Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

Zur Geschichte von »Wurzel« und Wurzelzeichen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83526

Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2; \quad \sqrt{6{,}25} = 2{,}5; \quad \sqrt{\tfrac{49}{121}} = \tfrac{7}{11};$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \text{ (irrational)}; \quad \sqrt{10} = 3{,}1622\ldots \text{ (irrational)}$$

Das Zeichen $\sqrt{}$ heißt **Wurzelzeichen**; der unter dem Wurzelzeichen stehende Term heißt **Radikand**. Statt »die Wurzel aus a berechnen« sagt man auch »aus a die Wurzel ziehen« oder »a radizieren«. $\sqrt{a}$ ist meist eine irrationale Zahl; nur wenn a das Quadrat einer rationalen Zahl ist, »geht die Wurzel auf«, d.h. ist auch $\sqrt{a}$ eine rationale Zahl.
Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Zahl $x_1 = \sqrt{a}$ als positive Lösung. Für die negative Lösung $x_2 = -x_1$ gilt daher: $x_2 = -\sqrt{a}$.

> **Satz 34.1:** Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ hat die Lösungen
> $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

**Zur Geschichte von »Wurzel« und Wurzelzeichen

Stellt man sich eine Zahl als Maßzahl für den Inhalt eines Quadrats vor, so gibt die Quadratwurzel aus dieser Zahl die Länge der Quadratseite an. Diese Vorstellung liegt dem Wort πλευρά (pleurá) = *Seite* zugrunde, womit die Griechen, so z.B. Euklid (um 300 v. Chr.) in Buch X seiner *Elemente*, die Quadratwurzel bezeichneten. Durch das entsprechende lateinische Wort *latus* drückten die Agrimensoren, die römischen Feldmesser, die Quadratwurzel aus. Nikomachos (um 160 n. Chr.) verwendet das griechische Wort ῥίζα (rhíza), das ursprünglich Wurzel einer Pflanze, im übertragenen Sinn Grundlage und Ursprung bedeutet, im mathematischen Sinn von Ausgangszahl. Wortgetreu übersetzt Boethius (um 480–524?) es mit *radix* ins Lateinische.
Ob der Inder Aryabhata I (um 476–? n. Chr.) durch das griechische ῥίζα angeregt wurde mit dem indischen Wort *mūla*, das ebenfalls Wurzel einer Pflanze bedeutet, die Quadratwurzel aus einer Zahl zu bezeichnen, wird wohl immer ungeklärt bleiben müssen. Interessanterweise übernehmen die Araber, so auch al-Charizmi (um 780–nach 847) einerseits das griechische πλευρά (pleurá), wenn sie z.B. in ihren geometrischen Beweisen die Quadratwurzel als Seite eines Quadrats darstellen – sie nennen sie dann auch *dil*, das ist ihr Wort für Seite –, andererseits das indische *mūla*, dem ihr arabisches Wort جذر (*dschidr*) entspricht, wenn sie die Quadratwurzel als Zahl auffassen. Leider verwenden sie aber *dschidr* auch zur Bezeichnung der Unbekannten selbst, was allerhand Verwirrung stiftete und immer noch stiften kann. Denn noch heute verwendet man in so manchen Lehrbüchern das Wort Wurzel im Sinne von »Quadratwurzel« und im Sinne von »Lösung einer Gleichung«. Wir wollen uns diesem Brauch aber nicht anschließen.
Gerhard von Cremona (1114–1187), der neben anderen arabischen Abhandlungen auch das Werk al-Charizmis übersetzte, wählte für *dschidr* die wortgetreue Entsprechung *radix*, das wiederum folgerichtig mit *Wurzel* ins Deutsche übertragen wurde, so um 1400 in der *Geometria Culmensis* und 1461 in der *Deutschen Algebra*, wo man liest »Radix ist die wurcz der zal« (Abbildung 68.1, Zeile 6 von folio 133v). In derselben Handschrift wird das Wurzelziehen, das mittelalterliche *radicem extrahere* des Jordanus Nemorarius († 1237) und des Johannes de Sacro Bosco (1200–1256), mit »zuech ausz dye wurcz« eingedeutscht. Das Fachwort **radizieren** erscheint erst 1836 in *An-*

fangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht von Carl KOPPE (1803 bis 1874), der dort auch das Wort **Radikand** für die »zu radizierende Zahl« prägt.
Ein besonderes Zeichen für die Quadratwurzel, nämlich ⌈⌈, tritt zum ersten Mal bei den Ägyptern auf, z. B. im *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr.). Die Inder kürzen ihr *mūla* einfach durch die Silbe *mū* ab. Die Araber kehren leider zu der vollen Wortalgebra zurück, sodass es erst im mittelalterlichen Italien wieder zu einem Zeichen für die Quadratwurzel kommt. Man kürzt das Wort *radix* durch ein durchgestrichenes R, also durch ℞ ab, zum ersten Mal belegt bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) in seiner *Practica geometriae* von 1220. Geronimo CARDANO (1501–1576) und Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) verwenden es, in Deutschland Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500). François VIÈTE (1540–1603) benützt stattdessen, seinem Landsmann Petrus RAMUS (1515–1572) folgend, *l.*, den Anfangsbuchstaben von *latus*.
Das heute übliche Wurzelzeichen stammt aus Deutschland. Im vor 1486 geschriebenen *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* setzt der unbekannte Verfasser einen Punkt in die Mitte vor die Zahl und erklärt: »In extraccione radicis quadrati alicuius numeri preponatur numero unus punctus« (Zum Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl setzt man der Zahl einen Punkt voran). Bald wird dieser viereckig mit Aufstrich, so im *Codex Leipzig 1696* (vermutlich Ende des 15. Jh.s) und auch in der um 1517 von Adam RIES (1492–1559) niedergeschriebenen *Algebra* des INITIUS ALGEBRAS (*Codex Dresden C 349*), dann erstmals im Druck 1525 in der *Coß* Christoff RUDOLFFS (um 1500–vor 1543), auch dort noch gelesen als »Punkt« (dies sogar noch 1551 in Johann SCHEYBLS [1494–1570] *Algebra*). In Michael STIFELS (1487?–1567) *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – verlängert sich 1544 der Punkt zum Abwärtsstrich (der in den Figuren schon das Ansatzstrichlein hat): Der Wurzelhaken war geboren.
Es blieb aber bei allen Wurzelzeichen das Problem, ob z. B. $\surd a+b$ die Quadratwurzel aus der Summe $a+b$ oder die Summe aus dem 1. Summanden $\surd a$ und dem 2. Summanden b bedeuten soll. Nahezu jeder Mathematiker hatte dafür eigene Vorschriften. So erscheinen bei dieser Gelegenheit 1556 zum ersten Mal runde Klammern im Druck: im *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – des Niccolò TARTAGLIA steht ℞ v. (℞ 24 più ℞ 12) für $\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{12}}$. Dabei bedeutet ℞ v. *radix universalis = Gesamtwurzel*, die 1572 Raffaele BOMBELLI (1526 bis 1572) in seiner *L'algebra* als *radix legata = gebundene Wurzel* bezeichnet und durch R.L ausdrückt. Das Ende der Bindung kennzeichnet ein etwas tiefer gestelltes gespiegeltes L, also ⅃, sodass bei ihm $\sqrt{4+\sqrt{6}+2}$ als R.q.L4.p.R.q.6 ⅃ p.2 erscheint, wobei R.q. *radix quadrata* bedeutet. Aus L und ⅃ dürfte unsere eckige Klammer entstanden sein. In seinem Manuskript drückte BOMBELLI 1557/60 die Bindung noch so wie andere Mathematiker durch Unterstreichen aus. Durchgesetzt hat sich von all den Möglichkeiten aber die Schreibweise von René DESCARTES (1596–1650) aus seiner *La Géométrie* von 1637: Er fasste die zusammengehörigen Glieder durch Überstreichen zusammen, schrieb also $\surd\,\overline{a+b}$. Verbindet man diesen Querstrich mit dem Wurzelhaken, so hat man unser Wurzelzeichen, das sich aber sehr langsam verbreitete. Schließlich setzte man den Querstrich auch da, wo er keinerlei Bedeutung hatte; denn bei $\surd a+b$ war es ja eigentlich nicht nötig, $\sqrt{a}+b$ zu schreiben.

LEONARDO VON PISA ℞	Niccolò TARTAGLIA ℞	Adam RIES ✓
WIDMANN VON EGER ℞	Raffaele BOMBELLI ℞⌊0 m 121⌋	Christoff RUDOLFF ✓
Geronimo CARDANO ℞	Dresdener Codex $\cdot 2\ 4 = \sqrt{25}$	Michael STIFEL ✓

Abb. 35.1 Verschiedene Wurzelzeichen. – Wegen des *Codex Leipzig 1696*, s. Abb. 70.1

Aufgaben

1. Gib die folgenden Zahlen in wurzelfreier Schreibweise an:

a) $\sqrt{1}$ **b)** $\sqrt{16}$ **c)** $\sqrt{81}$ **d)** $\sqrt{36}$

e) $\sqrt{100}$ **f)** $\sqrt{2500}$ **g)** $\sqrt{490000}$ **h)** $\sqrt{1000000}$

i) $\sqrt{196}$ **k)** $\sqrt{169}$ **l)** $\sqrt{256}$ **m)** $\sqrt{361}$

2. Ziehe die Wurzeln:

a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ **b)** $\sqrt{\frac{441}{121}}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{576}}$ **d)** $\sqrt{\frac{484}{10000}}$

e) $\sqrt{2{,}25}$ **f)** $\sqrt{5{,}29}$ **g)** $\sqrt{0{,}0289}$ **h)** $\sqrt{0{,}000625}$

3. Berechne und vergleiche:

a) $\sqrt{9+16}$ und $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

b) $\sqrt{169-25}$ und $\sqrt{169}-\sqrt{25}$

c) $\sqrt{576+49}$ und $\sqrt{576}+\sqrt{49}$

d) $\sqrt{1681-1600}$ und $\sqrt{1681}-\sqrt{1600}$

e) $\sqrt{1+4+4}$ und $\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$

f) $\sqrt{49+16-1}$ und $\sqrt{49}+\sqrt{16}-\sqrt{1}$

g) $\sqrt{196-36+9}$ und $\sqrt{196}-\sqrt{36}+\sqrt{9}$

h) $\sqrt{961-25-36}$ und $\sqrt{961}-\sqrt{25}-\sqrt{36}$

4. Berechne:

a) $\sqrt{1+3}$ **b)** $\sqrt{1+3+5}$ **c)** $\sqrt{1+3+5+7}$

d) $\sqrt{1+3+5+7+9}$ **e)** $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$

5. Beispiel: $\sqrt{\sqrt{25}-1}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$. Verfahre ebenso:

a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{81}}$ **c)** $\sqrt{\sqrt{625}}$ **d)** $\sqrt{\sqrt{10000}}$

e) $\sqrt{1+\sqrt{9}}$ **f)** $\sqrt{\frac{81}{16}-\sqrt{25}}$ **g)** $\sqrt{\sqrt{400}-4}$ **h)** $\sqrt{\sqrt{900}+\frac{1}{4}}$

i) $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{576}}$ **k)** $\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{\frac{1}{16}}}$ **l)** $\sqrt{\sqrt{\frac{169}{144}}-\sqrt{\frac{49}{324}}}$

6. Welche Zahlen dürfen bei den folgenden Wurzeltermen für die Variable eingesetzt werden? Gib jeweils die Definitionsmenge des Terms an.

a) $\sqrt{2a}$ **b)** $\sqrt{-a}$ **c)** $\sqrt{1+a}$ **d)** $\sqrt{5-2a}$

e) $\sqrt{2|x|}$ **f)** $\sqrt{-3|x|}$ **g)** $\sqrt{x^2+1}$ **h)** $\sqrt{x^2-1}$

i) $\sqrt{1-x^2}$ **k)** $\sqrt{|x|-3}$ **l)** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **m)** $\sqrt{\dfrac{2x+5}{2-x}}$

7. Vereinfache:

a) $(1+\sqrt{2})^2$ **b)** $(3-\sqrt{3})^2$ **c)** $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$
d) $(\sqrt{a}-2b)^2$ **e)** $(3\sqrt{x}+5y)^2$ **f)** $(3p-\sqrt{3p})(\sqrt{3p}+3p)$

8. Fasse zusammen:

a) $3+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+15$ **b)** $2a-9\sqrt{a}-5\sqrt{a}+12a$
c) $-11\sqrt{5}+8\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}+7\sqrt{5}$
d) $5(1-\sqrt{7}+2\sqrt{6})-3(3\sqrt{6}+5\sqrt{7}-5)$
e) $(4\sqrt{13}-15)(1+8\sqrt{13})-29(13-4\sqrt{13})$
f) $(3m-\sqrt{n})^2-(3m+\sqrt{n})^2+12m\sqrt{n}$

9. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung:

a) $x^2=1225$ **b)** $5x^2-320=0$ **c)** $16(x^2+9)=144$
d) $2x^2-4=0$ **e)** $17x^2+61=350$ **f)** $121=49-4x^2$
g) $0{,}2x^2-5=0$ **h)** $\frac{2}{7}x^2-2=\frac{5}{7}x^2+1$ **i)** $0{,}15=\frac{2}{3}x^2+x^2$
k) $x^2-\sqrt{3}=0$ **l)** $x^2+\sqrt{5}=\sqrt{7}$ **m)** $x^2+\sqrt{5}-\sqrt{3}=0$

10. Welche Gleichung der Form $x^2=a$ hat die angegebene Zahl als Lösung? Wie lautet die Lösungsmenge?

a) -1 **b)** $\sqrt{7}$ **c)** 0 **d)** $-\sqrt{1{,}2}$ **e)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **f)** $\sqrt{0{,}5-\sqrt{\frac{1}{4}}}$

11. Wie lang ist die Diagonale eines Quadrats mit dem Flächeninhalt
a) $1\,\mathrm{m}^2$, **b)** $8\,\mathrm{cm}^2$, **c)** $9\,\mathrm{dm}^2$, **d)** $450\,\mathrm{mm}^2$, **e)** $1{,}62\,\mathrm{a}$, **f)** $3\,\mathrm{km}^2$?

