Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2001

Aufgaben

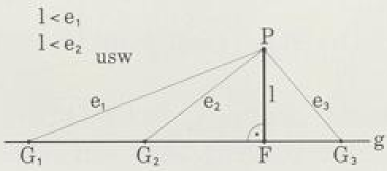
Begründung: Im Dreieck ABC ist $\alpha > \beta$. Tragen wir in A den Winkel β an, dann schneidet der freie Schenkel die Seite [BC] in D. Das Dreieck ABD ist dann gleichschenklig: $\overline{AD} = \overline{BD}$. Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{AC} < \overline{CD} + \overline{DA}$, also auch $\overline{AC} < \underbrace{\overline{CD} + \overline{DB}}$ (weil $\overline{DA} = \overline{DB}$),

also ist $\quad b \quad < \quad a$

Weil in einem Dreieck höchstens ein Winkel ein rechter oder gar ein stumpfer sein kann, gilt der

Satz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die längste Seite.
In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist die Gegenseite des stumpfen Winkels die Längste.

Damit können wir auch zeigen, dass die Lotstrecke l die kürzeste Verbindung von einem Punkt (nicht auf der Gerade) zu einem Punkt der Gerade ist. Jede andere Verbindungsstrecke ist Hypotenuse in einem Dreieck mit der Kathete l, sie ist deshalb länger.



Geht man von den Seiten aus (statt von den Winkeln), dann ergibt sich der

Satz:
In einem Dreieck liegt der längeren zweier Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Beispiel: Wenn $c > b$, dann $\gamma > \beta$

Begründung: Wäre $\beta \geqq \gamma$, dann wäre auch $b \geqq c$. Das kann aber nicht sein, weil wir $c > b$ vorausgesetzt haben.

Aufgaben zu 6.3

1. Entscheide ohne Zeichnung, ob es ein Dreieck ABC gibt mit
   a) $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ **b)** $a = 8$, $b = 9$, $c = 10$
   c) $a = 43$, $b = 27$, $c = 16$ **d)** $a = 9$, $b = 14$, $\alpha = 95°$
   e) $a = 4$, $b = 5$, $\alpha = 70°$, $\gamma = 50°$ **f)** $a = 5$, $h_c = 5{,}5$ $\alpha = 70°$

2. In einem Dreieck ABC ist $\beta = 120°$ und $b = 10$.
   Was kannst du über die Längen von a und c sagen?

3. Von drei Punkten P, Q und R ist bekannt
   a) $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ **b)** $\overline{PQ} + \overline{QR} > \overline{PR}$
   c) $\overline{PQ} - \overline{QR} = \overline{PR}$. Wie liegen jeweils die drei Punkte?

4. In einem Dreieck haben zwei Seiten die Längen 5 und 7.
   Zwischen welchen Grenzen liegt die Länge der dritten Seite?

•**5.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $b < a$. W ist der Schnittpunkt von w_γ und c, D ist der Spiegelpunkt von A bezüglich w_γ.
Begründe: **a)** $\overline{CD} = b$ **b)** $\sphericalangle CDW = \alpha$
c) $\beta < \alpha$ (ohne Verwendung des Satzes: $b < a \Rightarrow \beta < \alpha$).

6. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a > b$. Wähle D auf [BC] so, dass $\overline{CD} = 6$.
Begründe: **a)** $\sphericalangle ADC$ ist spitz **b)** $\overline{AB} > \overline{BD}$ **c)** Formuliere die Aussage **b)** mit Hilfe der Dreieckseiten a, b und c.

7. Im Dreieck ABC ist $c = 13$ und $b = 19$. Die Länge $\overline{BC}$ ist ganzzahlig. Wie lang kann [BC] sein, wenn gilt
a) zwei Winkel sind gleich groß
b) $\gamma < \alpha < \beta$ **c)** $\beta > 100°$?

•**8.** Zeichne ein konvexes Viereck ABCD und seine Diagonalen e und f. u ist der Umfang des Vierecks.
Begründe:
a) $e + f > a + c$ **b)** $e + f > \frac{1}{2}u$ **c)** $e + f < u$.

9. ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, D ein Punkt auf AC.
Begründe:
a) Liegt D zwischen A und C, dann ist $\overline{BD} > \overline{DC}$.
b) Liegt D nicht auf der Strecke [AC], aber auf ihrer Verlängerung über A hinaus, dann ist $\overline{BD} < \overline{DC}$.

•**10.** Begründe: In jedem Dreieck ABC gilt: $h_a < \frac{b+c}{2}$.

•**11.** Folgere aus dem Ergebnis von **10.**, dass in jedem Dreieck die drei Höhen zusammen kürzer sind als der Umfang.

•**12.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und die Höhe h_c.
Begründe: $h_c \leqq \frac{c}{2}$.