Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.3 Lineare Gleichungssysteme

8. Für wie viele Unbekannte muss man bei den folgenden Gleichungen Zahlen vorschreiben, damit eine Lösung eindeutig bestimmt ist?

a) $4x - 2{,}7y + 13z = 0$ **b)** $11w - 3x - 0{,}1y - 12z = 17$

•9. Um die Lösungsmenge L_1 der Gleichung $\dfrac{2x+y+1}{x-y} = 1$ zu bestimmen, ist es nahe liegend, sie auf die Form $2x + y + 1 = x - y$ zu bringen. Da jede Lösung der ersten Gleichung auch die zweite Gleichung erfüllt, ist L_1 in der Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung enthalten. Lösungen der zweiten Gleichung sind aber nur dann auch Lösungen der ersten, wenn für sie der Nenner $x - y$ von null verschieden ist. Man erhält also L_1 aus L_2, indem man alle Lösungen mit $x - y = 0$ ausschließt. Aus $2x + y + 1 = x - y \Leftrightarrow x = -2y - 1$ folgt $L_2 = \{(x|y) \mid y \in \mathbb{Q} \wedge x = -2y - 1\}$. Die einzige Lösung aus L_2 mit $x - y = 0$ oder $x = y$ ist $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Es ergibt sich daher

$$L_1 = \{(x|y) \mid y \neq -\tfrac{1}{3} \wedge x = -2y - 1\}.$$

Bestimme in derselben Weise die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\dfrac{x+y}{x-1} = 5$ **b)** $\dfrac{8x-y}{2y+3} = 0$

c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 0$ **d)** $\dfrac{x^2+2x-y}{x^2+1} = 1$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten sind meistens auch mehrere Bedingungen zu beachten, welche die gesuchten Zahlen erfüllen müssen.

Beispiel:

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3 kg Äpfel und 1 kg Birnen kauft und dafür 7,20 € bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 2 kg Äpfel und 5 kg Birnen derselben Sorten 15,20 €. Auf dem Heimweg versucht Hans den Preis für 1 kg jeder Sorte herauszufinden. Um diese nicht ganz leichte Aufgabe mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir den Preis für 1 kg Äpfel mit x Cent, den Preis für 1 kg Birnen mit y Cent. Aus den von Hans beobachteten Einkäufen zweier Kunden ergeben sich zwei Bedingungen für x und y.

1. Kunde: $3x + y = 720$
2. Kunde: $2x + 5y = 1520$

Wir erhalten also zwei Gleichungen für x und y. Die gesuchten Zahlen müssen *beide* Gleichungen *zugleich* erfüllen. Man kann diesen Sachverhalt auch so beschreiben: Gesucht ist ein Zahlenpaar $(x|y)$, das beim Einsetzen die UND-Aussageform

$(3x + y = 720) \wedge (2x + 5y = 1520)$

zu einer wahren Aussage macht.
Eine UND-Aussage ist bekanntlich genau dann wahr, wenn jede Teilaussage wahr ist. Zum Beispiel erfüllt das Zahlenpaar $(140|300)$ zwar die erste, jedoch nicht die zweite Gleichung und ist damit keine Lösung unserer Aufgabe.

UND-Verknüpfungen von Bestimmungsgleichungen spielen in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle. Man hat daher für sie eine besondere Bezeichnung eingeführt:

> **Definition 129.1:** Eine UND-Verknüpfung von zwei oder mehr Gleichungen für dieselben Unbekannten bezeichnet man als **Gleichungssystem**.*
> Falls alle Gleichungen linear sind, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**.

Es ist üblich, die einzelnen Gleichungen eines Gleichungssystems übersichtlich untereinander zu schreiben; auf das Verknüpfungszeichen $\wedge$ kann man dabei verzichten. Oft werden die Gleichungen auch noch durchnummeriert.

Beispiele:

1) I $3x + y = 720$
II $2x + 5y = 1520$
System von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; linear

2) I $2x + 5y - z = 0$
II $3x - y + z + 1 = 0$
System von zwei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear

3) I $x^2 + y^2 = 1$
II $x + y = 1$
III $x - y = 1$
System von drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; nicht linear

4) I $x + y = 3$
II $x + z = 4$
III $y + z = 5$
System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear

Wie die Beispiele zeigen, kann in einem Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen größer, gleich oder kleiner als die Anzahl der Unbekannten sein. In der Regel wird die Zahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten übereinstimmen. Beispiel 4 lässt erkennen, dass nicht alle Unbekannten in jeder Gleichung tatsächlich auftreten müssen. Man hat sich in einem solchen Fall vorzustellen, dass die fehlenden Unbekannten den Koeffizienten null haben.

* τὸ σύστημα (tò sýstema) = Vereinigung, Gesamtheit, das Ganze

Unabhängig von der Zahl der Gleichungen besteht eine Lösung eines Gleichungssystems immer aus so vielen Zahlen wie Unbekannte in dem System vorkommen. So ist z.B. $(-1|1|3)$ eine Lösung für Beispiel 2; jede der zwei Gleichungen mit drei Unbekannten wird von diesem Tripel erfüllt. Ebenso ist $(1|0)$ eine Lösung für Beispiel 3, da jede der drei Gleichungen mit zwei Unbekannten dieses Zahlenpaar als Lösung hat. Allgemein ist eine Lösung eines Systems von m Gleichungen für n Unbekannte ein n-Tupel von Zahlen, das jede der m Gleichungen des Systems erfüllt. Es muss also in jeder der Lösungsmengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ der einzelnen Gleichungen enthalten sein. Umgekehrt ist ein n-Tupel, das Element jeder dieser Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ist, auch stets eine Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ist daher die Schnittmenge der Lösungsmengen sämtlicher Einzelgleichungen:

$$L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m.$$

Bei einem Gleichungssystem für nur zwei Unbekannte kann man die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen in der Koordinatenebene veranschaulichen und ihre Schnittmenge L auf graphischem Wege bestimmen (graphisches Lösungsverfahren).

Wir kehren zurück zu unserem einleitenden

Beispiel: I $3x + y = 720$
II $2x + 5y = 1520$

Da es sich um ein lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte handelt, kann man die Lösungsmengen L_1 und L_2 der einzelnen Gleichungen durch zwei Geraden g_1 und g_2 graphisch darstellen (Abbildung 130.1). Der Schnittmenge von L_1 und L_2 kann dabei nur der Schnittpunkt S der beiden Geraden entsprechen. Die Abbildung lässt vermuten, dass er die Koordinaten $x = 160$ und $y = 240$ hat. Setzt man diese Werte in I und II ein, so zeigt sich, dass tatsächlich beide Gleichungen erfüllt sind.

Ergebnis: 1 kg Äpfel kostete 1,60 €, 1 kg Birnen 2,40 €.

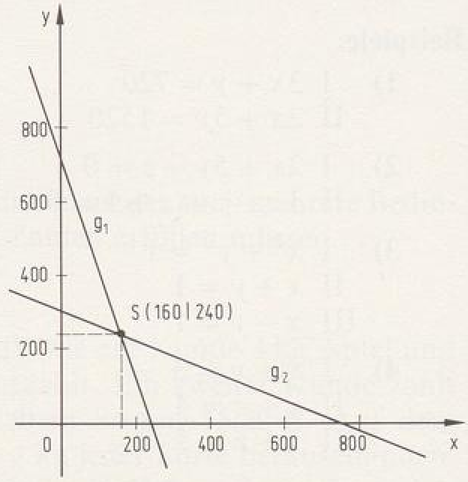

Abb. 130.1 Graphische Lösung* zum nebenstehenden Beispiel

* Den Fachausdruck *graphische Lösung* benutzt 1833 August Leopold CRELLE (1780–1855). – Siehe auch die Fußnote auf Seite 159.

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden UND-Verknüpfungen von Gleichungen in der für Gleichungssysteme üblichen Form an.

a) $(x-2y+3=0) \wedge (2x=4y-5)$
b) $(5x+3y-8z=10) \wedge (2x=y+7) \wedge (y=z)$
c) $(2x+4y-1=0) \wedge (x-3y=7) \wedge (5x+y-11=0)$
d) $(w+x=0) \wedge (w+x+y=0) \wedge (w+x+y+z=0)$

2. Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lineare Systeme?

a) $\begin{aligned} 3x-2y &= (-1)^2 \\ x+y &= |-4| \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x\cdot(2-y)+1 &= 0 \\ (3x+y)\cdot 2-1 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \frac{4x+3y}{(3{,}5)^2} &= 2 \\ \frac{2x-y}{3} &= \frac{x+3y}{2} \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} |x|-5|y| &= -12 \\ 2|x|+|y| &= 8 \end{aligned}$

3. Für die Lösungsmengen der zwei Gleichungen eines Systems mit drei Unbekannten gilt
$L_1 \supset \{(0|1|3), (2|-1|4), (1|1|1), (-7|-2|0)\}$ und
$L_2 \supset \{(2|2|2), (0|-1|3), (-7|0|-2), (2|-1|4)\}$.
Welche dieser Tripel sind Lösungen des Gleichungssystems?

4. Für die Lösungsmenge der ersten von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt $L_1 = \{(0|0), (1|2), (2|3), (3|2)\}$. Die zweite Gleichung lautet $y=x+1$. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

5. Die folgenden linearen Gleichungssysteme sind von besonders einfacher Bauart. Bestimme ihre Lösungsmengen.

a) $\begin{aligned} x &= 1 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} y &= 2 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 3x &= 5 \\ 6x-2y &= 7 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 11x+7y &= 0 \\ 13y &= 0 \\ z+2 &= 0 \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \\ 5x-4y+2z &= 1 \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} x &= 2 \\ x+y &= 2 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$

6. Ermittle die Lösungsmengen der folgenden nicht linearen Gleichungssysteme.

a) $\begin{aligned} x\cdot y &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x\cdot y &= 0 \\ x+y &= 4 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x\cdot y &= 0 \\ y^2 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x\cdot y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 4 \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} (x-1)(y+1) &= 0 \\ 2x-3y &= 5 \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} (2x+8)(5-4y) &= 0 \\ x\cdot y &= 1 \end{aligned}$

7. Aufgabe 6 des *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr., Ägypten):
Berechne die Länge und Breite eines Rechtecks der Fläche 12, wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge ist.

8. Bestimme graphisch die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme und mache durch Einsetzen die Probe.

a) $x - y = -1$
$x + y = 3$

b) $x - 3y - 4 = 0$
$4x - y + 6 = 0$

c) $x + 2y = 0$
$2x - y = 5$

d) $x + y = x - 3$
$4x = y + 5$

e) $\frac{x+y}{x} = 2$
$x + y = 1$

f) $\frac{5x - 2y + 1}{x + y} = 0$
$\frac{2x + 5y - 14}{x + 2} = 1$

Verwende zum Lösen der bei den Aufgaben **9** bis **12** auftretenden Gleichungssysteme das graphische Verfahren und mache die Probe.

9. Vor drei Jahren war Hans fünfmal so alt wie sein Bruder Otto; in drei Jahren wird er gerade doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden heute? (Maßstab: 1 Jahr $\triangleq$ 5 mm)

10. Zählt man zum Dreifachen einer ersten Zahl das Fünffache einer zweiten, so erhält man -1. Zieht man jedoch vom Fünffachen der ersten das Dreifache der zweiten Zahl ab, so ergibt sich -13. Wie heißen die beiden Zahlen?

•**11.** Addiert man zu einer zweistelligen Zahl ihre Quersumme, so erhält man 50. Vertauscht man dagegen die beiden Ziffern, so erhält man eine um 9 kleinere Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

12. a) $x + y = 5$
$3x - 2y = 0$
$x - 4y = -10$

b) $4x - 5y = 10$
$2x + y = -2$
$-x + 1{,}25y = 1$

c) $2x + 5y = 6$
$y = 3 - 0{,}4x$
$\frac{1}{3}x + 1 = 2 - \frac{5}{6}y$

6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

6.4.1 Bestimmung der Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kann im Koordinatensystem durch eine Gerade veranschaulicht werden. Daraus lassen sich leicht genauere Angaben über die bei einem System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten möglichen Typen von Lösungsmengen gewinnen. Wir bezeichnen wieder die den Lösungsmengen L_1, L_2 der beiden Gleichungen entsprechenden Geraden mit g_1, g_2. Dann gehört zu jeder Lösung $(x \mid y)$ des Gleichungssystems ein Punkt $(x \mid y)$, der sowohl auf g_1 als auch auf g_2 liegen muss. Da nun aber zwei Geraden der Koordinatenebene entweder genau einen oder keinen oder alle ihre Punkte gemeinsam haben, kann es auch nur drei verschiedene Typen von Lösungsmengen geben, nämlich