12. Bekanntlich ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Stelle bei den folgenden Termen fest, ob sie rationale oder irrationale Zahlen darstellen.

a) $1+\sqrt{2}$ **b)** $1-\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})$
e) $(\sqrt{2})^2$ **f)** $\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ **g)** $(1+\sqrt{2})^2$ **h)** $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

13. Bestimme die Lösungsmenge:

a) $\sqrt{x}=2$ **b)** $2\sqrt{x}=6$ **c)** $\sqrt{x}-1=0$ **d)** $\sqrt{x}+1=0$
e) $2\sqrt{x}+5=3\sqrt{x}+2$ **f)** $11-5\sqrt{x}=3-7\sqrt{x}$
g) $2(3\sqrt{x}+7)=9+2\sqrt{x}+5$ **h)** $(\sqrt{x}-17)\cdot 5-2\sqrt{x}=3(11+\sqrt{x})$
i) $7-(2\sqrt{x}-7)\cdot 3=2\sqrt{x}+4(7-2\sqrt{x})$

14. Bei einem Fotoapparat wird bekanntlich das zur Bilderzeugung verwendete Lichtbündel durch eine meist kreisförmige Blende begrenzt. Der Blendendurchmesser d kann verändert werden, die jeweilige Einstellung wird durch die Blendenzahl $\dfrac{f}{d}$ beschrieben; dabei bedeutet f die Brennweite des Objektivs.

a) Wie groß ist bei einem Apparat mit $f=50$ mm der Blendendurchmesser, wenn »Blende 8«, also die Blendenzahl 8, eingestellt ist?

b) Auf der Objektivfassung eines bestimmten Fotoapparats sind sieben Blendenzahlen angegeben, die kleinste davon heißt 2. Die übrigen Blendenzahlen sind so gewählt, dass beim Übergang von einer zur nächsten sich jeweils die Blendenfläche halbiert. Berechne die übrigen Blendenzahlen und gib die ersten beiden Ziffern ihrer Dezimalentwicklung an. (Damit erhält man die auf der Blendenskala angegebenen Zahlen!)
Hinweis: Beachte, dass die Blendenfläche zu d^2 proportional ist.

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

Wie findet man zu einer Zahl $a > 0$ den Wert von $\sqrt{a}$?
Bei den bisherigen Beispielen war das recht einfach; man konnte meist schnell eine positive Zahl angeben, deren Quadrat die Zahl a ergab. Schwieriger wird diese Aufgabe schon, wenn a eine große, uns nicht geläufige Quadratzahl ist. Wie findet man z. B., dass $\sqrt{33489}$ bzw. $\sqrt{157{,}7536}$ den Wert 187 bzw. 12,56 hat? Aber auch das sind noch Sonderfälle. Im Allgemeinen ist ja der Radikand a nicht das Quadrat einer rationalen Zahl; $\sqrt{a}$ ist dann irrational, und man muss sich damit begnügen, einen hinreichend genauen Näherungswert zu bestimmen.
Dir ist sicher schon bekannt, dass man solche Aufgaben bequem mit dem Taschenrechner lösen kann. Man muss lediglich den Radikanden a eingeben und die **Wurzeltaste** (manchmal zwei Tasten) drücken und schon wird ein (Näherungs-)Wert von $\sqrt{a}$ angezeigt. Wie ist das möglich? Sind die Wurzelwerte schon im Taschenrechner gespeichert und müssen nur abgerufen werden? Sicherlich nicht, wie du dir leicht klarmachen kannst! Die gesuchte Wurzel muss vielmehr jedes Mal neu berechnet werden. Dazu dient ein sehr schnell ablaufendes **Rechenprogramm**, das mit dem Drücken der Wurzeltaste gestartet wird. Für das Berechnen von Quadratwurzeln gibt es verschiedene Verfahren. Im Folgenden sollst du einige kennen lernen.

2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei diesem schon bekannten Verfahren schließt man den Wurzelwert zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen ein. Aus diesem Anfangsintervall gewinnt man durch Anwendung der Zehnteilungsmethode eine Intervallschachtelung für die gesuchte Wurzel. Der Rechenaufwand ist meist ziemlich groß.

2.2.2 Iterationsverfahren

Um zu einer Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel zu berechnen, beginnen wir mit einem Schätzwert $x_1 > 0$. Dieser ist zu groß bzw. zu klein bzw. richtig, wenn $x_1^2 > a$ bzw. $x_1^2 < a$ bzw. $x_1^2 = a$ gilt. Den letzten Fall, in welchem die Bestimmung von $\sqrt{a}$ zufällig schon gelungen ist, können wir im Folgenden außer Acht lassen.