UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

6.3 Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck

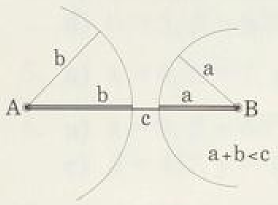
urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

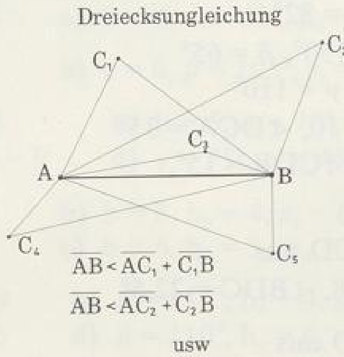
Visual Library

6.3 Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck

Die Aufgabe, ein Dreieck aus den gegebenen Seiten zu konstruieren, ist nicht immer lösbar. So gibt es zum Beispiel kein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 8. Der Grund ist einfach: Die beiden Kreise, die sich in C schneiden sollten, treffen sich nicht. Damit sie sich schneiden, muss $a + b \geqq c$ sein; der Fall $a + b = c$ liefert jedoch kein Dreieck, weil C auf [AB] liegt. Es gilt der

Satz:
Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte. (Dreiecksungleichung)





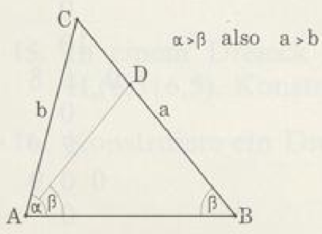
Es gilt also immer: $a + b > c$, $b + c > a$ und $c + a > b$.
Im Grund beschreibt die Dreiecksungleichung etwas, was jeder weiß: Der direkte Weg von A nach B ist immer kürzer als ein Umweg über C. Auch der Längenunterschied zweier Seiten ist nicht beliebig wählbar. Wäre nämlich zum Beispiel $a - b \geqq c$, dann wäre auch $a \geqq b + c$, was gegen die Dreiecksungleichung verstieße. Deshalb gilt der

Satz:
Im Dreieck ist der Längenunterschied zweier Seiten immer kleiner als die Länge der dritten Seite.

Auch zwischen Seiten und Winkeln gibt es Zusammenhänge. Sind in einem Dreieck zum Beispiel alle Seiten gleich lang, so sind auch alle Winkel gleich groß. Sind nur zwei Seiten gleich lang (gleichschenkliges Dreieck!), so sind auch die Gegenwinkel dieser Seiten gleich groß. Zu verschieden langen Seiten gehören auch verschieden große Gegenwinkel.

Satz:
Im Dreieck gehört zum größeren zweier Winkel die längere Gegenseite.

Beispiel: Wenn $\alpha > \beta$, dann $a > b$.



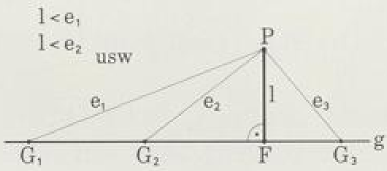
Begründung: Im Dreieck ABC ist $\alpha > \beta$. Tragen wir in A den Winkel β an, dann schneidet der freie Schenkel die Seite [BC] in D. Das Dreieck ABD ist dann gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{BD}$. Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{AC} < \overline{CD} + \overline{DA}$, also auch $\overline{AC} < \underbrace{\overline{CD} + \overline{DB}}$ (weil $\overline{DA} = \overline{DB}$),

also ist $b < a$

Weil in einem Dreieck höchstens ein Winkel ein rechter oder gar ein stumpfer sein kann, gilt der

Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.
In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die Gegenseite des stumpfen Winkels die Längste.

Damit können wir auch zeigen, dass die Lotstrecke l die kürzeste Verbindung von einem Punkt (nicht auf der Gerade) zu einem Punkt der Gerade ist. Jede andere Verbindungsstrecke ist Hypotenuse in einem Dreieck mit der Kathete l, sie ist deshalb länger.



Geht man von den Seiten aus (statt von den Winkeln), dann ergibt sich der

Satz:
In einem Dreieck liegt der längeren zweier Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Beispiel: Wenn $c > b$, dann $\gamma > \beta$

Begründung: Wäre $\beta \geqq \gamma$, dann wäre auch $b \geqq c$. Das kann aber nicht sein, weil wir $c > b$ vorausgesetzt haben.

Aufgaben zu 6.3

1. Entscheide ohne Zeichnung, ob es ein Dreieck ABC gibt mit
   a) $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ **b)** $a = 8$, $b = 9$, $c = 10$
   c) $a = 43$, $b = 27$, $c = 16$ **d)** $a = 9$, $b = 14$, $\alpha = 95°$
   e) $a = 4$, $b = 5$, $\alpha = 70°$, $\gamma = 50°$ **f)** $a = 5$, $h_c = 5{,}5$ $\alpha = 70°$

2. In einem Dreieck ABC ist $\beta = 120°$ und $b = 10$.
   Was kannst du über die Längen von a und c sagen?

3. Von drei Punkten P, Q und R ist bekannt
   a) $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ **b)** $\overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR}$
   c) $\overline{PQ} - \overline{QR} = \overline{PR}$. Wie liegen jeweils die drei Punkte?

4. In einem Dreieck haben zwei Seiten die Längen 5 und 7.
   Zwischen welchen Grenzen liegt die Länge der dritten Seite?

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN