Algebra

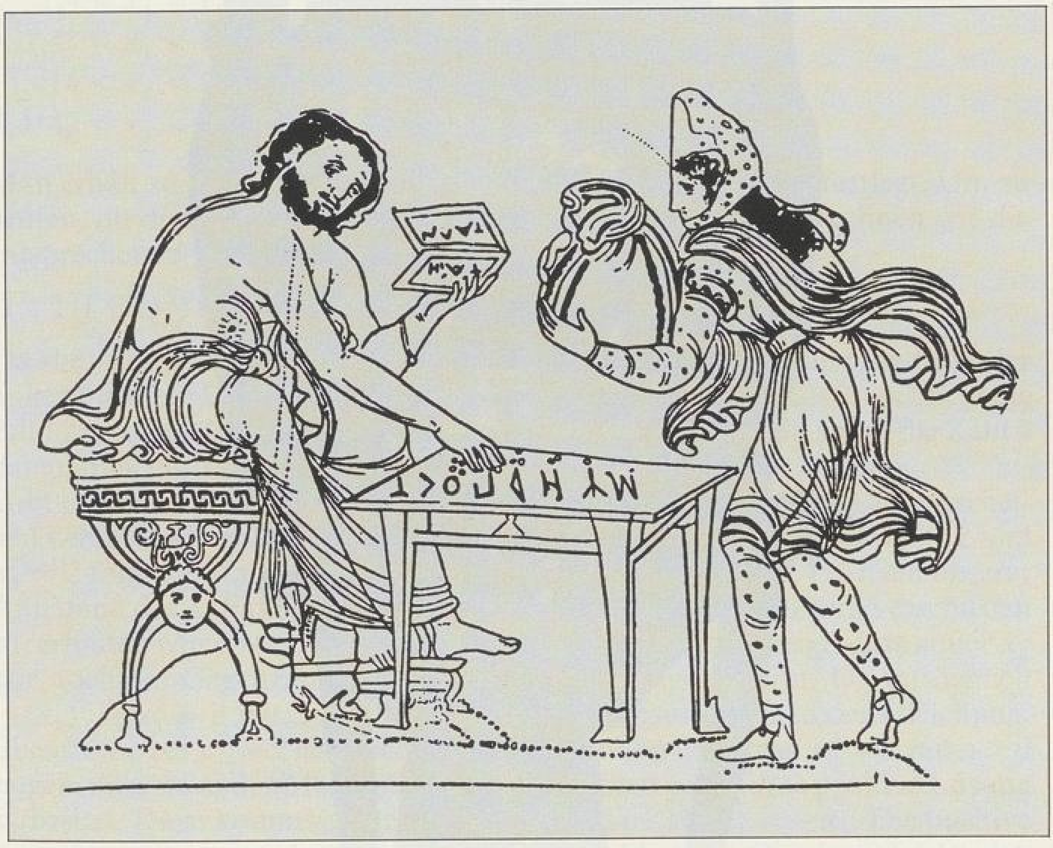
Barth, Friedrich

München, 2001

2 Die Quadratwurzel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

2 Die Quadratwurzel



Ein Bote bringt dem Schatzmeister des Perserkönigs DARIUS einen Sack Geldes von tributpflichtigen Völkern. Der Schatzmeister hält in seiner Linken eine Doppeltafel, auf der wir ΤΑΛΑΝΤΑ Η (= 100 Talente) entziffern können. Auf ihr sind die Posten aufgeschrieben, die er nacheinander mit Hilfe von Rechensteinchen (= ψῆφοι [psēphoi]) auf den Rechentisch (= ἀβάκιον [abákion]) überträgt. Dort lesen wir ΜΨΗΗΔΓΟ<Τ, also 1731 [Drachmen] 4 [oboloi]. Bei Μ = 10000, < = $\frac{1}{2}$ Obolos und Τ = $\frac{1}{4}$ Obolos liegen keine Steinchen. – 1 Talent = 60 Minen = 6000 Drachmen = 36000 Obolen. (Siehe auch Fußnote auf Seite 67) – Nachzeichnung von der rotfigurigen Dariusvase von Abbildung 32.1.

Abb. 32.1 Die Dariusvase aus dem Nationalmuseum von Neapel, Höhe 1,3 m, größter Umfang 2 m, vermutlich aus dem 4. Jh. v. Chr., gefunden in Canosa, dem alten Canusium, in Apulien. In der oberen Reihe des Hauptkörpers nimmt Zeus mit anderen Göttern Griechenland in Schutz. In der Mitte sitzt DARIUS I. (reg. 522–486) auf dem Thron, vor ihm steht ein Perser, der vor dem Krieg zu warnen scheint. Darunter die Schatzmeisterszene von Abbildung 31.1.

2 Die Quadratwurzel

2.1 Definition der Quadratwurzel

Besitzt die in $\mathbb{Q}$ unlösbare Gleichung $x^2 = 2$ in der uns nun zur Verfügung stehenden größeren Zahlenmenge $\mathbb{R}$ eine Lösung?
Falls es eine positive Lösung x_1 dieser Gleichung gibt, muss für sie gelten (vgl. Seite 11):

$$\begin{array}{rll} 1 < x_1 < 2 & \text{also} & x_1 \in [1; 2] \\ 1{,}4 < x_1 < 1{,}5 & \text{also} & x_1 \in [1{,}4; 1{,}5] \\ 1{,}41 < x_1 < 1{,}42 & \text{also} & x_1 \in [1{,}41; 1{,}42] \\ 1{,}414 < x_1 < 1{,}415 & \text{also} & x_1 \in [1{,}414; 1{,}415] \\ 1{,}4142 < x_1 < 1{,}4143 & \text{also} & x_1 \in [1{,}4142; 1{,}4143] \quad \text{usw.} \end{array}$$

Man erhält so eine Intervallschachtelung, welche die Zahl x_1 festlegt. Um zu prüfen, ob diese Zahl wirklich die Gleichung $x^2 = 2$ löst, berechnen wir die entsprechende Intervallschachtelung für x_1^2:

$$[1^2; 2^2], [1{,}4^2; 1{,}5^2], [1{,}41^2; 1{,}42^2], [1{,}414^2; 1{,}415^2], \ldots$$

Da die Intervalle für x_1 gerade so gewählt wurden, dass die Quadrate der linken Grenzen kleiner als 2, die der rechten Grenzen größer als 2 sind, liegt die Zahl 2 in jedem Intervall der Schachtelung für x_1^2. Diese stellt somit die Zahl 2 dar und es gilt tatsächlich $x_1^2 = 2$.
Gibt es noch andere Lösungen der Gleichung $x^2 = 2$? Um dies zu entscheiden nehmen wir an, x_2 sei eine von x_1 verschiedene Lösung. Aus $x_1^2 = 2$ und $x_2^2 = 2$ folgt $x_1^2 - x_2^2 = 0$ und damit $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Da nach unserer Annahme der 1. Faktor des links stehenden Produktes von null verschieden ist, erhalten wir $x_1 + x_2 = 0$, also $x_2 = -x_1$. Damit ist gezeigt, dass außer x_1 nur noch die Gegenzahl $-x_1$ als Lösung in Frage kommt. Da tatsächlich $(-x_1)^2 = x_1^2 = 2$ gilt, ist $L = \{x_1; -x_1\}$ die Lösungsmenge der Gleichung.
Ebenso wie bei $x^2 = 2$ lässt sich für jede Gleichung der Form $x^2 = a$ mit $a > 0$ zeigen, dass sie in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen genau eine positive Lösung x_1 besitzt. Dazu kommt als negative Lösung die Zahl $x_2 = -x_1$. Die positive Lösung von $x^2 = a$, also diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich a ist, wird **Quadratwurzel von *a*** genannt und mit $\sqrt{a}$ bezeichnet. Auch im Fall der Gleichung $x^2 = 0$ wird für die einzige Lösung $x = 0$ die Wurzelschreibweise noch zugelassen, indem man vereinbart, dass $\sqrt{0} = 0$ gelten soll. Das ergibt die

Definition 33.1: Der Term $\sqrt{a}$ mit $a \geqq 0$ bedeutet diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat den Wert a hat.

Beachte also: $\sqrt{a}$ ist nur für $a \geqq 0$ definiert und es gilt

$$\sqrt{a} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2;\quad \sqrt{6{,}25} = 2{,}5;\quad \sqrt{\tfrac{49}{121}} = \tfrac{7}{11};$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \text{ (irrational)};\quad \sqrt{10} = 3{,}1622\ldots \text{ (irrational)}$$

Das Zeichen $\sqrt{}$ heißt **Wurzelzeichen**; der unter dem Wurzelzeichen stehende Term heißt **Radikand**. Statt »die Wurzel aus a berechnen« sagt man auch »aus a die Wurzel ziehen« oder »a radizieren«. $\sqrt{a}$ ist meist eine irrationale Zahl; nur wenn a das Quadrat einer rationalen Zahl ist, »geht die Wurzel auf«, d. h. ist auch $\sqrt{a}$ eine rationale Zahl.
Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Zahl $x_1 = \sqrt{a}$ als positive Lösung. Für die negative Lösung $x_2 = -x_1$ gilt daher: $x_2 = -\sqrt{a}$.

> **Satz 34.1:** Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Lösungen
> $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

**Zur Geschichte von »Wurzel« und Wurzelzeichen

Stellt man sich eine Zahl als Maßzahl für den Inhalt eines Quadrats vor, so gibt die Quadratwurzel aus dieser Zahl die Länge der Quadratseite an. Diese Vorstellung liegt dem Wort πλευρά (pleurá) = *Seite* zugrunde, womit die Griechen, so z. B. Euklid (um 300 v. Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, die Quadratwurzel bezeichneten. Durch das entsprechende lateinische Wort *latus* drückten die Agrimensoren, die römischen Feldmesser, die Quadratwurzel aus. Nikomachos (um 160 n. Chr.) verwendet das griechische Wort ῥίζα (rhíza), das ursprünglich Wurzel einer Pflanze, im übertragenen Sinn Grundlage und Ursprung bedeutet, im mathematischen Sinn von Ausgangszahl. Wortgetreu übersetzt Boethius (um 480–524?) es mit *radix* ins Lateinische.
Ob der Inder Aryabhata I (um 476–? n. Chr.) durch das griechische ῥίζα angeregt wurde mit dem indischen Wort *mūla*, das ebenfalls Wurzel einer Pflanze bedeutet, die Quadratwurzel aus einer Zahl zu bezeichnen, wird wohl immer ungeklärt bleiben müssen. Interessanterweise übernehmen die Araber, so auch al-Charizmi (um 780–nach 847) einerseits das griechische πλευρά (pleurá), wenn sie z. B. in ihren geometrischen Beweisen die Quadratwurzel als Seite eines Quadrats darstellen – sie nennen sie dann auch *dil*, das ist ihr Wort für Seite –, andererseits das indische *mūla*, dem ihr arabisches Wort جذر (*dschidr*) entspricht, wenn sie die Quadratwurzel als Zahl auffassen. Leider verwenden sie aber *dschidr* auch zur Bezeichnung der Unbekannten selbst, was allerhand Verwirrung stiftete und immer noch stiften kann. Denn noch heute verwendet man in so manchen Lehrbüchern das Wort Wurzel im Sinne von »Quadratwurzel« und im Sinne von »Lösung einer Gleichung«. Wir wollen uns diesem Brauch aber nicht anschließen.
Gerhard von Cremona (1114–1187), der neben anderen arabischen Abhandlungen auch das Werk al-Charizmis übersetzte, wählte für *dschidr* die wortgetreue Entsprechung *radix*, das wiederum folgerichtig mit *Wurzel* ins Deutsche übertragen wurde, so um 1400 in der *Geometria Culmensis* und 1461 in der *Deutschen Algebra*, wo man liest »Radix ist die wurcz der zal« (Abbildung 68.1, Zeile 6 von folio 133v). In derselben Handschrift wird das Wurzelziehen, das mittelalterliche *radicem extrahere* des Jordanus Nemorarius († 1237) und des Johannes de Sacro Bosco (1200–1256), mit »zuech ausz dye wurcz« eingedeutscht. Das Fachwort **radizieren** erscheint erst 1836 in *An-*

fangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht von Carl KOPPE (1803 bis 1874), der dort auch das Wort **Radikand** für die »zu radizierende Zahl« prägt.
Ein besonderes Zeichen für die Quadratwurzel, nämlich ℾ, tritt zum ersten Mal bei den Ägyptern auf, z. B. im *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr.). Die Inder kürzen ihr *mūla* einfach durch die Silbe *mū* ab. Die Araber kehren leider zu der vollen Wortalgebra zurück, sodass es erst im mittelalterlichen Italien wieder zu einem Zeichen für die Quadratwurzel kommt. Man kürzt das Wort *radix* durch ein durchgestrichenes R, also durch ℞ ab, zum ersten Mal belegt bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seiner *Practica geometriae* von 1220. Geronimo CARDANO (1501–1576) und Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) verwenden es, in Deutschland Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460– nach 1500). François VIÈTE (1540–1603) benützt stattdessen, seinem Landsmann Petrus RAMUS (1515–1572) folgend, *l.*, den Anfangsbuchstaben von *latus*.
Das heute übliche Wurzelzeichen stammt aus Deutschland. Im vor 1486 geschriebenen *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* setzt der unbekannte Verfasser einen Punkt in die Mitte vor die Zahl und erklärt: »In extraccione radicis quadrati alicuius numeri preponatur numero unus punctus« (Zum Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl setzt man der Zahl einen Punkt voran). Bald wird dieser viereckig mit Aufstrich, so im *Codex Leipzig 1696* (vermutlich Ende des 15. Jh.s) und auch in der um 1517 von Adam RIES (1492–1559) niedergeschriebenen *Algebra* des INITIUS ALGEBRAS (*Codex Dresden C 349*), dann erstmals im Druck 1525 in der *Coß* Christoff RUDOLFFS (um 1500–vor 1543), auch dort noch gelesen als »Punkt« (dies sogar noch 1551 in Johann SCHEYBLS [1494–1570] *Algebra*). In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – verlängert sich 1544 der Punkt zum Abwärtsstrich (der in den Figuren schon das Ansatzstrichlein hat): Der Wurzelhaken war geboren.
Es blieb aber bei allen Wurzelzeichen das Problem, ob z. B. $\surd a+b$ die Quadratwurzel aus der Summe $a+b$ oder die Summe aus dem 1. Summanden $\surd a$ und dem 2. Summanden b bedeuten soll. Nahezu jeder Mathematiker hatte dafür eigene Vorschriften. So erscheinen bei dieser Gelegenheit 1556 zum ersten Mal runde Klammern im Druck: im *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – des Niccolò TARTAGLIA steht ℞ v. (℞ 24 piu ℞ 12) für $\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{12}}$. Dabei bedeutet ℞ v. *radix universalis = Gesamtwurzel*, die 1572 Raffaele BOMBELLI (1526 bis 1572) in seiner *L'algebra* als *radix legata = gebundene Wurzel* bezeichnet und durch R.L ausdrückt. Das Ende der Bindung kennzeichnet ein etwas tiefer gestelltes gespiegeltes L, also ⅃, sodass bei ihm $\sqrt{4+\sqrt{6}}+2$ als R.q.L4.p.R.q.6 ⅃ p.2 erscheint, wobei R.q. *radix quadrata* bedeutet. Aus L und ⅃ dürfte unsere eckige Klammer entstanden sein. In seinem Manuskript drückte BOMBELLI 1557/60 die Bindung noch so wie andere Mathematiker durch Unterstreichen aus. Durchgesetzt hat sich von all den Möglichkeiten aber die Schreibweise von René DESCARTES (1596–1650) aus seiner *La Géométrie* von 1637: Er fasste die zusammengehörigen Glieder durch Überstreichen zusammen, schrieb also $\surd\overline{a+b}$. Verbindet man diesen Querstrich mit dem Wurzelhaken, so hat man unser Wurzelzeichen, das sich aber sehr langsam verbreitete. Schließlich setzte man den Querstrich auch da, wo er keinerlei Bedeutung hatte; denn bei $\surd a+b$ war es ja eigentlich nicht nötig, $\sqrt{a}+b$ zu schreiben.

LEONARDO VON PISA	℞	Niccolò TARTAGLIA	℞	Adam RIES	✓
WIDMANN VON EGER	℞	Raffaele BOMBELLI	℞⌊10 m 1²1⌋	Christoff RUDOLFF	✓
Geronimo CARDANO	℞	Dresdener Codex	· 2 ч $= \sqrt{25}$	Michael STIFEL	✓

Abb. 35.1 Verschiedene Wurzelzeichen. – Wegen des *Codex Leipzig 1696*, s. Abb. 70.1

Aufgaben

1. Gib die folgenden Zahlen in wurzelfreier Schreibweise an:

a) $\sqrt{1}$ **b)** $\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt{81}$ **d)** $\sqrt{36}$

e) $\sqrt{100}$ **f)** $\sqrt{2500}$ **g)** $\sqrt{490000}$ **h)** $\sqrt{1000000}$

i) $\sqrt{196}$ **k)** $\sqrt{169}$ **l)** $\sqrt{256}$ **m)** $\sqrt{361}$

2. Ziehe die Wurzeln:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ **b)** $\sqrt{\frac{441}{121}}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{576}}$ **d)** $\sqrt{\frac{484}{10000}}$

e) $\sqrt{2{,}25}$ **f)** $\sqrt{5{,}29}$ **g)** $\sqrt{0{,}0289}$ **h)** $\sqrt{0{,}000625}$

3. Berechne und vergleiche:

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

b) $\sqrt{169-25}$ und $\sqrt{169}-\sqrt{25}$

c) $\sqrt{576+49}$ und $\sqrt{576}+\sqrt{49}$

d) $\sqrt{1681-1600}$ und $\sqrt{1681}-\sqrt{1600}$

e) $\sqrt{1+4+4}$ und $\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$

f) $\sqrt{49+16-1}$ und $\sqrt{49}+\sqrt{16}-\sqrt{1}$

g) $\sqrt{196-36+9}$ und $\sqrt{196}-\sqrt{36}+\sqrt{9}$

h) $\sqrt{961-25-36}$ und $\sqrt{961}-\sqrt{25}-\sqrt{36}$

4. Berechne:

a) $\sqrt{1+3}$ **b)** $\sqrt{1+3+5}$ **c)** $\sqrt{1+3+5+7}$

d) $\sqrt{1+3+5+7+9}$ **e)** $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$

5. Beispiel: $\sqrt{\sqrt{25}-1}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$. Verfahre ebenso:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{81}}$ **c)** $\sqrt{\sqrt{625}}$ **d)** $\sqrt{\sqrt{10000}}$

e) $\sqrt{1+\sqrt{9}}$ **f)** $\sqrt{\frac{81}{16}-\sqrt{25}}$ **g)** $\sqrt{\sqrt{400}-4}$ **h)** $\sqrt{\sqrt{900}+\frac{1}{4}}$

i) $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{576}}$ **k)** $\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{\frac{1}{16}}}$ **l)** $\sqrt{\sqrt{\frac{169}{144}}-\sqrt{\frac{49}{324}}}$

6. Welche Zahlen dürfen bei den folgenden Wurzeltermen für die Variable eingesetzt werden? Gib jeweils die Definitionsmenge des Terms an.

a) $\sqrt{2a}$ **b)** $\sqrt{-a}$ **c)** $\sqrt{1+a}$ **d)** $\sqrt{5-2a}$

e) $\sqrt{2|x|}$ **f)** $\sqrt{-3|x|}$ **g)** $\sqrt{x^2+1}$ **h)** $\sqrt{x^2-1}$

i) $\sqrt{1-x^2}$ **k)** $\sqrt{|x|-3}$ **l)** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **m)** $\sqrt{\dfrac{2x+5}{2-x}}$

7. Vereinfache:
a) $(1+\sqrt{2})^2$ **b)** $(3-\sqrt{3})^2$ **c)** $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$
d) $(\sqrt{a}-2b)^2$ **e)** $(3\sqrt{x}+5y)^2$ **f)** $(3p-\sqrt{3p})(\sqrt{3p}+3p)$

8. Fasse zusammen:
a) $3+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+15$ **b)** $2a-9\sqrt{a}-5\sqrt{a}+12a$
c) $-11\sqrt{5}+8\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}+7\sqrt{5}$
d) $5(1-\sqrt{7}+2\sqrt{6})-3(3\sqrt{6}+5\sqrt{7}-5)$
e) $(4\sqrt{13}-15)(1+8\sqrt{13})-29(13-4\sqrt{13})$
f) $(3m-\sqrt{n})^2-(3m+\sqrt{n})^2+12m\sqrt{n}$

9. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:
a) $x^2=1225$ **b)** $5x^2-320=0$ **c)** $16(x^2+9)=144$
d) $2x^2-4=0$ **e)** $17x^2+61=350$ **f)** $121=49-4x^2$
g) $0{,}2x^2-5=0$ **h)** $\frac{2}{7}x^2-2=\frac{5}{7}x^2+1$ **i)** $0{,}15=\frac{2}{3}x^2+x^2$
k) $x^2-\sqrt{3}=0$ **l)** $x^2+\sqrt{5}=\sqrt{7}$ **m)** $x^2+\sqrt{5}-\sqrt{3}=0$

10. Welche Gleichung der Form $x^2=a$ hat die angegebene Zahl als Lösung? Wie lautet die Lösungsmenge?
a) -1 **b)** $\sqrt{7}$ **c)** 0 **d)** $-\sqrt{1{,}2}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **f)** $\sqrt{0{,}5-\sqrt{\frac{1}{4}}}$

11. Wie lang ist die Diagonale eines Quadrats mit dem Flächeninhalt
a) $1\,\text{m}^2$, **b)** $8\,\text{cm}^2$, **c)** $9\,\text{dm}^2$, **d)** $450\,\text{mm}^2$, **e)** $1{,}62\,\text{a}$, **f)** $3\,\text{km}^2$?

12. Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Stelle bei den folgenden Termen fest, ob sie rationale oder irrationale Zahlen darstellen.
a) $1+\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})$
e) $(\sqrt{2})^2$ **f)** $\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ **g)** $(1+\sqrt{2})^2$ **h)** $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

13. Bestimme die Lösungsmenge:
a) $\sqrt{x}=2$ **b)** $2\sqrt{x}=6$ **c)** $\sqrt{x}-1=0$ **d)** $\sqrt{x}+1=0$
e) $2\sqrt{x}+5=3\sqrt{x}+2$ **f)** $11-5\sqrt{x}=3-7\sqrt{x}$
g) $2(3\sqrt{x}+7)=9+2\sqrt{x}+5$ **h)** $(\sqrt{x}-17)\cdot 5-2\sqrt{x}=3(11+\sqrt{x})$
i) $7-(2\sqrt{x}-7)\cdot 3=2\sqrt{x}+4(7-2\sqrt{x})$

14. Bei einem Fotoapparat wird bekanntlich das zur Bilderzeugung verwendete Lichtbündel durch eine meist kreisförmige Blende begrenzt. Der Blendendurchmesser d kann verändert werden, die jeweilige Einstellung wird durch die Blendenzahl $\frac{f}{d}$ beschrieben; dabei bedeutet f die Brennweite des Objektivs.
a) Wie groß ist bei einem Apparat mit $f=50$ mm der Blendendurchmesser, wenn »Blende 8«, also die Blendenzahl 8, eingestellt ist?

b) Auf der Objektivfassung eines bestimmten Fotoapparats sind sieben Blendenzahlen angegeben, die kleinste davon heißt 2. Die übrigen Blendenzahlen sind so gewählt, dass beim Übergang von einer zur nächsten sich jeweils die Blendenfläche halbiert. Berechne die übrigen Blendenzahlen und gib die ersten beiden Ziffern ihrer Dezimalentwicklung an. (Damit erhält man die auf der Blendenskala angegebenen Zahlen!)
Hinweis: Beachte, dass die Blendenfläche zu d^2 proportional ist.

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

Wie findet man zu einer Zahl $a > 0$ den Wert von $\sqrt{a}$?
Bei den bisherigen Beispielen war das recht einfach; man konnte meist schnell eine positive Zahl angeben, deren Quadrat die Zahl a ergab. Schwieriger wird diese Aufgabe schon, wenn a eine große, uns nicht geläufige Quadratzahl ist. Wie findet man z. B., dass $\sqrt{33489}$ bzw. $\sqrt{157{,}7536}$ den Wert 187 bzw. 12,56 hat? Aber auch das sind noch Sonderfälle. Im Allgemeinen ist ja der Radikand a nicht das Quadrat einer rationalen Zahl; $\sqrt{a}$ ist dann irrational, und man muss sich damit begnügen, einen hinreichend genauen Näherungswert zu bestimmen.
Dir ist sicher schon bekannt, dass man solche Aufgaben bequem mit dem Taschenrechner lösen kann. Man muss lediglich den Radikanden a eingeben und die **Wurzeltaste** (manchmal zwei Tasten) drücken und schon wird ein (Näherungs-)Wert von $\sqrt{a}$ angezeigt. Wie ist das möglich? Sind die Wurzelwerte schon im Taschenrechner gespeichert und müssen nur abgerufen werden? Sicherlich nicht, wie du dir leicht klarmachen kannst! Die gesuchte Wurzel muss vielmehr jedes Mal neu berechnet werden. Dazu dient ein sehr schnell ablaufendes **Rechenprogramm**, das mit dem Drücken der Wurzeltaste gestartet wird. Für das Berechnen von Quadratwurzeln gibt es verschiedene Verfahren. Im Folgenden sollst du einige kennen lernen.

2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei diesem schon bekannten Verfahren schließt man den Wurzelwert zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen ein. Aus diesem Anfangsintervall gewinnt man durch Anwendung der Zehnteilungsmethode eine Intervallschachtelung für die gesuchte Wurzel. Der Rechenaufwand ist meist ziemlich groß.

2.2.2 Iterationsverfahren

Um zu einer Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel zu berechnen, beginnen wir mit einem Schätzwert $x_1 > 0$. Dieser ist zu groß bzw. zu klein bzw. richtig, wenn $x_1^2 > a$ bzw. $x_1^2 < a$ bzw. $x_1^2 = a$ gilt. Den letzten Fall, in welchem die Bestimmung von $\sqrt{a}$ zufällig schon gelungen ist, können wir im Folgenden außer Acht lassen.

Wegen $x_1^2 > a \Leftrightarrow x_1 > \frac{a}{x_1}$ bzw. $x_1^2 < a \Leftrightarrow x_1 < \frac{a}{x_1}$ kann man auch durch die Berechnung des Quotienten $\frac{a}{x_1}$ entscheiden, ob der Schätzwert zu groß oder zu klein ist. In jedem Fall liegt aber der gesuchte Wurzelwert *zwischen* den Zahlen x_1 und $\frac{a}{x_1}$. Als nächsten Näherungswert x_2 wählen wir daher eine Zahl aus diesem Intervall, und zwar den einfach zu berechnenden Mittelwert von x_1 und $\frac{a}{x_1}$, also $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$.

Ausgehend von x_2 kann man nun nach derselben Methode einen Näherungswert x_3, dann $x_4, x_5, \ldots$ berechnen. Allgemein erhalten wir den $(n+1)$ten Näherungswert x_{n+1} aus x_n nach der Formel

$$\boxed{x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2, \quad n \in \mathbb{N}.} \qquad \text{(I)}$$

Beispiel 1:

Gesucht ist $\sqrt{841}$.
Wir beginnen (z. B.!) mit dem Schätzwert $x_1 = 30$.
Durch Anwendung von (I) erhält man*:

$x_2 = (30 + \frac{841}{30}) : 2 \Leftrightarrow x_2 = 29{,}016666$

und weiter $x_3 = 29{,}000004$; $x_4 = 29$; $x_5 = 29$; ...
Da $29^2 = 841$, hat man mit x_4 bereits den richtigen Wert der Wurzel gefunden!

Beispiel 2:

Gesucht ist $\sqrt{6}$.
Mit dem Schätzwert $x_1 = 2$ erhält man* nach (I)

$x_2 = 2{,}5$; $x_3 = 2{,}45$; $x_4 = 2{,}4494897$; $x_5 = x_4$ (!).

Sobald zwei aufeinander folgende Näherungswerte übereinstimmen, kann man die Rechnung abbrechen; der nächste Schritt wäre nur eine Wiederholung des vorausgehenden und müsste wieder dasselbe Ergebnis liefern. Dass dieses Ergebnis die gesuchte Wurzel ist, lässt sich leicht begründen:
Mit $x_{n+1} = x_n$ folgt aus (I)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2 && \| \cdot 2x_n \\ 2x_n^2 &= x_n^2 + a && \| - x_n^2 \\ x_n^2 &= a. \end{aligned}$$

Da $x_n > 0$ gilt, ist somit $x_n = \sqrt{a}$.

* Die angegebenen Zahlenwerte wurden auf einem Taschenrechner mit achtstelliger Anzeige berechnet.

Natürlich gilt in Beispiel 2 die Gleichung $x_5 = x_4$ nicht exakt, sondern nur im Rahmen der Anzeigegenauigkeit des verwendeten Taschenrechners. $x_4 = 2{,}4494897$ ist deshalb nur der bestmögliche Näherungswert, der mit diesem Rechner für die irrationale Zahl $\sqrt{6}$ ermittelt werden kann. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man nach Eingabe von 6 die Wurzeltaste drückt.

Das Besondere an dem hier angewandten Rechenverfahren besteht darin, dass zur Bestimmung der verschiedenen Näherungswerte immer wieder dieselbe Regel, hier (I), benützt wird. Eine solche Berechnungsmethode bezeichnet man als **Iterationsverfahren**.*
Ein Iterationsverfahren ist für das praktische Rechnen sehr vorteilhaft: Man kann beim Taschenrechner immer wieder dieselbe Tastenfolge benützen. Die Iterationsregel (I) lässt sich, sobald ein Näherungswert in der Anzeige steht, z. B. mit folgender Tastenfolge ausführen:

Nach dem zweiten = -Befehl wird der neue Näherungswert angezeigt. Mit ihm kann man, wie der Pfeil andeutet, das Verfahren wiederholen. Ein Iterationsverfahren lässt sich vor allem auf einem programmierbaren Rechner sehr einfach durchführen. Die Abbildungen 40.1 und 40.2 zeigen ein Struktogramm und ein Flussdiagramm für Programme zur Berechnung von $\sqrt{a}$ nach dem Iterationsverfahren (I). Bei den Taschenrechnern ist ein entsprechendes Programm fest eingebaut.

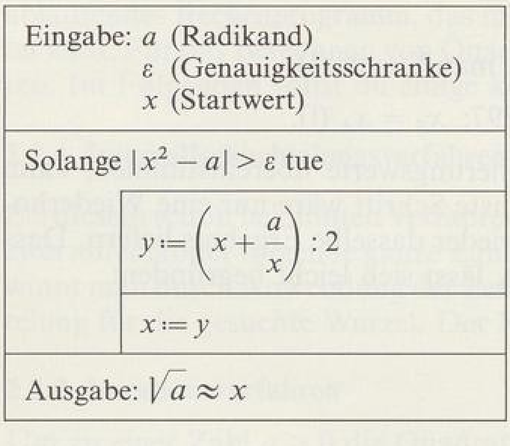


Abb. 40.1 Struktogramm zum Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_n^2 - a| \leqq \varepsilon$

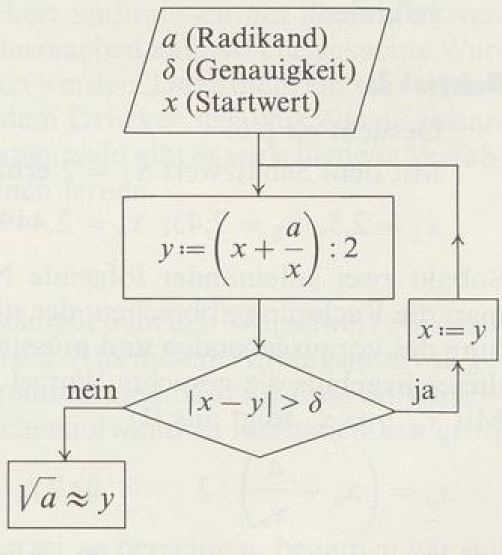


Abb. 40.2 Flussdiagramm für das Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| \leqq \delta$

* iterare (lat.) = etwas noch einmal tun, wiederholen; iteratio (lat.) = die Wiederholung.

Das Iterationsverfahren (I) lässt sich auch geometrisch veranschaulichen. Wir zeichnen dazu den Graphen der **Iterationsfunktion**, das ist in unserem Fall die Funktion mit der Gleichung $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2,\ x \in \mathbb{R}^+$. Sie liefert zu jedem Näherungswert x den nächsten Näherungswert y; d.h., setzt man $x = x_n$, so gilt $y = x_{n+1}$. Um dann die Zahl y als x_{n+1} wieder auf der x-Achse anzutragen verwendet man die Gerade mit der Gleichung $y = x$. Der auf ihr liegende Punkt mit der Ordinate y hat auch die Abszisse y, also x_{n+1} (Abbildung 41.1).

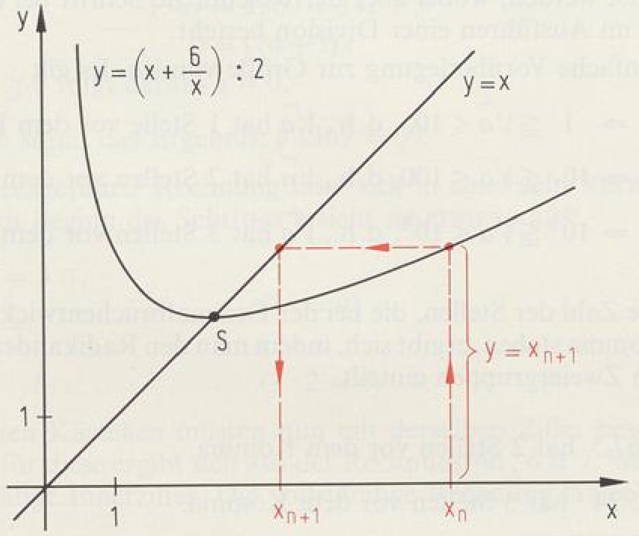


Abb. 41.1 Graphische Erzeugung von x_{n+1} aus x_n

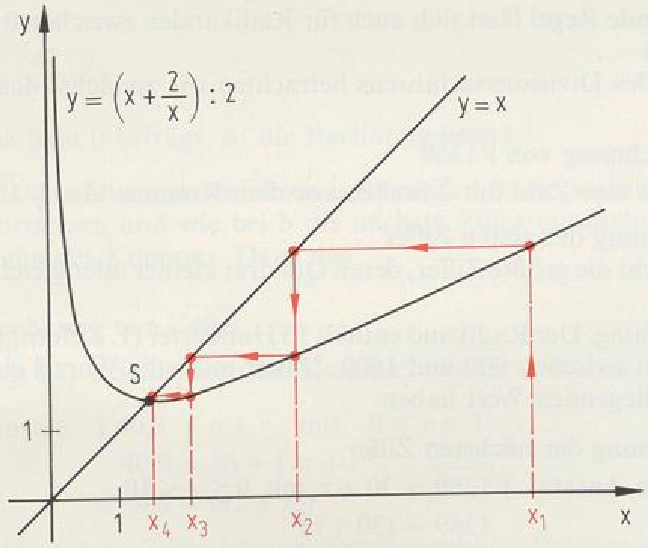


Abb. 41.2 Graphische Darstellung des Iterationsverfahrens

Der rote Linienzug in Abbildung 41.2 zeigt, dass die Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ sich von oben rasch der Abszisse des Schnittpunktes S der beiden Graphen nähern.

Man kann zeigen, dass dies immer so ist (vgl. Aufgaben 44/**4** und 45/**7**). Da S die Koordinaten $(\sqrt{a}\,|\,\sqrt{a})$ hat, strebt die Zahlenfolge $x_2, x_3, x_4, \ldots$ immer monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ (vgl. Aufgabe 45/**5**).

**2.2.3 Divisionsverfahren

Es gibt einen interessanten Algorithmus*, bei dem – ähnlich wie beim Intervallschachtelungsverfahren – die einzelnen Ziffern der Dezimalentwicklung einer Wurzel nacheinander berechnet werden, wobei aber der wesentliche Schritt bei der Bestimmung einer Dezimalen im Ausführen einer Division besteht.
Zunächst eine einfache Vorüberlegung zur Größe von $\sqrt{a}$. Es gilt

$1 \leqq a < 100 \quad \Rightarrow \quad 1 \leqq \sqrt{a} < 10$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 1 Stelle vor dem Komma

$100 \leqq a < 10000 \Rightarrow 10 \leqq \sqrt{a} < 100$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 2 Stellen vor dem Komma

$10^4 \leqq a < 10^6 \quad \Rightarrow 10^2 \leqq \sqrt{a} < 10^3$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 3 Stellen vor dem Komma

usw.

Daraus folgt: Die Zahl der Stellen, die bei der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ mit $a > 1$ vor dem Komma stehen, ergibt sich, indem man den Radikanden a vom Komma aus nach links in Zweiergruppen einteilt.

Beispiele: $\sqrt{13|67{,}5}$ hat 2 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{6|15|34}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{10|47|69{,}824}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

Eine entsprechende Regel lässt sich auch für Radikanden zwischen 0 und 1 aufstellen (Aufgabe 46/**10**).
Zur Erklärung des Divisionsverfahrens betrachten wir zunächst das einfache

Beispiel 1: Berechnung von $\sqrt{1369}$
Das Ergebnis ist eine Zahl mit 2 Stellen vor dem Komma, also $\sqrt{13|69} = \_\ \_, \ldots$

a) Bestimmung der ersten Ziffer
Man sucht die größte Ziffer, deren Quadrat kleiner oder gleich 13 ist; Ergebnis 3.
Begründung: Der Radikand enthält 13 Hunderter (1. Zifferngruppe von links), liegt also zwischen 900 und 1600. Daher muss die Wurzel einen zwischen 30 und 40 liegenden Wert haben.

b) Bestimmung der nächsten Ziffer
Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 30 + r$ mit $0 \leqq r < 10$
folgt

$$\begin{aligned} 1369 &= (30+r)^2 \\ 1369 &= 900 + 60r + r^2 \\ 469 &= (60+r)r \end{aligned}$$

* Algorithmus = Rechenverfahren. Das Wort Algorithmus entstand aus *algorismus*, einer Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Der ganzzahlige Teil von r ist die gesuchte Einerziffer. Um sie zu bestimmen bringen wir die letzte Gleichung auf die Form $469 : (60 + r) = r$. Da der Divisor $60 + r$ zwischen 60 und 70 liegt, kann r nur 7 Ganze enthalten; denn $8 \cdot 60 > 469$ und $6 \cdot 70 < 469$.

Somit gilt: $\sqrt{1369} = 37, \ldots$

c) Bestimmung eventueller weiterer Stellen

Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 37 + s$ mit $0 \leqq s < 1$

folgt

$$\begin{aligned} 1369 &= (37 + s)^2 \\ 1369 &= 1369 + 74s + s^2 \\ 0 &= (74 + s)s \end{aligned}$$

Wegen $s \geqq 0$ folgt daraus $s = 0$.

Wir erhalten somit das Ergebnis: $\sqrt{1369} = 37$.

Die hier durchgeführte Rechnung lässt sich in einer sehr kurzen Niederschrift darstellen; zu Beginn des Schrittes **b** sieht sie etwa so aus:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{13|69} = 3\square, & & \\ \underline{-9} & & (3^2 = 9) \\ 469 & & \\ & 6\square \cdot \square & (3 \cdot 2 = 6) \end{array}$$

Die drei roten Kästchen müssen nun mit derselben Ziffer besetzt werden! Ein Schätzwert für diese ergibt sich aus der Rechnung $46 : 6 \approx 7$. Wegen $67 \cdot 7 \leqq 469$ ist 7 die richtige Einerziffer. Die vollständige Rechnung lautet damit

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1369} = 37, & \\ \underline{-9} & \\ 469 & \\ \underline{-469} & 67 \cdot 7 \\ 0 & \end{array}$$

Da der neue Rest 0 beträgt, ist die Rechnung beendet.

Solange die bei diesem Divisionsverfahren auftretenden Reste positiv sind, kann man die Rechnung fortsetzen und wie bei **b** die nächste Ziffer ermitteln. Dies gilt auch beim Überschreiten des Kommas. Dazu das

Beispiel 2: Berechnung von $\sqrt{40{,}9}$

Das Ergebnis hat 1 Stelle vor dem Komma: $\sqrt{40{,}9} = 6, \ldots$

Aus dem Ansatz $\sqrt{40{,}9} = 6 + r$ mit $0 \leqq r < 1$

folgt

$$\begin{aligned} 40{,}9 &= 36 + 12r + r^2 \\ 4{,}9 &= (12 + r)r \end{aligned}$$

Die gesuchte nächste Ziffer ist nun der ganzzahlige Teil von $10r$. Wir führen deshalb $r' = 10r$ ein. Dazu multiplizieren wir beide Faktoren auf der rechten Seite mit 10, die ganze Gleichung also mit 100:

$$490 = (120 + r')r'$$

also

$$490 : (120 + r') = r'.$$

Als ganzzahliger Teil von r' ergibt sich daraus nicht 4, sondern 3. Somit gilt: $\sqrt{40{,}9} = 6{,}3\ldots$

Ganz entsprechend verfährt man bei der Bestimmung weiterer Ziffern. Die Kurzform der Rechnung sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rrl}
\sqrt{40{,}9} = \sqrt{40{,}90\,00\,00\ldots} = 6{,}395\ldots & & \\
-36 & & (6^2 = 36) \\
4\,90 & & \\
-3\,69 & \underline{123 \cdot 3} & (6 \cdot 2 = 12) \\
1\,21\,00 & & \\
-1\,17\,21 & \underline{1269 \cdot 9} & (63 \cdot 2 = \underline{126} = 123 + 3) \\
6\,79\,00 & & \\
-6\,39\,25 & \underline{12785 \cdot 5} & (639 \cdot 2 = \underline{1278} = 1269 + 9) \\
39\,75 & &
\end{array}$$

Man rechnet so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

** Zur Geschichte

Das angegebene Divisionsverfahren hat 1540 Reinerus Gemma Frisius (1508–1555) in seiner um 1536 geschriebenen *Arithmeticae practicae methodus facilis* veröffentlicht.

Aufgaben

1. Bei der Berechnung von $\sqrt{31}$ nach dem Intervallschachtelungsverfahren erhält man [5; 6] als erstes und [5,5; 5,6] als zweites Intervall. Muss man zur Bestimmung des nächsten Intervalls die Quadrate aller Zwischenwerte 5,51; 5,52; …; 5,59 berechnen? Wie viele Quadrate sind bei geschicktem Vorgehen höchstens notwendig? Wie heißt das dritte Intervall für $\sqrt{31}$?

2. Das fünfte Intervall der Schachtelung für $\sqrt{21{,}8}$ heißt [4,6690; 4,6691]. Wie entscheidet man am einfachsten, ob der auf vier Stellen nach dem Komma gerundete Wert von $\sqrt{21{,}8}$ mit der linken oder mit der rechten Intervallgrenze übereinstimmt?

3. Berechne nach dem Iterationsverfahren (I) die Näherungswerte x_2 bis x_5 für

   a) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 3$, **b)** $\sqrt{13}$ und $x_1 = 4$,

   c) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2$, **d)** $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2{,}5$,

   e) $\sqrt{3987}$ und $x_1 = 60$, **f)** $\sqrt{0{,}95}$ und $x_1 = 1$.

4. Zeichne den Graphen der zur Berechnung von $\sqrt{8}$ gehörenden Iterationsfunktion $x \mapsto \left(x + \frac{8}{x}\right) : 2$ im Intervall $0 < x \leqq 10$ und veranschauliche das Iterationsverfahren wie in Abbildung 41.2. Verwende dabei als (sehr schlechten!) Anfangswert zuerst 10, dann 0,5.

5. Beweise, dass die Gerade $y = x$ die Kurve $y = \left(x + \dfrac{a}{x}\right) : 2$, $x > 0$, im Punkt $S(\sqrt{a} | \sqrt{a})$ schneidet.

•6. Die halbe Summe zweier Zahlen bezeichnet man als ihr **arithmetisches Mittel***; die Wurzel aus dem Produkt zweier positiver Zahlen heißt **geometrisches Mittel***. Weise nach, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen stets kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel ist.

7. a) Bilde das geometrische Mittel der in der Formel des Iterationsverfahrens (I) vorkommenden Zahlen x_n und $\dfrac{a}{x_n}$. Zeige, dass für $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) : 2$ stets die Ungleichung $x_{n+1} \geqq \sqrt{a}$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

b) Bestätige die Beziehung $x_{n+1} - x_n = \dfrac{a - x_n^2}{2x_n}$ und begründe damit die Ungleichungen $x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq \ldots$

c) Die aus zwei positiven Zahlen u und v gebildete Zahl $\dfrac{2uv}{u+v}$ bezeichnet man als **harmonisches Mittel*** von u und v.
Beweise, dass für die beim Iterationsverfahren (I) auftretenden Zahlenpaare $\left(x_1 \middle| \dfrac{a}{x_1}\right), \left(x_2 \middle| \dfrac{a}{x_2}\right), \left(x_3 \middle| \dfrac{a}{x_3}\right), \ldots$ gilt:
Das arithmetische Mittel der Zahlen eines Paars ist die erste Zahl des nächsten Paars. Das harmonische Mittel der Zahlen eines Paars ist die zweite Zahl des nächsten Paars.

* ARCHYTAS, der als Staatsmann, Feldherr, pythagoreischer Philosoph und Mathematiker um 375 v. Chr. in Tarent wirkte, sagt, dass es in der Musik drei Mittel gebe, und zwar die μέση ἀριθμητική (mese arithmetikē), das arithmetische Mittel, für das $u - m = m - v$ gilt, die μέση γεωμετρική (mese geometrikē), das geometrische Mittel, für das $u : m = m : v$ gilt, und schließlich die μέση ὑπεναντίη (mese hypenantíe), das konträre oder entgegengesetzte Mittel, das auch μέση ἁρμονική (mese harmonikē), harmonisches Mittel, genannt wird und für das $(u - m) : u = (m - v) : v$ gilt. HIPPASOS (Mitte 5. Jh. v. Chr.) soll, anderen Berichten zufolge, als erster den Ausdruck harmonisches Mittel gebraucht haben. Löst man jeweils nach m auf, dann erhält man die bekannten Ausdrücke $\dfrac{u+v}{2}$ bzw. $\sqrt{uv}$ bzw. $\dfrac{2uv}{u+v}$.

Die Mittel ergeben sich aus Sonderfällen von Proportionen. Setzt man nämlich in der arithmetischen Proportion $a - b = c - d$ bzw. in der geometrischen Proportion $a : b = c : d$ die Innenglieder b und c gleich, dann erhält man mit den Außengliedern u und v die oben angegebenen stetigen oder fortlaufenden Proportionen (siehe Seite 99) $u - m = m - v$ bzw. $u : m = m : v$. Allmählich wurde es Brauch, eine solche dreigliedrige stetige Proportion μεσότης (mesótes) = *Mittelheit* zu nennen. EUKLID (um 300 v. Chr.) verwendet nur die geometrische Proportion. In Buch VI, Satz 13 der *Elemente* nennt er $\sqrt{uv}$ *mittlere proportionale Größe* (μέσον μέγεθος ἀνάλογον [méson mégethos análogon]), was JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200–1256) mit *medium proportionale* übersetzt. Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) bildet 1489 in seinem Rechenbuch dafür *eyn mittel zal* und Johann SCHEYBL (1494–1570) in seiner Euklidübersetzung *Das sibend/acht und neunt buch des hochberümbten Mathematici Euclidis Megarensis* von 1555 das *mittel proportional zwaier zalen* oder kurz *mittel*. Den Ausdruck *geometrisches Mittel* hat anscheinend 1808 Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) in seinem *Mathematischen Wörterbuch* geprägt. Bei Johannes KEPLER (1571–1630) findet man 1615 *medium arithmeticum* in seiner *Nova Stereometria doliorum vinariorum* – »Neue Raummesskunst für Weinfässer« –, die Eindeutschung *arithmetisches Mittel* erst im 1. Viertel des 19. Jh.s.
(Übrigens verwechselt SCHEYBL wie so mancher andere den Mathematiker EUKLID [um 300 v. Chr.] mit dem Philosophen EUKLID von Megara [um 450–um 370 v. Chr.], einem Schüler des SOKRATES. Federigo COMMANDINO [1509–1575] weist 1572 in seiner Euklidübersetzung auf diesen Irrtum hin.)

8. Wähle einen Startwert x_1 und berechne mit dem Iterationsverfahren (I) die ersten vier geltenden* Ziffern der Dezimalentwicklung von

a) $\sqrt{8170}$ **b)** $\sqrt{14{,}36}$ **c)** $\sqrt{0{,}088855}$ **d)** $\sqrt{0{,}000001234}$.

9. Wie viel Stellen vor dem Komma hat die Dezimalentwicklung der Wurzel und wie heißt die erste Ziffer?

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{37{,}64}$ **c)** $\sqrt{428}$ **d)** $\sqrt{3650809}$

e) $\sqrt{82145}$ **f)** $\sqrt{8214{,}5}$ **g)** $\sqrt{821{,}45}$ **h)** $\sqrt{82{,}145}$

10. a) Welche Ungleichung für $\sqrt{a}$ folgt aus

1) $1 > a \geqq 0{,}01$; **2)** $0{,}01 > a \geqq 0{,}0001$; **3)** $\frac{1}{10^4} > a \geqq \frac{1}{10^6}$?

b) Wo steht in der Dezimalentwicklung von **1)** $\sqrt{0{,}5}$; **2)** $\sqrt{0{,}025}$; **3)** $\sqrt{0{,}004}$ die erste von 0 verschiedene Ziffer und wie heißt sie?

11. Wie muss bzw. kann der Anfang der Dezimalentwicklung der Wurzel aussehen? (Die Punkte bedeuten weggelassene Ziffern.)

a) $\sqrt{0{,}7\ldots}$ **b)** $\sqrt{0{,}006\ldots}$ **c)** $\sqrt{0{,}12\ldots}$ **d)** $\sqrt{0{,}0147\ldots}$

12. Berechne nach dem Divisionsverfahren den ganzzahligen Teil der Wurzel.

a) $\sqrt{1000}$ **b)** $\sqrt{80656}$ **c)** $\sqrt{338725}$ **d)** $\sqrt{3387{,}25}$

13. Berechne nach dem Divisionsverfahren den auf Hundertstel gerundeten Wert von **a)** $\sqrt{19}$, **b)** $\sqrt{187{,}5}$, **c)** $\sqrt{17{,}7241}$, **d)** $\sqrt{0{,}6196}$.

14. Auf der in Abbildung 48.1 gezeigten altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) wurde zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln folgendes Verfahren angewandt, das auch Heron (um 62 n. Chr.) in seinem *Περὶ μέτρων* – »Vermessungslehre« – angibt:

$$\sqrt{p^2+q} \approx p + \frac{q}{2p} \qquad (p > 0;\ p^2+q \geqq 0)$$

Welcher Wert ergibt sich damit

a) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 4 - 1$;

b) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 2{,}89 + 0{,}11$;

c) für $\sqrt{6}$ aus der Zerlegung $6 = 6{,}25 - 0{,}25$;

d) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 400 + 35$;

e) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 441 - 6$;

f) für $\sqrt{1000}$ aus der Zerlegung $1000 = 1024 - 24$?

Vergleiche das Ergebnis mit dem Näherungswert des Taschenrechners.

* Die geltenden Ziffern werden von links nach rechts gezählt. Die erste von 0 verschiedene Ziffer ist dabei die erste geltende Ziffer.

15. Welcher Näherungswert x_2 ergibt sich nach der Formel von Aufgabe **14** für $\sqrt{a}$, wenn man mit Hilfe eines Schätzwertes x_1 den Radikanden in der Form $a = x_1^2 + (a - x_1^2)$ darstellt? Vergleiche damit das entsprechende Ergebnis beim Iterationsverfahren (I).

16. Von Heron (um 62 n. Chr.) wird angenommen, dass er für Wurzeln der Form $\sqrt{n^2 - 1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch die Näherungsformel

$$\sqrt{n^2 - 1} \approx n - \frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} \quad \text{verwandte.}$$

a) Zeige, dass die von Heron angegebene Näherung $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$ mit dieser Formel gewonnen werden kann.

b) Welcher Näherungswert ergibt sich aus obiger Formel für

1) $\sqrt{15}$, **2)** $\sqrt{63}$, **3)** $\sqrt{120}$?

c) Vergleiche die Heronsche Näherung für $\sqrt{3}$ mit der von Archimedes (um 287–212 v. Chr.) stammenden Abschätzung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Vergleiche die Ergebnisse jeweils auch mit den von deinem Taschenrechner gelieferten Näherungswerten.

17. Die Babylonier rechneten bekanntlich im Sexagesimalsystem*, also im Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60. In den Übersetzungen ihrer Keilschrifttexte werden Zahlen meist in der Form geschrieben, dass hinter die Ganzen ein Strichpunkt und zwischen Einer, Sechziger, ... bzw. zwischen Sechzigstel, 3600stel, ... jeweils ein Komma gesetzt wird. Zum Beispiel bedeutet 4,20;25,08 die Zahl $4 \cdot 60 + 20 + \frac{25}{60} + \frac{8}{3600}$.

a) Prüfe die aus einer babylonischen Wurzeltabelle stammende Gleichung $\sqrt{0;38,24} = 0;48$.

b) Gib den Wert von **1)** $\sqrt{3,45}$, **2)** $\sqrt{1;33,45}$, **3)** $\sqrt{11;13,21}$ im Sexagesimalsystem an.

18. Die Keilschrifttafel VAT 6598 (Abbildung 48.1) enthält folgende Aufgabe: Ein Tor. $\frac{1}{2}$ GAR und 2 Ellen Höhe, 2 Ellen Weite. Seine Diagonale ist was?

a) Wie viel Ellen misst die Diagonale, wenn 1 GAR = 12 Ellen** gilt?

b) Auf der Tafel wird für die Länge der Diagonale der Wert 0;41,15 GAR angegeben. Zeige, dass dies keine exakte Lösung ist und dass sie sich nach der Näherungsformel von Aufgabe **14** ergibt, wenn

* sexagesimus (lat.) = der sechzigste

** 1 GAR bedeutet etwa 6 Meter, 1 babylonische Elle also etwa 5 dm.

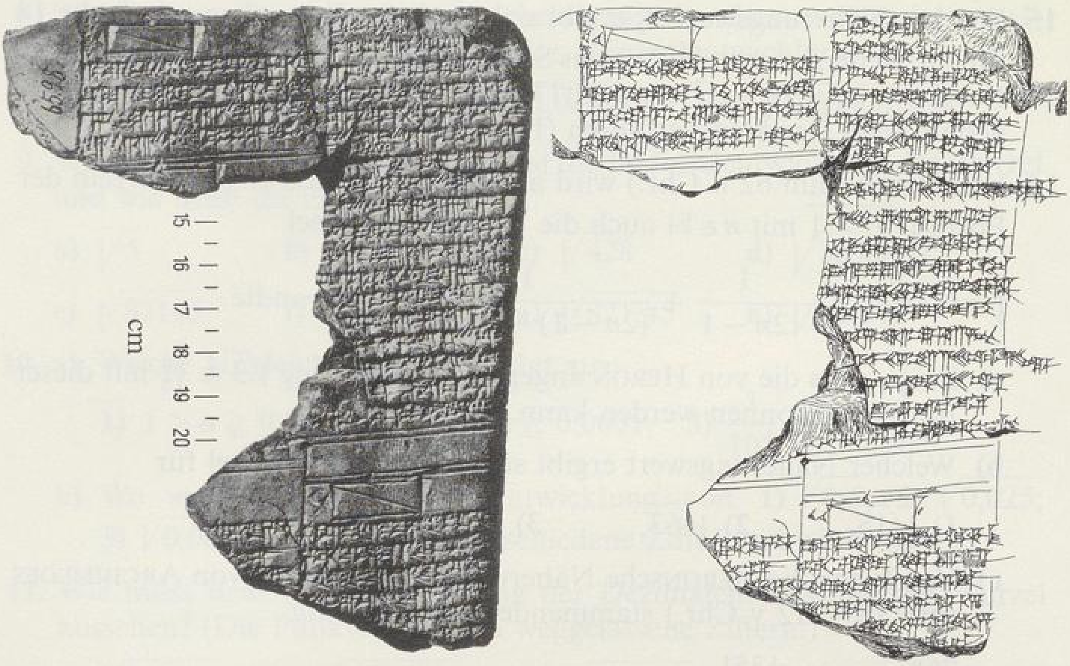


Abb. 48.1 Rückseite der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598, aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: Vorderasiatische Abteilung; Tontafeln, samt zugehöriger Autographie (wörtlich: Selbstgeschriebenes), d. h. handschriftlicher Übertragung der in den Ton eingedrückten Zeichen

man für p^2 die größte Quadratzahl wählt, die im Quadrat der Diagonalen enthalten ist.

c) Für dieselbe Aufgabe wird auf der Tafel auch noch die Lösung 0;42,13,20 GAR angegeben. Vergleiche die Genauigkeit der beiden Lösungen.

19. a) Auf der babylonischen Keilschrifttafel* AO 6484 aus Uruk aus der Zeit der SELEUKIDEN (321–63 v. Chr.) findet man für $\sqrt{2}$ den sexagesimalen Wert 1;25.

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert mit dem von deinem Taschenrechner angezeigten Wert überein?

2) Man kann nur vermuten, dass die Babylonier diese Näherung durch zweimalige Anwendung der Formel von Aufgabe 46/**14** gefunden haben, und zwar beginnend mit $p_1^2 = 1$; der sich dabei ergebende Näherungswert wird als p_2 genommen. Führe diese Rechnung durch.

•**b)** Auf der altbabylonischen Keilschrifttafel** YBC 7289 (Abbildung 49.1) steht auf der Diagonale eines Quadrats die Sexagesimalzahl 1;24,51,10.

* aufbewahrt im Louvre zu Paris in der Abteilung Antiquités Orientales
** aufbewahrt in der Yale Babylonian Collection in New Haven (USA)

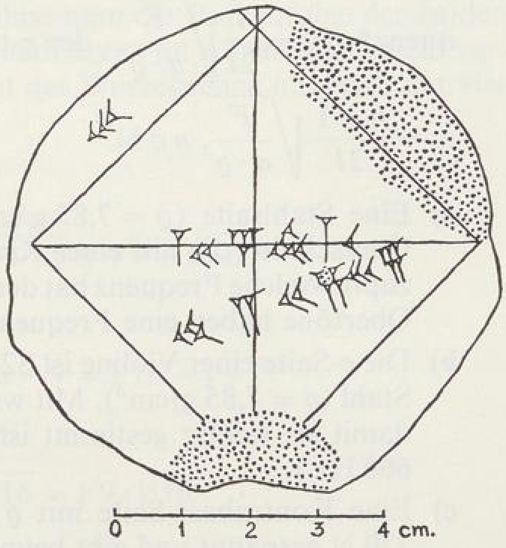


Abb. 49.1 Autographie der altbabylonischen Keilschrifttafel YBC 7289 (um 1700 v. Chr.). Auf der Quadratseite links oben liest man ‹‹‹ = 30, auf der Diagonale I‹‹ΤΤ‹‹I‹ als Näherungswert für $\sqrt{2}$. Darunter steht die entsprechende Länge der Diagonale.

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert für $\sqrt{2}$ mit dem von deinem Taschenrechner hierfür angezeigten Wert überein?

2) Wie die Babylonier diesen recht genauen Wert gefunden haben, wissen wir nicht. Nahe liegend erscheinen die beiden folgenden Verfahren.
1. Art: Man führt zuerst das in **a 2** beschriebene Näherungsverfahren noch einen Schritt weiter.
2. Art: Man wendet zuerst auf 1;25 das Iterationsverfahren (I) von Seite 38f. einmal an.
Zeige, dass man jedes Mal $1\frac{169}{408}$ als Näherungswert erhält. Rechnet man dann diesen Bruch in eine Sexagesimalzahl um* und bricht nach der 3. Sexagesimalstelle hinter dem Semikolon ab, so erhält man die auf der Diagonale stehende Zahl. Weise dies nach.

3) Berechne mit Hilfe dieses Näherungswerts die Länge der Diagonale als Sexagesimalzahl, wenn die Quadratseite die Länge 30 hat. (Abbildung 49.1)

20. Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0 °C beträgt $c_0 = 331{,}6\ \mathrm{m/s}$. Sie nimmt mit steigender Temperatur zu, und zwar gilt bei der Lufttemperatur t (in °C): $c = c_0 \sqrt{1 + \dfrac{1}{273{,}2\ \mathrm{K}}\, t}$.

a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C bzw. 40 °C?

b) Bei welcher Temperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit 325 m/s?

21. Wenn eine schwingende Saite von der Länge l, dem Querschnitt q und der Dichte ϱ mit einer Kraft F gespannt ist, dann hat ihr Grundton die Fre-

* Beispiel einer Umrechnung:

$$\frac{3}{35} = \frac{\frac{3}{35}\cdot 60}{60} = \frac{\frac{36}{7}}{60} = \frac{5+\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}}{60} = \frac{5}{60} + \frac{\frac{1}{7}\cdot 60}{3600} = \frac{5}{60} + \frac{8}{3600} + \frac{\frac{4}{7}\cdot 60}{216000} = 0;05,08,\ldots$$

quenz* $\nu_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}}$, der n-te Oberton die Frequenz

$$\nu_n = \frac{n+1}{2l}\sqrt{\frac{F}{q \cdot \varrho}},\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Eine Stahlsaite ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$) von 1,00 m Länge und 0,50 mm² Querschnitt, die mit einer Kraft von 160 N gespannt ist, wird angezupft. Welche Frequenz hat der dabei erklingende Grundton? Wie viele Obertöne haben eine Frequenz unter 2 kHz?

b) Die e-Saite einer Violine ist 32,5 cm lang; sie ist 0,35 mm dick und aus Stahl ($\varrho = 7{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$). Mit welcher Kraft muss sie gespannt werden, damit sie richtig gestimmt ist? (Die Frequenz des Tones e″ beträgt 660 Hz.)

c) Eine Kontrabass-Saite mit $\varrho = 7{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$ und $q = 6{,}2\ \mathrm{mm^2}$ ist mit 370 N gespannt und gibt beim Anstreichen den Ton $_1$E (so genanntes Kontra-E) mit 41 Hz. Wie viel cm ist diese Saite lang?

2.3 Rechenregeln für Quadratwurzeln

Aus Definition 33.1 folgt unmittelbar, dass $(\sqrt{a})^2 = a$ gilt. Das Ziehen der Quadratwurzel und anschließendes Quadrieren heben sich also auf. Gilt das auch für die umgekehrte Reihenfolge dieser beiden Rechenschritte? Dass dies nicht zutrifft, zeigt folgendes

Beispiel: $(-2)^2 = 4$; $\sqrt{4} = 2$; also $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Wegen $|-2| = 2$ gilt aber $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$.

Das führt uns zu

Satz 50.1: Für jede reelle Zahl a gilt $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$.

Beweis: $\sqrt{a^2}$ ist nach Definition 33.1 die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a^2$. Diese Gleichung hat für $a \neq 0$ die beiden Lösungen a und $-a$. Je nachdem, ob $a > 0$ oder $a < 0$ gilt, ist a oder $-a$ die positive Lösung. Für $a = 0$ ist $x = 0 = \sqrt{0^2}$ die einzige Lösung.
Somit gilt:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

also $\sqrt{a^2} = |a|$.

* frequentia (lat.) = die Häufigkeit; Frequenz = Zahl der Schwingungen pro Sekunde, Einheit 1/s = 1 Hz (1 Hertz) zu Ehren von Heinrich HERTZ (1857–1894), dem Entdecker der elektromagnetischen Wellen

Die vorausgehende Überlegung zeigt, dass man die Reihenfolge der beiden Rechenschritte »Wurzelziehen« und »Quadrieren« im Allgemeinen nicht vertauschen darf. Kann man aber vielleicht das Wurzelziehen mit einer der vier Grundrechenarten vertauschen?

Beispiele:

1) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\\ \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9}+\sqrt{16}$

2) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\\ \sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{16-9} \neq \sqrt{16}-\sqrt{9}$

3) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12\\ \sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$

4) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{9:16}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\\ \sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4=\frac{3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{9:16}=\sqrt{9}:\sqrt{16}$

Die Beispiele 1 und 2 *beweisen*, dass man die Reihenfolge von Wurzelziehen und Addieren bzw. Subtrahieren nicht vertauschen darf. Die beiden anderen Beispiele lassen jedoch *vermuten*, dass beim Multiplizieren und Dividieren die Vertauschung zulässig ist.
Tatsächlich gilt

Satz 51.1:

1) Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$.

2) Für $a \geqq 0$ und $b > 0$ gilt $\boldsymbol{\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}}$, oder $\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$.

Beweis von **1**: Aus $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ folgt $a\cdot b \geqq 0$; alle drei Wurzeln sind definiert.
Aus $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = a\cdot b$ folgt, dass $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = ab$ darstellt, also gleich $\sqrt{ab}$ ist.

Beweis von **2**: Nach **1** gilt $\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{b\cdot\frac{a}{b}}$,

$$\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a}, \qquad \|:\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Die Regel **1** von Satz 51.1 lässt sich natürlich auch auf mehr als zwei Faktoren ausdehnen. So gilt z. B.

$\sqrt{abc} = \sqrt{a(bc)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{bc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}\,.$

Im Sonderfall von n gleichen Faktoren erhält man

Satz 52.1: Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$.

Als Anwendungen der bisher gefundenen Rechengesetze treten besonders häufig folgende Fälle auf:

Teilweises Wurzelziehen (partielles Radizieren): Lässt sich aus dem Radikanden ein quadratischer Faktor abspalten, so kann man aus diesem die Wurzel ziehen.

Beispiele:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{a^2 b^3 c^4} = \sqrt{a^2 b^2 c^4 \cdot b} = \sqrt{a^2 b^2 c^4} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot |b| \cdot c^2 \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{2(a-b)^2} = |a-b| \cdot \sqrt{2}$$

Einen Faktor unter die Wurzel nehmen: Es handelt sich hier um die Umkehrung des partiellen Radizierens.

Beispiele:

$$2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28}$$

$$-5 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{5^2 \cdot 3} = -\sqrt{75}$$

$$a \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} |a| \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, & \text{falls } a \geqq 0 \\ -|a| \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beachte also, dass man nur nicht negative Faktoren durch eine Quadratwurzel darstellen kann.

Rationalmachen des Nenners: Dabei geht es darum, Wurzeln, die im Nenner eines Bruches auftreten, zu beseitigen.

Beispiele:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{7-5} =$$

$$= \frac{\sqrt{21}+\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{21}+\sqrt{15})$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{ab}}{a^2}$$

Aus $a = b$ folgt, falls a und b nicht negativ sind, die Gleichung $\sqrt{a} = \sqrt{b}$; umgekehrt erhält man durch Quadrieren daraus wieder $a = b$. Also sind, falls $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$, die beiden Gleichungen $a = b$ und $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ äquivalent. Gilt eine entsprechende Feststellung auch für Ungleichungen?

Beispiele:

$4 < 49$ liefert $\sqrt{4} < \sqrt{49}$; richtig, weil $2 < 7$.

$0 < 5$ liefert $\sqrt{0} < \sqrt{5}$; richtig, denn $0 < 2{,}23\ldots$

$2{,}25 > 0{,}36$ liefert $\sqrt{2{,}25} > \sqrt{0{,}36}$; richtig, da $1{,}5 > 0{,}6$.

Vermutlich gilt also

Satz 53.1: Monotoniegesetz des Radizierens

Für $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$ gilt: $\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}}$.

Beweis: 1) $\Leftarrow$: Aus der Voraussetzung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ und $\sqrt{a} \geqq 0$ folgt $\sqrt{b} > 0$. Wir multiplizieren die Ungleichung $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ mit $\sqrt{a}$ bzw. $\sqrt{b}$:

$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert\cdot\sqrt{a}$	$\sqrt{a} < \sqrt{b} \quad \Vert\cdot\sqrt{b}$
$a \leqq \sqrt{ab}$.	$\sqrt{ab} < b$.

Somit ist $a \leqq \sqrt{ab} < b$, also $a < b$.

2) $\Rightarrow$: Vorausgesetzt ist nun $0 \leqq a < b$. Die Annahme $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$ hätte nach **1** die Ungleichung $a \geqq b$ zur Folge, also einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher gilt: $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ c) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}$
d) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{10^7}\cdot\sqrt{10^3}$ f) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}001}$
g) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{14{,}4}$ h) $\sqrt{0{,}625}\cdot\sqrt{10^3}$ i) $\sqrt{1960}\cdot\sqrt{0{,}1}$
k) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}4}$ l) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{0{,}9}$ m) $\sqrt{0{,}121}\cdot\sqrt{4{,}9}$
n) $\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$ o) $\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{\frac{28}{3}}$ p) $\sqrt{14\frac{17}{35}}\cdot\sqrt{11\frac{2}{3}}$

2. a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{40}$
c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ d) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{15}$
e) $\sqrt{0{,}35}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2{,}1}$ f) $\sqrt{1{,}2}\cdot\sqrt{0{,}02}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{0{,}8}$
g) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot\sqrt{1{,}75}$ h) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{2{,}2}\cdot\sqrt{\frac{18}{11}}\cdot\sqrt{7{,}5}\cdot\sqrt{16{,}8}$

3. a) $\sqrt{16\cdot 121}$ b) $\sqrt{625\cdot 49\cdot 100}$ c) $\sqrt{0{,}01\cdot 144\cdot 225}$
d) $\sqrt{0{,}36\cdot 2^4\cdot 5^2}$ e) $\sqrt{3^6\cdot 1{,}69\cdot 7^2}$ f) $\sqrt{5^4\cdot 2^8\cdot 11^2}$
g) $\sqrt{(2\cdot 3^2)\cdot(5^6\cdot 2^3)}$ h) $\sqrt{(3\cdot 5^2\cdot 7)\cdot 84}$ i) $\sqrt{(2^3\cdot 11\cdot 3^5)\cdot 297\cdot 8}$

4. Vereinfache durch teilweises Radizieren:
a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{180}$ d) $\sqrt{176}$
e) $\sqrt{216}$ f) $\sqrt{1250}$ g) $\sqrt{9000}$ h) $\sqrt{2{,}5}$
i) $\sqrt{40{,}5}$ k) $\sqrt{0{,}00625}$

5. a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{243}}$ d) $\dfrac{\sqrt{176}}{\sqrt{275}}$
e) $\sqrt{32{,}4}:\sqrt{0{,}1}$ f) $\sqrt{0{,}294}:\sqrt{2{,}4}$ g) $\sqrt{0{,}098}:\sqrt{22{,}05}$

6. a) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{75}}\cdot\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}}$ b) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{24}}\cdot\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{700}}$ c) $\dfrac{\sqrt{24{,}5}}{\sqrt{192}}:\dfrac{6}{\sqrt{54}}$ d) $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{450}}:\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{2025}}$

7. Vereinfache:
a) $\sqrt{ab^4}$ b) $\sqrt{a^2b^2}$ c) $\sqrt{25m^{10}n^3}$ d) $\sqrt{27x^8y^4}$
e) $\sqrt{\dfrac{32}{a^2}\cdot\dfrac{b}{25}}$ f) $\sqrt{\dfrac{250m^3}{n^2}:\dfrac{2n^2}{m^2}}$ g) $\sqrt{\dfrac{1{,}21uv^2w^4}{192}}$

8. a) $(\sqrt{8}-3\sqrt{18}+2\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$ b) $(3\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{80})\cdot 2\sqrt{5}$
c) $\frac{1}{3}\sqrt{6}\,(8\sqrt{12}-2\sqrt{24}+\sqrt{75})$ d) $\frac{1}{5}\sqrt{15}\,(2\sqrt{45}+3\sqrt{135}-3\sqrt{20})$

9. **a)** $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **b)** $(6\sqrt{5}-5\sqrt{6})(5\sqrt{6}-6\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{14}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{7})$ **d)** $(5\sqrt{11}-2\sqrt{10})(-\sqrt{55}-2\sqrt{2})$

10. **a)** $[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{22}]\cdot[(2\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{22}]$

b) $[2\sqrt{15}+(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]\cdot[2\sqrt{15}-(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})]$

11. **a)** $(5\sqrt{2}+\sqrt{18})^2$

b) $(2\sqrt{5}-\sqrt{18})^2$

c) $(\sqrt{20}-3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$

d) $(\sqrt{320}-2\sqrt{70})^2-(\sqrt{240}-6\sqrt{10})^2$

12. Beispiel: $\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}}$

Mache bei den folgenden Quotienten den Nenner rational:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{-2}{\sqrt{19}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}}$

e) $\dfrac{2}{3\sqrt{11}}$ **f)** $\dfrac{6+10\sqrt{1{,}2}}{5\sqrt{1{,}2}}$ **g)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$ **h)** $\dfrac{7\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}$

13. Mache die Nenner rational.

a) $\dfrac{1}{3+\sqrt{10}}$ **b)** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **e)** $\dfrac{1-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{8}}{3\sqrt{14}+\sqrt{7}}$

14. Beseitige die Wurzeln im Nenner.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2b}}$ **b)** $\dfrac{2b^2}{\sqrt{8a^2b^5c}}$ **c)** $\dfrac{2a^3}{\sqrt{6a^4b^3c^3}}$

d) $\dfrac{a^3b}{\sqrt{a^6b}}$ **e)** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p\sqrt{q}+q\sqrt{p}}$

15. Beispiel: $\mathbf{(\sqrt{2})^3=(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}}$.

a) $(\sqrt{2})^4$ **b)** $(\sqrt{2})^{10}$ **c)** $(\sqrt{2})^{11}$ **d)** $(\sqrt{2})^{15}$ **e)** $(\sqrt{2})^{18}$

f) $(\sqrt{3})^3$ **g)** $(\sqrt{11})^2$ **h)** $(\sqrt{7})^5$ **i)** $(\sqrt{3})^8$ **k)** $(\sqrt{5})^9$

16. Beispiel: $\sqrt{7^5} = \sqrt{7^4 \cdot 7} = 7^2 \cdot \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$.

a) $\sqrt{2^6}$ **b)** $\sqrt{3^5}$ **c)** $\sqrt{5^3}$ **d)** $\sqrt{8^2}$ **e)** $\sqrt{6^3}$

f) $\sqrt{11^4}$ **g)** $\sqrt{3^9}$ **h)** $\sqrt{2^{10}}$ **i)** $\sqrt{2^{13}}$ **k)** $\sqrt{2^{20}}$

17. a) $(\sqrt{2})^5 + (\sqrt{8})^4 - 2\sqrt{2^3}$ **b)** $((\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5^3}$

c) $(\sqrt{7^4} + 4(\sqrt{7})^3)((\sqrt{7})^5 - 7 \cdot \sqrt{4^2})$

d) $(4\sqrt{3^3} + (\sqrt{2})^5) : (8(\sqrt{3})^7 + 9\sqrt{2^7})$

18. Vereinfache:

a) $(\sqrt{a})^3$ **b)** $(\sqrt{a})^4$ **c)** $(\sqrt{a})^7$ **d)** $(\sqrt{a})^{2n}$ **e)** $(\sqrt{a})^{2m+1}$

f) $\sqrt{a^2}$ **g)** $\sqrt{a^3}$ **h)** $\sqrt{a^4}$ **i)** $\sqrt{a^5}$ **k)** $\sqrt{a^6}$

19. Vereinfache:

a) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ **b)** $\sqrt{2m^2 - 12m + 18}$

c) $\sqrt{z^4 + 2z^2 + 1}$ **d)** $\sqrt{9z^4 - 6z^2 + 1}$

e) $\sqrt{12{,}1x^2 + 4{,}4xy + 0{,}4y^2}$ **f)** $\sqrt{1 + 2|x| + x^2}$

20. Nimm, soweit dies möglich ist, die Faktoren unter die Wurzel. Achte dabei auf eventuell notwendige Fallunterscheidungen.

a) $3\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{7} \cdot 5$ **c)** $(-2)\sqrt{3-x}$ **d)** $(7-3)\sqrt{5a}$

e) $x\sqrt{y}$ **f)** $a^2\sqrt{x}$ **g)** $2b^3\sqrt{y}$ **h)** $(a-b)\sqrt{a+b}$

21. Welche Größenbeziehung besteht zwischen folgenden Zahlenpaaren?

a) $\sqrt{17}$ und $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{381}$ und $\sqrt{247}$

c) $\sqrt{a^2+2}$ und $\sqrt{a^2+1}$ **d)** $\sqrt{0{,}75}$ und $\sqrt{\frac{3}{4}}$

e) $\sqrt{0{,}1}$ und $\sqrt{0{,}01}$ **f)** $\sqrt{\frac{37}{81}}$ und $\sqrt{0{,}457}$

• **22.** Es sei $0 < a < 1$ und $b > 1$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen

a) $\sqrt{a}$ und a, **b)** $\sqrt{b}$ und b, **c)** $\sqrt{a^7}$ und $(\sqrt{a})^8$,

d) $(\sqrt{b})^3$ und $\sqrt{b^5}$, **e)** $\sqrt{a^3b^2}$ und $b\sqrt{a^5}$, **f)** $\sqrt{a^3b}$ und $a\sqrt{ab^3}$?

23. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9} + \sqrt{16}$, **b)** $\sqrt{5^2 + 10^2}$ und $\sqrt{5^2} + \sqrt{10^2}$,

c) $\sqrt{625 - 49}$ und $\sqrt{625} - \sqrt{49}$, **d)** $\sqrt{225 - 25}$ und $\sqrt{225} - \sqrt{25}$?

24. **a)** Beweise: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

b) Beweise: $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$. (Hinweis: Quadriere!)

25. Zeige, dass die Zahlen x und y gleiche Quadrate haben. Warum sind trotzdem die Zahlen selbst nicht gleich?

a) $x = 3 - 2\sqrt{3}$; $\quad y = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$

b) $x = \sqrt{14 - 8\sqrt{3}}$; $\quad y = \sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

26. Mit Hilfe von Quadratwurzeln kann man dieselbe Zahl auf sehr unterschiedliche Art darstellen. Weise nach, dass die folgenden Gleichungen richtig sind:

a) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ **b)** $2 + \sqrt{5} = \sqrt{4\sqrt{5} + 9}$

c) $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ **d)** $\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{2} + 4} = \sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{\sqrt{2}}$

•**27.** Beispiele wie die von Aufgabe **26** lassen sich auf zwei Rechenregeln zurückführen, die in geometrischer Fassung schon bei Euklid (um 300 v. Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, in algebraischer Form z. B. im arabischen Euklid-Kommentar des al-Nayrizi († 922) und im indischen *Bidscha-ganita* – »Samen der Rechenkunst« – von Bhāskara II (1115–nach 1178) vorkommen: Für $0 \leqq a \leqq b$ gilt

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad \text{und} \quad \sqrt{b}-\sqrt{a} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

a) Beweise diese Regeln.

b) Warum existiert $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ für beliebige positive Zahlen a und b? (Hinweis: Aufgabe 45/**6**)

c) Bereits Abu Kamil (um 850–930) berechnet in seinem *al-kitab fi al-dschabr wa-'l-muqabala* mit diesen Formeln $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$ und $\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{2}$. Bestätige diese Ergebnisse **1)** unter Verwendung der obigen Formeln, **2)** ohne Verwendung dieser Formeln.

d) Vereinfache die folgenden Terme mit Hilfe der obigen Formeln:

1) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (arabisch, um 1100)

2) $(\sqrt{\sqrt{40}+6} + \sqrt{\sqrt{40}-6})^2$ (Luca Pacioli [um 1445–1517], *Summa*, 1494)

3) $(\sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}})^2$ (Michael Stifel [1487?–1567], *Arithmetica integra*, 1544)

28. Überprüfe die folgenden Beispiele aus der altindischen Mathematik:

a) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

b) $\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}} = \sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$

**2.4 Zur Geschichte der irrationalen Zahlen

Eine der größten Leistungen der griechischen Mathematik ist die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken, d.h. der Existenz von Streckenverhältnissen, die nicht mehr durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden können. Sie führte schließlich zum Begriff der irrationalen Zahl. Es überrascht, dass die Ägypter, erst recht die Babylonier, die ja bereits um 1800 v. Chr. erhebliche mathematische Kenntnisse besaßen – du wirst später davon noch mehr hören –, das Problem, ob es zu zwei Strecken stets ein gemeinsames Maß gibt, überhaupt nicht erkannten. Es überrascht noch mehr, dass die Griechen dieses Problem zu einer Zeit erkannten und auch zu lösen verstanden, als ihre Mathematik noch in den Kinderschuhen steckte. Noch erstaunlicher ist es, dass durch kein Dokument belegt ist, wann und durch wen diese ungeheuere Entdeckung erfolgte, obwohl die Griechen die Tragweite dieser Entdeckung erfassten.*

Der früheste Bericht von dieser Entdeckung ist die Stelle 147c des Dialogs *Theätet*, den PLATON (428–348 v. Chr.) im Jahre 368 v. Chr. verfasste, kurz nachdem sein Schüler, der Mathematiker THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.), in einer Schlacht tödlich verwundet worden war. In diesem Dialog, der im Jahre 399 v. Chr., dem Todesjahr des SOKRATES, spielt, zeigt ein alter Mathematiker, nämlich THEODOROS VON KYRENE (um 465 bis um 385 v. Chr.), dass die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt eine der Nichtquadratzahlen von 3 bis 17 ist, irrational ist. Bei 17, so heißt es, »hielt er zufällig inne«. Von einem Quadrat des Inhalts 2 wird nichts gesagt! Also muss der Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ älter sein. Der in den meisten Codices als Nachtrag zu Buch X von EUKLIDS *Elementen* (um 300 v. Chr.) überlieferte arithmetische Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist sprachlich weitaus schwerfälliger als die sonstige Diktion der *Elemente*; das weist darauf hin, dass er aus alter Zeit stammt. Auf alle Fälle scheint $\sqrt{2}$ die erste Zahl zu sein, deren Irrationalität arithmetisch und nicht nur geometrisch bewiesen wurde (siehe Aufgabe 12/**4**). Mit größter Wahrscheinlichkeit wurde aber die Irrationalität nicht am Quadrat entdeckt, sondern am regelmäßigen Fünfeck bzw. am Pentagramm (Abbildung 9.1), dem Erkennungszeichen des Geheimbundes der PYTHAGOREER (Aufgabe 13/**11**).

Einstimmig sind spätantike Autoren der Meinung, dass der Philosoph** HIPPASOS aus Metapont/Unteritalien (2. Viertel des 5. Jh.s v. Chr.), der noch ein unmittelbarer Schüler des PYTHAGORAS (um 570–um 497 v. Chr.) sein könnte, die Entdeckung des Irrationalen an die Öffentlichkeit gebracht hat. Ansonsten wird von ihm noch berichtet, dass er musikalische Experimente an Metallscheiben verschiedener Dicke und an mit Wasser gefüllten Röhren ausgeführt und sich außerdem mit Proportionen und Mitteln (siehe Aufgabe 45/**6**) beschäftigt habe. Aber zurück zum Irrationalen!

IAMBLICHOS aus Chalkis/Koile-Syrien (um 250–um 330 n. Chr.) berichtet uns:
»HIPPASOS habe als Erster die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel, d.h. die Umkugel des Dodekaeders [Abbildung 59.1], öffentlich beschrieben und sei deshalb wie ein Gottloser im Meer umgekommen.«

Und an späteren Stellen lesen wir bei ihm:
»Einige sagen auch, ihm sei dies widerfahren, weil er das Geheimnis des Unaussprechbaren [siehe unten] und des Inkommensurablen verraten habe.«

* ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) kommt z. B. nicht weniger als 26-mal in seinen Werken auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat zu sprechen.

** φιλόσοφος (philósophos) ist eine Wortschöpfung der PYTHAGOREER und bedeutet Freund der Weisheit.

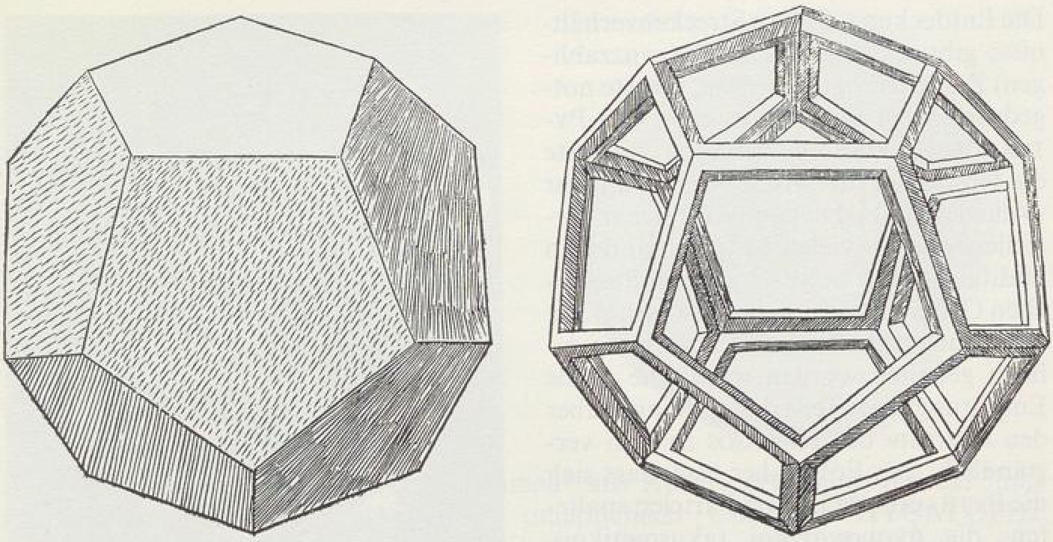


Abb. 59.1 Das Dodekaeder (= Zwölfflach)*, ein von 12 regelmäßigen ebenen Fünfecken begrenzter Körper, links als Vollkörper, rechts als Hohlkörper, gezeichnet von LEONARDO DA VINCI (1452–1519) für die 1509 erschienene *Divina Proportione* seines Freundes Luca PACIOLI (um 1445–1517).

»Denjenigen aber, welcher als erster die Natur des Kommensurablen und des Inkommensurablen solchen eröffnete, die nicht würdig waren an der Lehre teilzuhaben, sollen die Pythagoreer so tief verabscheut haben, dass sie ihn nicht nur aus der Lehr- und Lebensgemeinschaft ausschlossen, sondern ihm [zu Lebzeiten] auch ein Grabmal errichteten mit der Begründung, ihr einstiger Gefährte sei aus dem Leben unter den Menschen ausgeschieden.«
Nirgends wird also berichtet, dass HIPPASOS der Entdecker des Irrationalen sei; nur als Verräter wird er dingfest gemacht. Man neigt jedoch heute dazu, ihn auch für den Entdecker zu halten. Warum aber die ganze Aufregung über den Frevler und den Verrat?
Um die Frage beantworten zu können müssen wir mehr über die PYTHAGOREER wissen. In seiner *Metaphysik* berichtet uns ARISTOTELES (384–322 v. Chr.), die PYTHAGOREER »sahen in den [natürlichen] Zahlen die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonie [. . . und da] die Zahlen das erste in der ganzen Natur, so nahmen sie auch an, die Elemente der Zahlen seien die Elemente alles Seienden und die ganze Welt sei Harmonie und Zahl. [. . .] Alles führen sie auf die Zahlen zurück.« Anders ausgedrückt: PYTHAGORAS und seine Schüler waren der Meinung, dass irgend zwei Dinge dieser Welt stets in einem Verhältnis zueinander stehen, das durch zwei natürliche Zahlen, d.h. durch einen Bruch, ausgedrückt werden kann. Als Beispiel diene die Musik: Man erhält die Oktave bzw. die Quint zu einem Ton, wenn man die ihn erzeugende Saite im Verhältnis 2 : 1 bzw. 3 : 2 verkürzt:

* δωδεκάεδρος (dodekáedros) = *zwölfsitzig, mit zwölf Grundlagen* aus δώδεκα (dódeka) = *zwölf* und ἡ ἕδρα (he hédra) = *der Sitz, die Grundlage*. Das Fachwort δωδεκάεδρον (dodekáedron) verwendet EUKLID in Buch XI seiner *Elemente*.

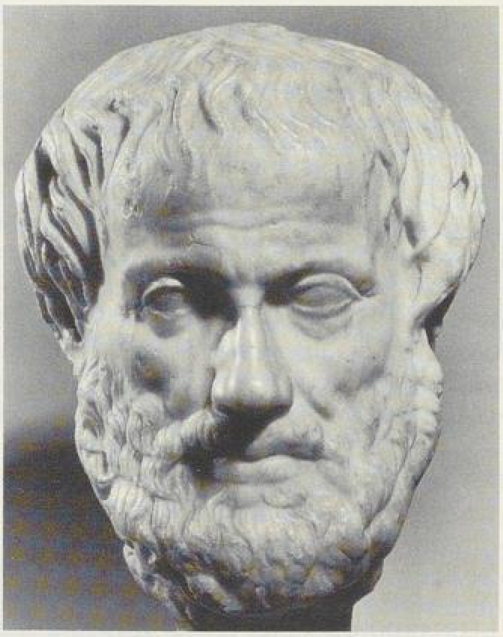


Abb. 60.1 ARISTOTELES (384 Stagira/Thrakien – 322 Chalkis/Euböa). Römische Kopie nach einem um 325 v. Chr. entstandenen griechischen Original. Wien, Kunsthistorisches Museum

Die Entdeckung, dass es Streckenverhältnisse gibt, zu denen es keine (ganzzahligen) Zahlenverhältnisse gibt, musste notgedrungen zu einer Krise unter den PYTHAGOREERN führen; denn sie zerstörte die Grundlage ihrer Weltanschauung, ihr »Alles ist Zahl«. Du kannst dir sicher vorstellen, dass es vielen Mitgliedern des in Süditalien auch politisch sehr einflussreichen Geheimbundes lieber gewesen wäre, wenn diese umwälzende Entdeckung geheim gehalten worden wäre. Die große Empörung eines Teils der Anhänger über den »Verrat« des HIPPASOS ist also verständlich. Die Folge aber war, dass sich die PYTHAGOREER in zwei Parteien spalteten, die ἀκουσματικοί (akusmatikói), d.h. die Hörer, die ohne tiefere Einsicht auf das Wort des Meisters schworen und der alten Lehre anhingen, und die μαθηματικοί (mathematikói), d.h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden, also die Gruppe um HIPPASOS, die durch ihre geistige Schulung in der Lage waren das Neue zu begreifen.* Bezeichnenderweise stellten sich die Mathematikoi bei den Unruhen in Unteritalien um 445 v. Chr. auf die Seite des Volkes, die Akusmatikoi dagegen auf die Seite des herrschenden Adels. Die wechselhaften Ereignisse führten schließlich dazu, dass zuerst die Akusmatikoi und später die Mathematikoi aus Unteritalien vertrieben wurden, sodass um 350 v. Chr. der pythagoreische Bund jede Bedeutung verloren hatte.

PLATON lernte 388/387 in Unteritalien bei ARCHYTAS VON TARENT pythagoreisches Gedankengut kennen. In seinem letzten Werk, den *Νόμοι* (Nómoi) – »Gesetze« –, das erst nach seinem Tode bekannt wurde, zeigt sich, wie beeindruckt PLATON von der Entdeckung der irrationalen Verhältnisse war. Er spricht dort an der Stelle 819/820 von einer »lächerlichen und schimpflichen Unwissenheit, die allen Menschen innewohnt«, ehe sie davon erfahren haben, und bekennt: »Mich selbst ergriff durchaus Verwunderung, als ich spät [hier übertreibt er!] davon hörte. Es kam mir vor, als wäre so etwas [nämlich ein solches Unwissen] bei den Menschen gar nicht möglich, sondern eher bei einer Herde von Schweinen. Und ich schämte mich, nicht nur für mich selbst, sondern für alle Griechen.« In diesen Worten kommt auch zum Ausdruck, dass sich die Kenntnis von der Existenz irrationaler Verhältnisse noch nicht sehr verbreitet hatte. Und PLATON schließt seine Betrachtung über das Irrationale mit den Worten: »Das ist eins von den Dingen, welches nicht zu wissen wir für eine große Schande erklärten; es aber zu kennen ist nichts besonders Rühmenswertes!«

* ἀκούειν (akúein) = *hören*, *vernehmen*; ἄκουσμα (ákusma) = *das Gehörte*, *die Lehre*.
μαθηματικός (mathematikós) = *lernbegierig*, *gelehrig* kommt von μανθάνειν (manthánein) = *lernen*, *erlernen*, *verstehen*, *einsehen* und hängt zusammen mit μάθημα (máthema) = *das Gelernte*, *die Kenntnis*, *das Wissen*.

Abb. 61.1 Rückseite zweier Tetradrachmen* aus Abdera (Ἄβδηρα) mit der links oben beginnenden, im Uhrzeigersinn umlaufenden Umschrift ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ (= Pythagores), geprägt zwischen 430 und 420 v. Chr., vermutlich PYTHAGORAS darstellend. $\varnothing = 2{,}4$ cm; links 13,98 g,** rechts 13,08 g.

Die Entdeckung, dass die Diagonalen des Fünfecks und des Quadrats nicht durch den griechischen Zahlbegriff erfasst werden können, dass sie aber andererseits als Strecken exakt vorhanden sind, hatte weit reichende Folgen für die weitere Entwicklung der griechischen Mathematik. Man wandte sich nämlich von der Arithmetik, der Lehre von den Zahlen, ab und betrieb Mathematik als Geometrie. In ihr konnte, auch mit Strecken irrationaler Länge, das von den griechischen Philosophen geforderte Ideal der Exaktheit verwirklicht werden.

Einen großen Schritt weiter brachte EUDOXOS VON KNIDOS (um 400–347 v. Chr.) die Mathematik: Es gelingt ihm, eine geometrische Proportionenlehre auch für inkommensurable Streckenverhältnisse zu schaffen. Dabei führt er bewusst den Begriff der Größe (μέγεθος [mégethos]) in die Mathematik ein, was auf eine Erweiterung des Zahlbegriffs bis hin zur reellen Zahl hinausläuft. EUKLIDS Buch V der *Elemente* geht praktisch auf EUDOXOS zurück. Im recht schwierigen Buch X, das vermutlich von THEAITETOS stammt, wird die Theorie der irrationalen Größen geometrisch weiter ausgebaut. Aber EUDOXOS wurde erst 2000 Jahre später voll verstanden. In ihren Beweisen schlagen sich die Griechen immer auf die sichere Seite: Sie bevorzugen geometrische Beweise vor algebraischen Überlegungen, da irrationale Zahlen ihnen unvorstellbar waren. Auch DIOPHANT (um 250 n. Chr.), der mit seinen *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (Arithmetikōn biblía) – »Bücher über die Zahlenlehre« – algebraisches Denken wieder aufnimmt, vermeidet es stets durch entsprechende Wahl der Koeffizienten, dass solche Zahlen als Lösungen einer Gleichung auftreten.

Erst den Arabern gelingt es, langsam die Algebra von ihrer geometrischen Verkleidung zu befreien. Es ist insbesondere ein Verdienst AL-BAGDADIS (um 1100), dass er in seinem Kommentar zu Buch X von EUKLIDS *Elementen*, den GERHARD VON CREMONA (1114–1187) übersetzt, Zahlenbeispiele mit Wurzeln vorführt. Es entwickelt sich eine

* Eine Tetradrachme ist ein silbernes Vier-Drachmen-Stück. Das Monatsgehalt eines Lehrers im 2. Jh. v. Chr. betrug etwa 12 Tetradrachmen.

** Diese Münze ist die erste in einer Reihe ähnlicher Prägungen, bei denen der für die Prägung zuständige Jahresbeamte der Stadt Abdera seinen Namen mit einer berühmten Gestalt der griechischen Geschichte oder Sagenwelt in Verbindung brachte. Der Beamte PYTHAGORES wählte ein idealisiertes Portrait seines berühmten Namensvetters, des Philosophen und Mathematikers PYTHAGORAS.

Kunst des Rechnens mit Wurzeln, wie du sie in **2.3** gelernt hast. LEONARDO VON PISA (um 1170 bis nach 1240), der sein Wissen von den Arabern bezog, ließ in seinem *liber abaci* (1202) irrationale Zahlen sowohl als Lösungen wie auch als Koeffizienten von Gleichungen zu (Aufgabe 79/**3** und 82/**4e**, **f**). Allmählich wird das Rechnen mit irrationalen Zahlen zu einer Selbstverständlichkeit. Schreibt doch um 1460 Frater FRIDERICUS AMANN* († 1465) in einem algebraischen Traktat des *Codex latinus monacensis 14908*: »Wer mit den surdischen [d.h. irrationalen (siehe unten)] Zahlen, ihrem Addieren und ihrem Subtrahieren, den Binomen [...] und den anderen irrationalen Größen nicht umzugehen weiß, der versteht in der Arithmetik nichts Besonderes.«** Dennoch sind diese surdischen Zahlen für ihn keine Zahlen. »Surdus numerus non est numerus« schreibt er. Auch Michael STIFEL (1487?–1567) diskutiert diese Frage 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« –, obwohl er zu einem vertieften Verständnis der Irrationalzahl gelangt ist: »So, wie also eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist auch eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie gewissermaßen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.«*** Dieser Nebel der Unendlichkeit sind wohl die unendlichen Dezimalzahlen, mit denen man die irrationalen Zahlen darstellen kann. Erst dadurch, dass 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* mit Hilfe des Strahlensatzes auch das Produkt zweier Strecken a und b wieder als Strecke darstellt (Abbildung 62.2) – bis dahin wurde dieses Produkt immer als Fläche interpretiert –, gelingt eine Übertragung der geometrisch wohl definierten Irrationalitäten in die Welt der Zahlen mit ihren Rechengesetzen. Der Durchbruch ist geschafft, die irrationalen Zahlen werden als Zahlen anerkannt.

Abb. 62.1 Vorderseite der Tetradrachme von Abbildung 61.1, links; dargestellt ist ein Greif.

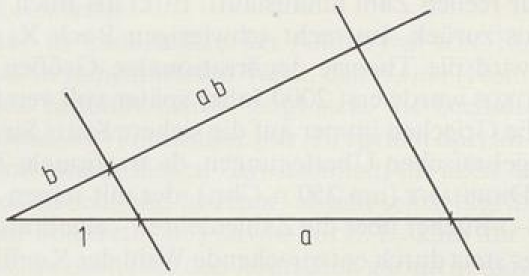


Abb. 62.2 Das Produkt *ab* als Strecke nach DESCARTES

Dennoch blieb es dem 19. Jh. vorbehalten, die irrationalen Zahlen ohne jede geometrische Begründung auf algebraischem Wege einführen zu können. Von verschiedenen Mathematikern wurden dazu verschiedene Verfahren vorgeschlagen, die alle auf das-

* Seit 1995 weiß man, dass die bisher dem FRIDERICUS GERHART († 1463) zugeschriebenen Abhandlungen von FRIDERICUS AMANN stammen und umgekehrt.

** Qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis [...] et lineis ceteris irrationalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii novit.

*** Sic igitur infinitus numerus, non est numerus: sic irrationalis numerus non est verus numerus, qui lateat sub quadam infinitatis nebula.

selbe Ergebnis hinauslaufen. Wir nennen hier die Arbeiten Richard DEDEKINDS (1831 bis 1916) und Georg CANTORS (1845–1918), beide aus dem Jahre 1872. Die Definition der reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen, die du kennen gelernt hast, geht auf die *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen* von Paul Gustav Heinrich BACHMANN (1837–1920) aus dem Jahre 1892 zurück.

Abschließend wollen wir noch die Entstehung des Fachworts **irrational** verfolgen. Nach der Entdeckung der Inkommensurabilität nannten die PYTHAGOREER ein Verhältnis aus zwei ganzen Zahlen, also unsere rationale Zahl, ῥητός (rhetós) = *aussprechbar*, ein Verhältnis aber, das sich nicht durch ganze Zahlen ausdrücken ließ, also unsere irrationale Zahl, ἄρρητος (árrhetos) = *unaussprechbar*. THEODOROS VON KYRENE (um 465–um 385), der Lehrer PLATONS, verwendet stattdessen das Gegensatzpaar σύμμετρος – ἀσύμμετρος (sýmmetros – asýmmetros), also *gemeinsam messbar – nicht gemeinsam messbar*, bezogen auf die Einheit. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415–369 v. Chr.) betrachtet Verbindungen wie $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ und $\sqrt{\sqrt{a}}$. Erstere ergeben, wenn man sie quadriert, nicht immer eine rationale Zahl. So wird z. B. $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2 = 2+8+2\sqrt{16} = 18$, also eine rationale Zahl, aber $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl. Für Größen der letzteren Art benützt THEAITETOS ein altes Wort, nämlich ἄλογος (álogos) = *sprachlos, stumm, unaussprechbar*. EUKLID (um 300 v. Chr.) übernimmt die Bezeichnung von THEAITETOS, behält aber das Gegensatzpaar des THEODOROS bei. Dadurch vermischen sich diese drei Wörter in ihrer Bedeutung. Allmählich setzt sich jedoch bei den griechischen Mathematikern ἄλογος zur Bezeichnung irrationaler Größen durch.

BOETHIUS (um 480–524?) übersetzt σύμμετρος mit *commensurabilis*, der römische Staatsmann und Gelehrte CASSIODORUS (um 490– um 583), der ebenso wie BOETHIUS in den Diensten THEODERICHS DES GROSSEN, des Ostgotenkönigs, stand, übersetzt das Gegensatzpaar mit *rationalis – irrationalis*, womit wir bei unseren Fachwörtern sind. GERHARD VON CREMONA (1114–1187) benützt sie, als er den Euklid-Kommentar des AL-NAYRIZI († um 922) übersetzt. In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* von 1544 sind sie feste Fachausdrücke. Das Wort *irrational* hatte aber lange Zeit noch einen interessanten Konkurrenten.
Das griechische ἄλογος (álogos) = *sprachlos, unaussprechbar* wird bei AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847) und anderen arabischen Mathematikern unerklärlicherweise durch das arabische Wort *aṣamm* wiedergegeben, das nicht sprachlos, sondern *taub* bedeutet. Als GERHARD VON CREMONA den Euklid-Kommentar des AL-BAGDADI (um 1100), den er dem des AL-NAYRIZI beifügt, und die *Algebra* des AL-CHARIZMI übersetzt, wählt er für *aṣamm* die wortgetreue Entsprechung, nämlich **surdus**, das dann auch LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) gerne verwendet. Michael STIFEL übernimmt es und verdeutscht die *numeri surdi* gar zu *surdische Zahlen*! Bis ins 18. Jh. bleibt *surdus* als mathematisches Fachwort lebendig. Im Englischen ist heute noch *surd number* als Fachbegriff für Irrationalzahl gebräuchlich.

Bei dieser Gelegenheit können wir dir jetzt auch den mathematischen Ursprung des Worts **Binom** erklären. Die schon bei THEAITETOS vorkommenden Summen $a+\sqrt{b}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, bei denen die Wurzeln keine ganzen Zahlen ergeben, nannte EUKLID in Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (ek dýo onomáton) = *aus zwei Namen*, wofür GERHARD VON CREMONA in seiner AL-NAYRIZI-Übersetzung kurz *binomium* sagte. In der weiteren Entwicklung (siehe *Algebra 7*, Seite 187) wurde die Bedeutung von Binom verallgemeinert zu »Summe aus zwei Summanden«.

2.5 Wurzelgleichungen

2.5.1 Einfache Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, bei welcher die Unbekannte unter einer Wurzel auftritt, bezeichnet man als Wurzelgleichung.

Beispiele:

1) $\sqrt{x} = 3$ **2)** $\sqrt{2x-5} = 7$

3) $\sqrt{4x+5} = x+2$ **4)** $\sqrt{x^2+2} = 3x$

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3}$ **6)** $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Um eine solche Gleichung lösen zu können muss man zunächst alle Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten, beseitigen. Dies geschieht durch Quadrieren der Gleichung. Dabei gilt: Jede Lösung der Ausgangsgleichung erfüllt auch die durch Quadrieren entstehende Hilfsgleichung.
Denn wenn eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ eine Lösung x_1 hat, d.h., wenn $T_1(x_1) = T_2(x_1)$ gilt, so folgt daraus auch $(T_1(x_1))^2 = (T_2(x_1))^2$; also ist x_1 auch eine Lösung der Gleichung $(T_1(x))^2 = (T_2(x))^2$.
Gehört aber umgekehrt auch jede Lösung der durch Quadrieren gewonnenen Hilfsgleichung zur Lösungsmenge der Ausgangsgleichung? Wenn ja, wäre das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Um dies zu untersuchen betrachten wir die obigen Beispiele.

1) $\sqrt{x} = 3$. Durch Quadrieren erhält man $x = 9$.
Probe: LS $= \sqrt{9} = 3 =$ RS; also $L = \{9\}$.

2) $\sqrt{2x-5} = 7 \Rightarrow 2x-5 = 49$

$$x = 27$$

Probe: LS $= \sqrt{2 \cdot 27 - 5} = \sqrt{49} = 7 =$ RS; also $L = \{27\}$.

3) $\sqrt{4x+5} = x+2 \Rightarrow 4x+5 = x^2+4x+4$

$$x^2 = 1$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{4 \cdot 1 + 5} = \sqrt{9} = 3$; RS $= 1 + 2 = 3 =$ LS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{4 \cdot (-1) + 5} = \sqrt{1} = 1$; RS $= -1 + 2 = 1 =$ LS.

Ergebnis: $L = \{1; -1\}$.

4) $\sqrt{x^2+2} = 3x \Rightarrow x^2+2 = 9x^2$

$$8x^2 = 2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}$$

Lösungen der Hilfsgleichung: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; RS $= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} =$ LS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; RS $= 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \neq$ LS.

Ergebnis: $L = \{\frac{1}{2}\}$.

5) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x - 1 = 2x + 3$

$$x = -4$$

Probe: LS $= \sqrt{-4-1}$, sinnlos! RS $= \sqrt{2 \cdot (-4) + 3}$, sinnlos!

Ergebnis: $L = \{\,\}$.

6) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn man vor dem Quadrieren die Gleichung so umformt, dass eine der beiden Seiten nur aus einer Wurzel besteht. Man spricht vom **Isolieren der Wurzel**.

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$$

$$\sqrt{2x+8} = 1 + \sqrt{5+x} \Rightarrow 2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$

Da immer noch eine Wurzel vorhanden ist, muss man noch einmal quadrieren; zuvor aber wird die Wurzel isoliert.

$$2x + 8 = 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$

$$\sqrt{5+x} = \tfrac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 5 + x = \tfrac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$\tfrac{1}{4}x^2 = 4$$

$$x^2 = 16.$$

Die wurzelfreie Hilfsgleichung hat die Lösungen $x_1 = 4$; $x_2 = -4$.

Probe mit x_1: LS $= \sqrt{2 \cdot 4 + 8} - \sqrt{5+4} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 1 =$ RS.

Probe mit x_2: LS $= \sqrt{2 \cdot (-4) + 8} - \sqrt{5-4} = \sqrt{0} - \sqrt{1} = -1 \neq$ RS.

Ergebnis: $L = \{4\}$.

Bei den ersten drei Beispielen haben die Ausgangsgleichung und die aus ihr durch Quadrieren gewonnene Hilfsgleichung jeweils dieselbe Lösungsmenge, nicht jedoch in den übrigen Beispielen; dort besitzt die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen! In Beispiel **4** liegt das daran, dass die beiden Gleichungen $\sqrt{x^2+2} = 3x$ und $\sqrt{x^2+2} = -3x$ auf dieselbe Hilfsgleichung $x^2 + 2 = 9x^2$ führen. In deren Lösungsmenge sind also die Lösungen von zwei verschiedenen Ausgangsgleichungen enthalten. Entsprechendes gilt auch im Beispiel **6** (vgl. Aufgabe 67/7). Dagegen hat die Verschiedenheit der beiden

Lösungsmengen bei Beispiel **5** eine andere Ursache: Die beim Quadrieren entstehende Gleichung hat ganz $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge und besitzt dort die Lösung $x = -4$. Die Wurzelgleichung ist jedoch nur auf $D = [1; +\infty[$ definiert und kann daher nicht -4 als Lösung haben. Dass $-4 \notin D$ gilt, zeigt sich bei der Probe am Auftreten sinnloser Terme.
Beachte also: Das Quadrieren einer Gleichung ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. Zwar erfüllt jede Lösung der Ausgangsgleichung auch die Hilfsgleichung, es kommt aber vor, dass die Hilfsgleichung noch zusätzliche Lösungen besitzt. Das Quadrieren kann also eine »**Gewinnumformung**« sein. Mit anderen Worten: Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist eine echte oder unechte Teilmenge der Lösungsmenge der durch Quadrieren entstandenen neuen Gleichung. Nachdem man deren Lösungen bestimmt hat, muss man prüfen, ob sie auch der Ausgangsgleichung genügen. Das geschieht im Allgemeinen durch eine Probe.

Es gibt allerdings einen einfachen Typ von Wurzelgleichungen, bei welchem das Quadrieren die Lösungsmenge nicht ändert. Das sind Gleichungen der Form $\sqrt{T(x)} = c$ mit $c \geqq 0$ (vgl. Beispiel **1)** und **2)**). Durch Quadrieren entsteht nämlich die Gleichung $T(x) = c^2$ mit $c^2 \geqq 0$. Wenn x_1 eine Lösung dieser Gleichung ist, gilt $T(x_1) = c^2$, also $T(x_1) \geqq 0$. Man kann daher auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhält $\sqrt{T(x_1)} = |c|$, also, wegen $c \geqq 0$, $\sqrt{T(x_1)} = c$, sodass x_1 auch die Ausgangsgleichung löst. Bei solchen Wurzelgleichungen kann man daher auf die Probe verzichten.

Aufgaben

1. a) $\sqrt{2x} = 2$ **b)** $\sqrt{1+x} = 0$ **c)** $\sqrt{2x+3} - 1 = 0$

d) $\sqrt{3x+7} + 10 = 0$ **e)** $\sqrt{8-3x} = \sqrt{14}$ **f)** $\sqrt{7x+3} + 2\sqrt{7} = 5$

2. a) $\sqrt{2x+1} = x+1$ **b)** $3x+2 = \sqrt{12x+5}$

c) $\sqrt{3-4x} = 2x-1$ **d)** $1 + \sqrt{5x-1} = x + 3{,}5$

e) $7x = \sqrt{28x+13} - 2$ **f)** $4x + \sqrt{25-16x} - 2 = 0$

3. a) $\sqrt{4+3x} = 3x+2$ **b)** $x - 1 = \sqrt{1-3x}$

c) $\sqrt{15x+25} = 2x+5$ **d)** $2x = \sqrt{9-2x} + 3$

e) $4x = \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ **f)** $\sqrt{8x+3} - 6x - \sqrt{3} = 0$

4. a) $\sqrt{4x^2-7} = 3$ **b)** $\sqrt{25-x^2} = 6$

c) $\sqrt{17-2x^2} = 3$ **d)** $\sqrt{5x^2-1} = x$

e) $\sqrt{6x^2+50} + 2\sqrt{2x} = 0$ **f)** $\sqrt{5+3x^2} = x\sqrt{3}$

5. a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x+3}$ **b)** $\sqrt{x-8} = \sqrt{4-2x}$

c) $\sqrt{3x+10} = \sqrt{x+6}$ **d)** $\sqrt{x^2+7} = \sqrt{2x^2-2}$

e) $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{5x^2+11}$ **f)** $\sqrt{6x^2+5} = \sqrt{5-3x}$

6. a) $\sqrt{\dfrac{x}{2x+5}} = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x+2}}$ b) $\sqrt{\dfrac{13-x}{3x+1}} = \sqrt{\dfrac{x-5}{1-x}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{3x+2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{5x-14}{7-6x}} = \sqrt{\dfrac{4x+6}{8x-3}}$

•**7.** Bestimme die Lösungsmengen der folgenden drei Gleichungen und vergleiche die Lösungswege:

$\sqrt{x^2+3x} = 1 + \sqrt{x^2+x}$, $\sqrt{x^2+3x} = 1 - \sqrt{x^2+x}$ und

$\sqrt{x^2+3x} = -1 + \sqrt{x^2+x}$

•**8.** a) $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-4}$ b) $\sqrt{x-3} - 3 = \sqrt{x-12}$

c) $\sqrt{x+1} = 3 + \sqrt{x-5}$ d) $\sqrt{x^2+1} + 2 = \sqrt{x^2+17}$

e) $\sqrt{x^2+15} = 5 - \sqrt{x^2+10}$ f) $\sqrt{12-x^2} - 3 = \sqrt{3-x^2}$

•**9.** a) $\sqrt{x^2+x} = 1 + \sqrt{x^2-x}$ b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x} = 5$ d) $\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2x^2-x} = 5$

•**10.** a) $\sqrt{x^2+4x+5} = 5 - \sqrt{x^2-6x}$ b) $\sqrt{x^2+4x+6} + \sqrt{x^2-2x} = 3$

⁚**11.** Am 2. Juni 1461 schreibt der Benediktiner Frater FRIDERICUS, eigentlich Friedrich AMANN, († 1465) im Kloster St. Emmeram zu Regensburg die erste Algebra in deutscher Sprache nieder, die sog. *deutsche Algebra* aus dem *Codex latinus monacensis 14908*, und rechnet dabei die folgende von AL-CHARIZMI stammende Aufgabe vor (sie steht in Abbildung 68.1, 4. Zeile von unten links bis 1. Zeile oben rechts):

Gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz vnd von dem daz vber belyb an dem censu zuech och vß dye wurcz dye czwo wurcz tue zesamen daz 2 zal dar auß werden.*

* *census* ist die wortgetreue lateinische Übersetzung des arabischen مال *māl*, das *Vermögen* bedeutet. Meist wird unter *census* das Quadrat der Unbekannten verstanden. In dieser Aufgabe zeigt sich aber, dass AL-CHARIZMI mit *māl* nicht immer das Quadrat, sondern gelegentlich die Unbekannte selbst bezeichnet. (Vgl. auch die Fußnote zu Aufgabe 94/**11i**). Andernfalls würde die Aufgabe unnötig schwer.

»Dass ›2 zal‹ daraus werden«, heißt bei AL-CHARIZMI, »dass ›2 Dirhem‹ daraus werden«. AL-CHARIZMI hat von den Indern die Gewohnheit übernommen, reine Zahlen durch das Wort *Dirhem* zu kennzeichnen – so hießen die von den Kalifen geprägten Silbermünzen (3,98 g). ARYABHATA (476–? n. Chr.) nämlich hatte bekannten Größen das Wort *rupaka* (= mit Zeichen versehene Münze) beigefügt, das bald durch *ru* abgekürzt wurde. Im europäischen Mittelalter wurde AL-CHARIZMIS *Dirhem* durch *drachme* oder auch durch *dragma* wiedergegeben, was in deutschen Handschriften mit ℋ, einem *d* mit Schnörkel, ∅ oder auch ƒ abgekürzt wurde. Schließlich wurden *dragma* und *numerus* synonym gebraucht. Letzteres übersetzt der Verfasser der *deutschen Algebra* mit *zal*. Michael STIFEL (1487?–1567) war der erste, der im Druck solche Zeichen wegließ und nur mehr die Zahl alleine schrieb. – Das Wort *dirhem* ist eine Arabisierung des griechischen Worts δραχμή (drachmē), dem Namen einer alten Gewichts- und Rechnungseinheit. Man vermutet, dass dieses Wort vom Verbum δράσσεσθαι (drássesthai) = *fassen*, *umfassen* abgeleitet wurde, weil man tatsächlich mit einer Hand sechs ὀβελίσκοι (obelískoi) = *Spießchen* umfassen konnte, deren Gewicht eine Drachme ausmachte. Später nannte man ein solches Spießchen ὀβολός (obolós); es wog in Attika 0,728 g.

Bei GERHARD VON CREMONA (1114–1187) lautet die Aufgabe so: »Est census de quo radicem suam proieci et addidi radici radicem eius quod remansit, et quod provenit fuit due dragme. Ergo hec radix census et radix eius quod remansit fuit equale duabus dragmis.«

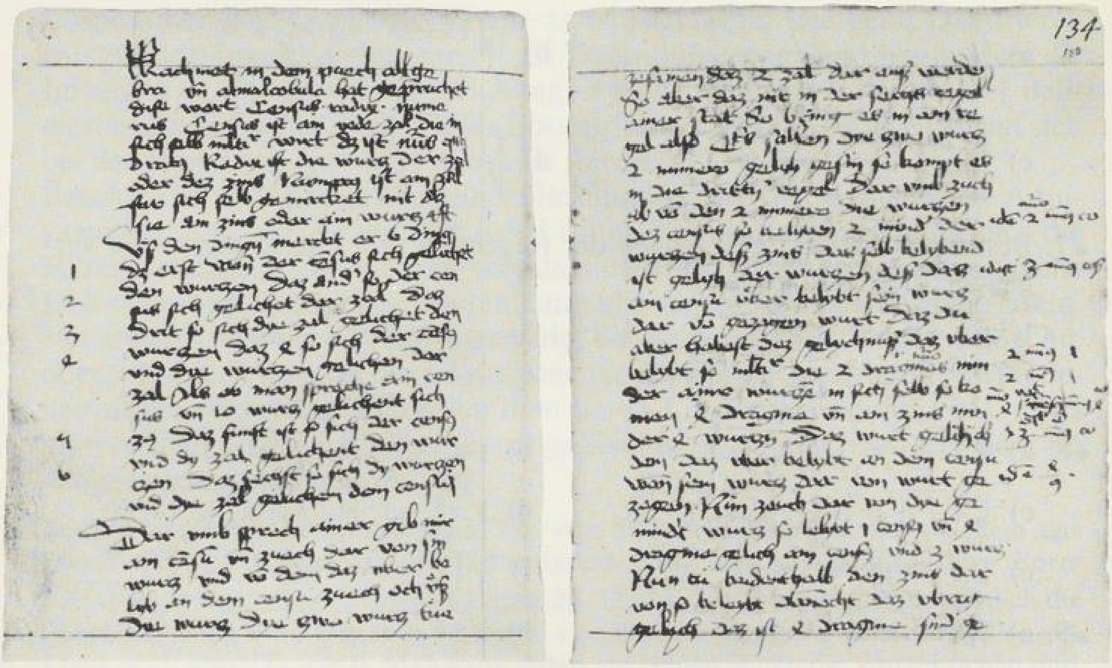


Abb. 68.1 Folium 133v und 134r der 3-seitigen *deutschen Algebra*, geschrieben am Tag des hl. Erasmus (= 2. Juni) des Jahres 1461, in der Bruchstücke und eine einzige Aufgabe aus AL-CHARIZMIS *al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-'l-muqabala* auf Deutsch wiedergegeben sind. Der Text beginnt so: Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort Census · radix · numerus.*
Sammelhandschrift *Codex latinus monacensis 14908*, Größe des Schriftblocks 9,7 cm × 5,8 cm.

**2.5.2 Wurzelgleichungen mit Parametern

Das Lösen von Wurzelgleichungen, in denen außer der Unbekannten auch noch Parameter vorkommen, erfordert im Allgemeinen Fallunterscheidungen. Bei der Untersuchung, ob eine Lösung der durch Quadrieren erhaltenen Hilfsgleichung auch die Ausgangsgleichung erfüllt, ist vor allem auch zu beachten, dass die auftretenden Radikanden nicht negativ sein dürfen.

Beispiel 1:

$$\sqrt{x+a^2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x + a^2 = 2x + 1$$
$$x = a^2 - 1$$

Probe: $\mathrm{LS} = \sqrt{a^2 - 1 + a^2} = \sqrt{2a^2 - 1}$

$\mathrm{RS} = \sqrt{2(a^2-1)+1} = \sqrt{2a^2-1}$

* Der gesamte von Frater FRIDERICUS AMANN geschriebene Text ist im Lösungsheft abgedruckt. Vergleiche auch die Übersetzung GERHARD VON CREMONAS in unserer *Algebra 7*, Seite 10, und im zugehörigen Lösungsheft, Seite 4f.

LS und RS sind jedoch nur definiert, wenn $2a^2 - 1 \geqq 0$ gilt, also für $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ergebnis: $x = a^2 - 1$, falls $|a| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; sonst $L = \{\,\}$.

Beispiel 2:

$$\sqrt{x+8a} = \sqrt{x} + 2a \Rightarrow x + 8a = x + 4a\sqrt{x} + 4a^2$$

$$a\sqrt{x} = 2a - a^2$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach $\sqrt{x}$ ist nur für $a \neq 0$ möglich. Also Fallunterscheidung:

$\boxed{a = 0}$ $0 \cdot \sqrt{x} = 0$; also $L = \mathbb{R}_0^+$, was auch für die Ausgangsgleichung gilt.

$\boxed{a \neq 0}$ $\sqrt{x} = 2 - a \Rightarrow x = (2-a)^2$

Probe: $\text{LS} = \sqrt{(2-a)^2 + 8a} = \sqrt{4 + 4a + a^2} = \sqrt{(2+a)^2} = |2+a| =$

$$= \begin{cases} 2+a & \text{für } a \geqq -2 \\ -(2+a) & \text{für } a < -2 \end{cases}$$

$$\text{RS} = \sqrt{(2-a)^2} + 2a = |2-a| + 2a = \begin{cases} 2+a & \text{für } a \leqq 2 \\ -2+3a & \text{für } a > 2 \end{cases}$$

Für $a \neq 0$ lautet somit das Ergebnis:

$L = \{(2-a)^2\}$ für $0 < |a| \leqq 2$; $L = \{\,\}$ für $|a| > 2$.

Am Lösungsbaum lassen sich die verschiedenen Fälle übersichtlich darstellen (Abbildung 69.1):

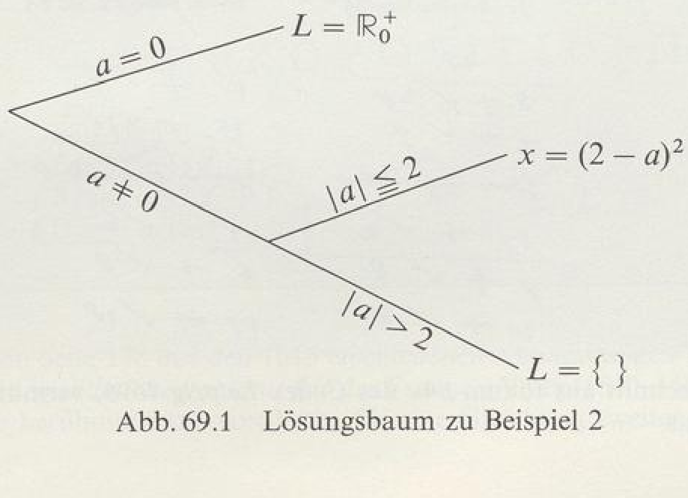


Abb. 69.1 Lösungsbaum zu Beispiel 2

Aufgaben

1. Löse die folgenden Parametergleichungen:

a) $\sqrt{x+a^2} = a+1$ **b)** $\sqrt{x+a} = a-1$

c) $\sqrt{x+a} = \sqrt{5a-x}$ **d)** $\sqrt{x+a} = \sqrt{a^2-x}$

e) $\sqrt{x^2+a} = \sqrt{a-x}$ **f)** $\sqrt{x^2-a^2} = x+a$

2. a) Zeige, dass die Gleichung $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a} = 2a$ genau dann lösbar ist, wenn die Bedingung $a = 0 \vee a \geqq 0{,}5$ erfüllt ist. Wie lautet jeweils die Lösung?

b) Für welche Werte von a ist die Gleichung $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a} = 2a$ lösbar und wie lautet die Lösung?

Zu den Aufgaben 3 bis 5:

Löse die Gleichung und zeichne einen Lösungsbaum.

3. a) $\sqrt{x^2+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{x^2-1}+\frac{1}{a}$ **b)** $\sqrt{x+\frac{1}{a}}-\sqrt{x-\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$

• **4. a)** $\sqrt{ax^3+3} = \sqrt{3+a^3x}$ **b)** $\sqrt{x^2+a}-\sqrt{ax^2-2} = 0$

•• **5. a)** $\sqrt{x+2a^2} = a+\sqrt{x+a^2}$ **b)** $\sqrt{ax^2+x} = \sqrt{ax^2-x+1}$

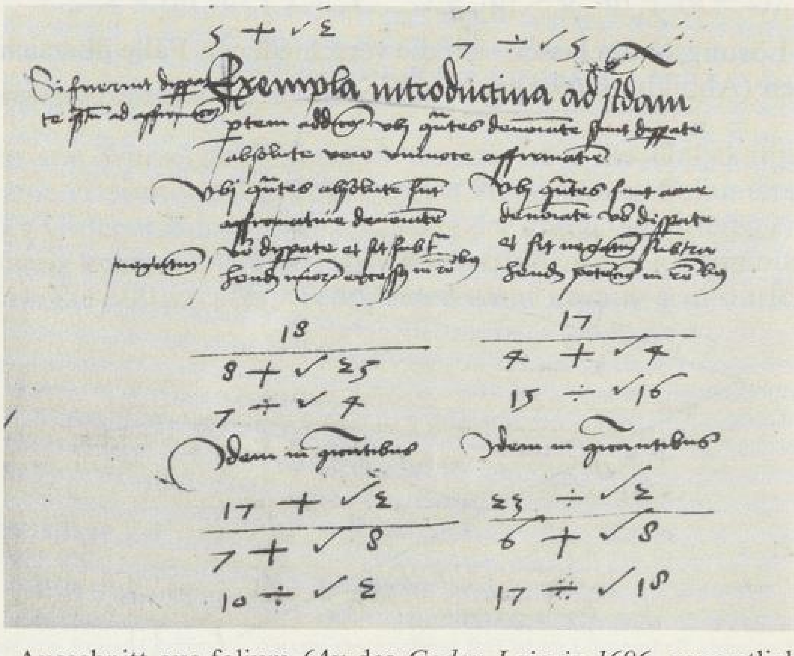


Abb. 70.1 Ausschnitt aus folium 64v des *Codex Leipzig 1696*, vermutlich aus dem Ende des 15. Jh.s