Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

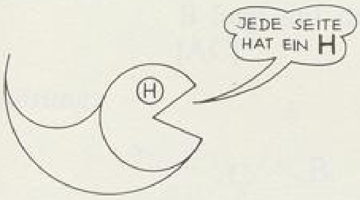
urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

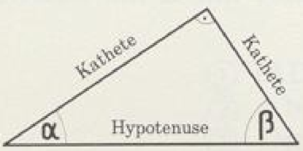
25. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt. Konstruiere durch P eine Gerade e, die mit g und h ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.

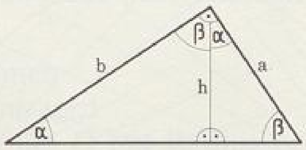
:26. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck so in ein Quadrat, dass eine Ecke mit einer Quadratecke zusammenfällt und die beiden anderen Ecken auf Quadratseiten liegen.

5.3 Rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

Ein Dreieck mit einem 90°-Winkel heißt rechtwinkliges Dreieck. Die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten, die Gegenseite des rechten Winkels ist die Hypotenuse. Wegen $\alpha + \beta + 90° = 180°$ sind α und β Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$.

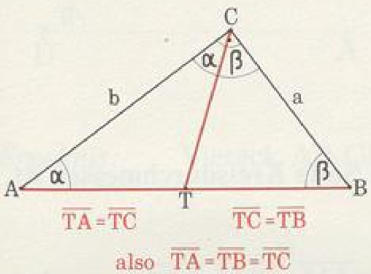






Komplementwinkel: $\alpha + \beta = 90°$

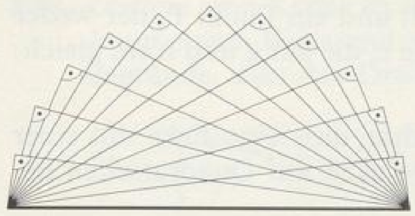
Die Katheten sind zugleich Höhen. Die dritte Höhe hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Sie zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke, deren Winkel mit denen des großen Dreiecks übereinstimmen. Diese Höhe zerlegt also den rechten Winkel so in α und β, dass β an b anliegt.
Zerlegt man den rechten Winkel so in α und β, dass nun β an a anliegt, so entsteht eine besondere Linie im Dreieck: die Seitenhalbierende s_c.



Begründung: Wegen der beiden gleich großen Winkel ist das Dreieck ATC gleichschenklig: $\overline{TA} = \overline{TC}$, ebenso gilt: $\overline{TC} = \overline{TB}$. Daraus folgt: $\overline{TA} = \overline{TB}$, also halbiert T die Hypotenuse und [CT] ist die Seitenhalbierende.

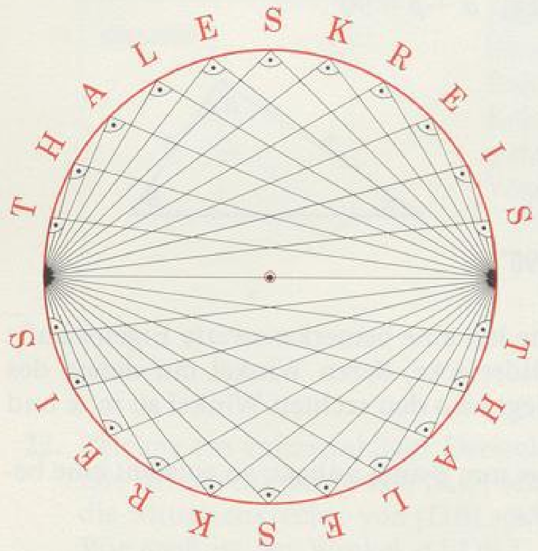
Thaleskreis

Zeichnet man über einer festen Hypotenuse mehrere rechtwinklige Dreiecke, dann schaut es so aus, als ob die Scheitel der rechten Winkel auf einem Kreis lägen. Schon vor etwa zweieinhalbtausend Jahren hat der griechische Philosoph und Mathematiker Thales von Milet tatsächlich folgenden Satz aufgestellt:



Satz:
Die freien Ecken aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse liegen auf einem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

Begründung: Oben haben wir gezeigt, dass A, B und C von T gleich weit entfernt sind; folglich liegt C auf dem Kreis um T mit [AB] als Durchmesser.

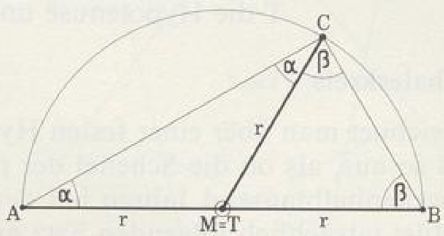


Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

Satz:
Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

Begründung: Weil A, B und C auf dem Kreis um M liegen, ist $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$; deshalb sind die beiden Dreiecke AMC und CMB gleichschenklig, der Winkel $\sphericalangle ACB$ setzt sich also aus den Basiswinkeln α und β zusammen. Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC gilt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + (\beta + \alpha) &= 180° \\ (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) &= 180° \\ 2(\alpha + \beta) &= 180° \\ \alpha + \beta &= 90°. \end{aligned}$$

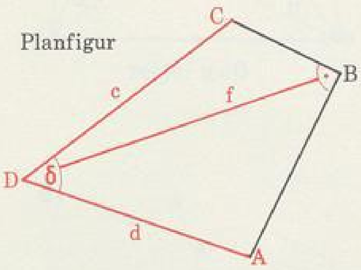


THALES (≈650 bis ÷560) zu Ehren heißt dieser Kreis **Thaleskreis.**

Wir führen zwei Aufgaben vor, in denen man den Thaleskreis braucht: In der einen wird konstruiert, in der anderen wird begründet.

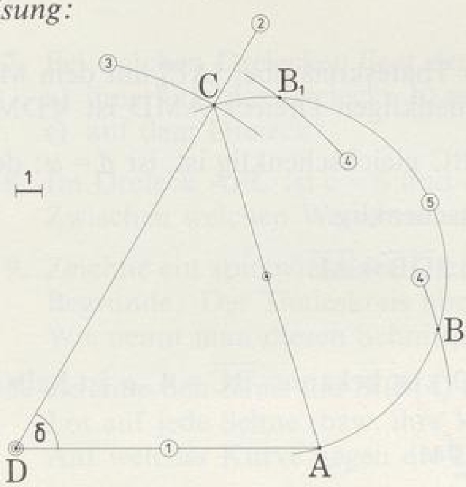
1. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
   $c = 15$, $d = 11{,}5$, $f = \overline{DB} = 16{,}6$, $\delta = 60°$, $\beta = 90°$

Planfigur



Lösungsidee: Zuerst Konstruktion des Dreiecks ACD.
B liegt auf dem Kreis um D mit Radius f und auf dem Thaleskreis über [AC].

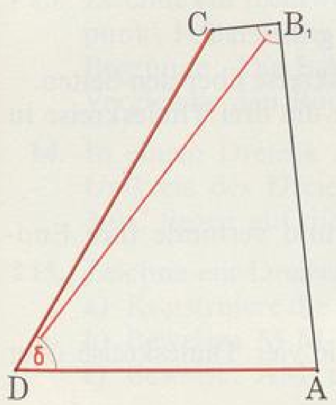
Lösung:

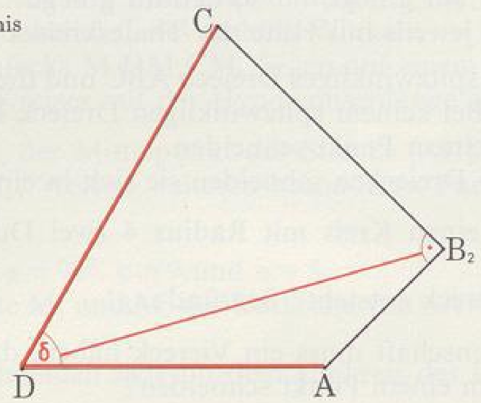


① [AD] zeichnen
② δ bei D antragen
③ Der Kreis um D mit Radius c schneidet den freien Schenkel von δ in C.
④ Kreis um D mit Radius f
⑤ Thaleskreis über [AC] schneidet Kreis ④ in B.

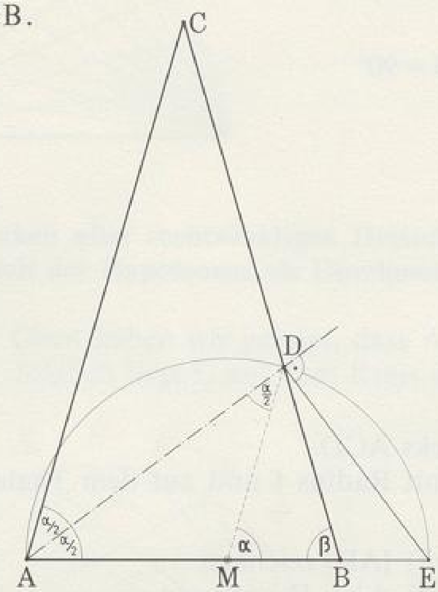
Ergebnis: Viereck AB_1CD und Viereck AB_2CD

Ergebnis





2. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C. Die Winkelhalbierende w_α schneidet a in D. Das Lot in D auf w_α schneidet die Gerade AB in E. Zeige: $\overline{AE} = 2\overline{DB}$.



Begründung: Weil $\sphericalangle ADE = 90°$ ist, liegt D auf dem Thaleskreis über [AE] mit dem Mittelpunkt M. Außenwinkel im gleichschenkligen Dreieck AMD ist $\sphericalangle DMB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, ist $\beta = \alpha$; deshalb ist auch das Dreieck BDM gleichschenklig.

Es gilt: $\overline{DB} = \overline{DM} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AE}$, also $2\overline{DB} = \overline{AE}$

Aufgaben zu 5.3

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\beta = 90°$) ist bekannt: $\overline{BC} = 4$, α ist halb so groß wie γ.
   a) Wie groß sind α und γ? **b)** Konstruiere das Dreieck ABC.
   c) Gib **ohne** Messung an, wie lang $\overline{AC}$, s_b und h_c sind.
   d) Begründe: w_γ halbiert s_b.

:2. Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P,
   a) der nicht auf g liegt, **b)** der auf g liegt.
   Konstruiere jeweils mit Hilfe des Thaleskreises das Lot zu g durch P.

•**3.** Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die drei Thaleskreise über den Seiten.
   Begründe: Bei keinem spitzwinkligen Dreieck können sich die drei Thaleskreise in einem Punkt schneiden.
   Bei welchen Dreiecken schneiden sie sich in einem Punkt?

4. Zeichne in einen Kreis mit Radius 4 zwei Durchmesser und verbinde ihre Endpunkte.
   Welches Viereck entsteht? Begründung!

•**5.** Welche Eigenschaft muss ein Viereck haben, damit sich die vier Thaleskreise über den Seiten in einem Punkt schneiden?