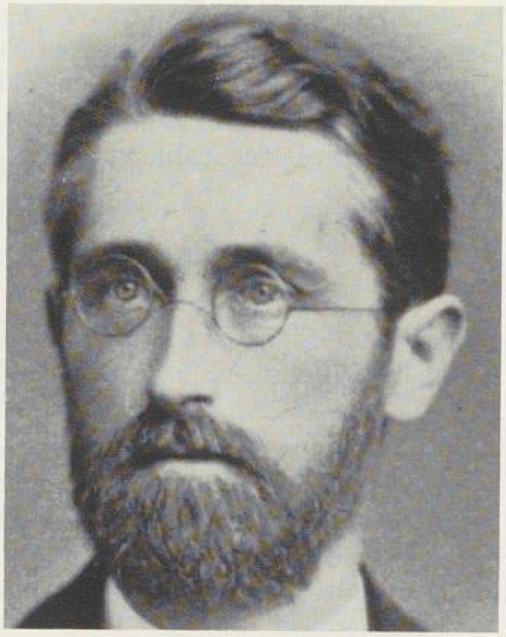
Aufgaben

Kennzeichne auf der Zahlengeraden die Zahlenmenge

1. **a)** $\mathbb{R}^+$, **b)** $\mathbb{R}^-$, **c)** $\mathbb{R}_0^+$.

Beschreibe die folgenden Zahlenmengen möglichst einfach:

2. **a)** $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ **d)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



1868

Abb. 24.1
Julius Wilhelm Richard DEDEKIND
(6.10.1831 Braunschweig–12.2.1916 ebd.)

3. Bei den bisher betrachteten Intervallschachtelungen haben wir jeweils rationale Zahlen als Intervallgrenzen benützt. Man kann nun auch Intervallschachtelungen bilden, bei denen die Intervallgrenzen beliebige reelle Zahlen sind. Kann man damit noch einmal neue Zahlen erzeugen? Mache dir den Sachverhalt an der Zahlengeraden klar.

4. Begründe die folgenden Aussagen durch Widerspruchsbeweise:

a) Das Produkt einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl mit einer irrationalen Zahl ist irrational.

b) Der Kehrwert einer irrationalen Zahl ist irrational.

5. a) Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den irrationalen Zahlen $a = 0{,}414114111\ldots$ und $b = 0{,}414414441\ldots$ liegt.

b) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer rationale Zahlen angeben, die dazwischen liegen. Begründe diese Aussage.

• **6. a)** Gib eine irrationale Zahl an, die
1) zwischen 1,5 und 1,6 **2)** zwischen $\frac{25}{33}$ und $\frac{26}{33}$ liegt.

b) Gib eine irrationale Zahl an, die zwischen den Zahlen von Aufgabe **5 a** liegt.

c) Zu zwei verschiedenen reellen Zahlen kann man immer eine irrationale Zahl angeben, die dazwischen liegt. Begründung!

7. Wenn bei einer Zahlenmenge M für die Addition und die Multiplikation die Rechengesetze E, K, A, N, I und D gelten, spricht man von einem **Zahlenkörper** $(M; +, \cdot)$.*

a) Du kennst nunmehr zwei verschiedene Zahlenkörper. Welche sind dies?

b) Für die Menge der irrationalen Zahlen gilt:
$(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; +, \cdot)$ ist kein Zahlenkörper. Welche Rechengesetze sind in diesem Fall nicht gültig?

* Den Begriff **Körper** prägte 1871 Richard DEDEKIND (1831–1916); seine Verwendung im heutigen Sinn (seit 1893) geht auf Heinrich WEBER (1842–1913) zurück.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN