Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

b) Auf der Objektivfassung eines bestimmten Fotoapparats sind sieben Blendenzahlen angegeben, die kleinste davon heißt 2. Die übrigen Blendenzahlen sind so gewählt, dass beim Übergang von einer zur nächsten sich jeweils die Blendenfläche halbiert. Berechne die übrigen Blendenzahlen und gib die ersten beiden Ziffern ihrer Dezimalentwicklung an. (Damit erhält man die auf der Blendenskala angegebenen Zahlen!)
Hinweis: Beachte, dass die Blendenfläche zu d^2 proportional ist.

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

Wie findet man zu einer Zahl $a > 0$ den Wert von $\sqrt{a}$?
Bei den bisherigen Beispielen war das recht einfach; man konnte meist schnell eine positive Zahl angeben, deren Quadrat die Zahl a ergab. Schwieriger wird diese Aufgabe schon, wenn a eine große, uns nicht geläufige Quadratzahl ist. Wie findet man z. B., dass $\sqrt{33489}$ bzw. $\sqrt{157{,}7536}$ den Wert 187 bzw. 12,56 hat? Aber auch das sind noch Sonderfälle. Im Allgemeinen ist ja der Radikand a nicht das Quadrat einer rationalen Zahl; $\sqrt{a}$ ist dann irrational, und man muss sich damit begnügen, einen hinreichend genauen Näherungswert zu bestimmen.
Dir ist sicher schon bekannt, dass man solche Aufgaben bequem mit dem Taschenrechner lösen kann. Man muss lediglich den Radikanden a eingeben und die **Wurzeltaste** (manchmal zwei Tasten) drücken und schon wird ein (Näherungs-)Wert von $\sqrt{a}$ angezeigt. Wie ist das möglich? Sind die Wurzelwerte schon im Taschenrechner gespeichert und müssen nur abgerufen werden? Sicherlich nicht, wie du dir leicht klarmachen kannst! Die gesuchte Wurzel muss vielmehr jedes Mal neu berechnet werden. Dazu dient ein sehr schnell ablaufendes **Rechenprogramm**, das mit dem Drücken der Wurzeltaste gestartet wird. Für das Berechnen von Quadratwurzeln gibt es verschiedene Verfahren. Im Folgenden sollst du einige kennen lernen.

2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei diesem schon bekannten Verfahren schließt man den Wurzelwert zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen ein. Aus diesem Anfangsintervall gewinnt man durch Anwendung der Zehnteilungsmethode eine Intervallschachtelung für die gesuchte Wurzel. Der Rechenaufwand ist meist ziemlich groß.

2.2.2 Iterationsverfahren

Um zu einer Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel zu berechnen, beginnen wir mit einem Schätzwert $x_1 > 0$. Dieser ist zu groß bzw. zu klein bzw. richtig, wenn $x_1^2 > a$ bzw. $x_1^2 < a$ bzw. $x_1^2 = a$ gilt. Den letzten Fall, in welchem die Bestimmung von $\sqrt{a}$ zufällig schon gelungen ist, können wir im Folgenden außer Acht lassen.

Wegen $x_1^2 > a \Leftrightarrow x_1 > \frac{a}{x_1}$ bzw. $x_1^2 < a \Leftrightarrow x_1 < \frac{a}{x_1}$ kann man auch durch die Berechnung des Quotienten $\frac{a}{x_1}$ entscheiden, ob der Schätzwert zu groß oder zu klein ist. In jedem Fall liegt aber der gesuchte Wurzelwert *zwischen* den Zahlen x_1 und $\frac{a}{x_1}$. Als nächsten Näherungswert x_2 wählen wir daher eine Zahl aus diesem Intervall, und zwar den einfach zu berechnenden Mittelwert von x_1 und $\frac{a}{x_1}$, also $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$.

Ausgehend von x_2 kann man nun nach derselben Methode einen Näherungswert x_3, dann $x_4, x_5, \ldots$ berechnen. Allgemein erhalten wir den $(n+1)$ten Näherungswert x_{n+1} aus x_n nach der Formel

$$\boxed{x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2, \quad n \in \mathbb{N}.} \qquad \text{(I)}$$

Beispiel 1:

Gesucht ist $\sqrt{841}$.
Wir beginnen (z. B.!) mit dem Schätzwert $x_1 = 30$.
Durch Anwendung von (I) erhält man*:

$x_2 = (30 + \frac{841}{30}) : 2 \Leftrightarrow x_2 = 29{,}016666$

und weiter $x_3 = 29{,}000004$; $x_4 = 29$; $x_5 = 29$; …
Da $29^2 = 841$, hat man mit x_4 bereits den richtigen Wert der Wurzel gefunden!

Beispiel 2:

Gesucht ist $\sqrt{6}$.
Mit dem Schätzwert $x_1 = 2$ erhält man* nach (I)

$x_2 = 2{,}5$; $x_3 = 2{,}45$; $x_4 = 2{,}4494897$; $x_5 = x_4$ (!).

Sobald zwei aufeinander folgende Näherungswerte übereinstimmen, kann man die Rechnung abbrechen; der nächste Schritt wäre nur eine Wiederholung des vorausgehenden und müsste wieder dasselbe Ergebnis liefern. Dass dieses Ergebnis die gesuchte Wurzel ist, lässt sich leicht begründen:
Mit $x_{n+1} = x_n$ folgt aus (I)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2 && \| \cdot 2x_n \\ 2x_n^2 &= x_n^2 + a && \| - x_n^2 \\ x_n^2 &= a. \end{aligned}$$

Da $x_n > 0$ gilt, ist somit $x_n = \sqrt{a}$.

* Die angegebenen Zahlenwerte wurden auf einem Taschenrechner mit achtstelliger Anzeige berechnet.

Natürlich gilt in Beispiel 2 die Gleichung $x_5 = x_4$ nicht exakt, sondern nur im Rahmen der Anzeigegenauigkeit des verwendeten Taschenrechners. $x_4 = 2{,}4494897$ ist deshalb nur der bestmögliche Näherungswert, der mit diesem Rechner für die irrationale Zahl $\sqrt{6}$ ermittelt werden kann. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man nach Eingabe von 6 die Wurzeltaste drückt.

Das Besondere an dem hier angewandten Rechenverfahren besteht darin, dass zur Bestimmung der verschiedenen Näherungswerte immer wieder dieselbe Regel, hier (I), benützt wird. Eine solche Berechnungsmethode bezeichnet man als **Iterationsverfahren**.*
Ein Iterationsverfahren ist für das praktische Rechnen sehr vorteilhaft: Man kann beim Taschenrechner immer wieder dieselbe Tastenfolge benützen. Die Iterationsregel (I) lässt sich, sobald ein Näherungswert in der Anzeige steht, z. B. mit folgender Tastenfolge ausführen:

Nach dem zweiten =-Befehl wird der neue Näherungswert angezeigt. Mit ihm kann man, wie der Pfeil andeutet, das Verfahren wiederholen. Ein Iterationsverfahren lässt sich vor allem auf einem programmierbaren Rechner sehr einfach durchführen. Die Abbildungen 40.1 und 40.2 zeigen ein Struktogramm und ein Flussdiagramm für Programme zur Berechnung von $\sqrt{a}$ nach dem Iterationsverfahren (I). Bei den Taschenrechnern ist ein entsprechendes Programm fest eingebaut.

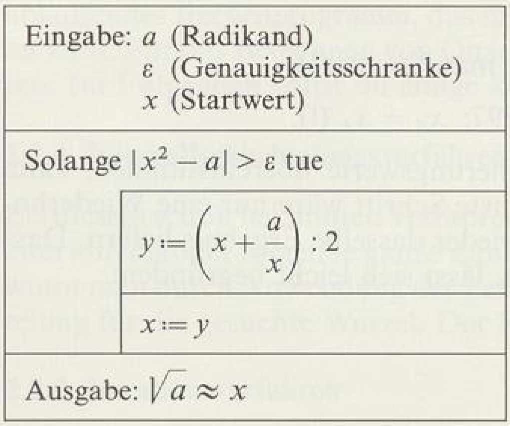

Abb. 40.1 Struktogramm zum Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_n^2 - a| \leqq \varepsilon$

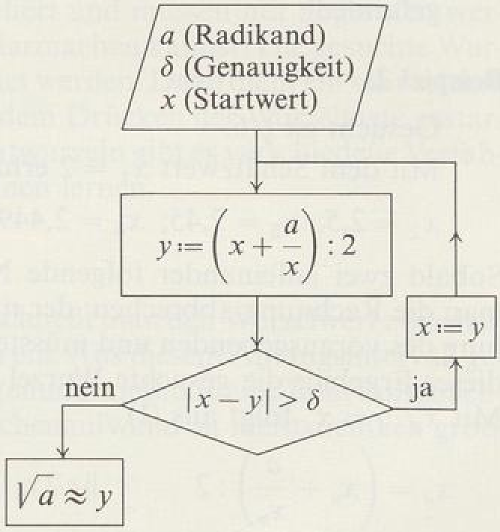

Abb. 40.2 Flussdiagramm für das Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| \leqq \delta$

* iterare (lat.) = etwas noch einmal tun, wiederholen; iteratio (lat.) = die Wiederholung.

Das Iterationsverfahren (I) lässt sich auch geometrisch veranschaulichen. Wir zeichnen dazu den Graphen der **Iterationsfunktion**, das ist in unserem Fall die Funktion mit der Gleichung $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2,\ x \in \mathbb{R}^+$. Sie liefert zu jedem Näherungswert x den nächsten Näherungswert y; d.h., setzt man $x = x_n$, so gilt $y = x_{n+1}$. Um dann die Zahl y als x_{n+1} wieder auf der x-Achse anzutragen verwendet man die Gerade mit der Gleichung $y = x$. Der auf ihr liegende Punkt mit der Ordinate y hat auch die Abszisse y, also x_{n+1} (Abbildung 41.1).

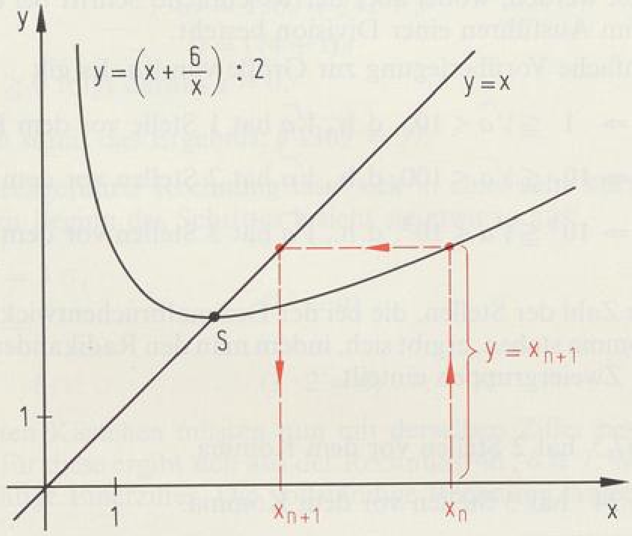

Abb. 41.1 Graphische Erzeugung von x_{n+1} aus x_n

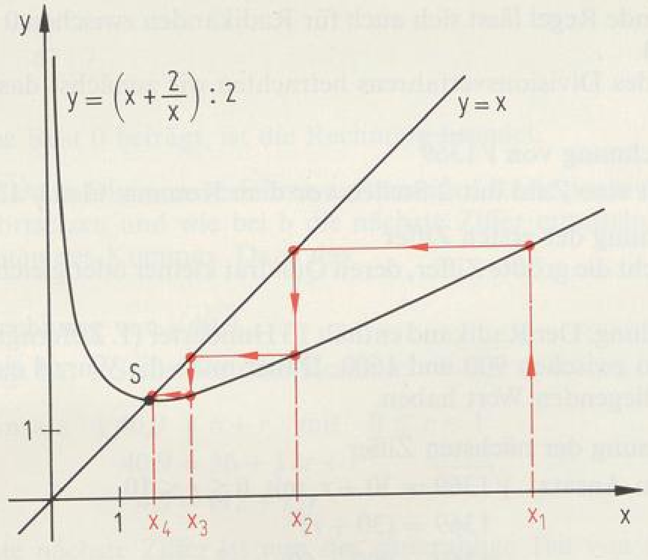

Abb. 41.2 Graphische Darstellung des Iterationsverfahrens

Der rote Linienzug in Abbildung 41.2 zeigt, dass die Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ sich von oben rasch der Abszisse des Schnittpunktes S der beiden Graphen nähern.

Man kann zeigen, dass dies immer so ist (vgl. Aufgaben 44/**4** und 45/**7**). Da S die Koordinaten $(\sqrt{a}|\sqrt{a})$ hat, strebt die Zahlenfolge $x_2, x_3, x_4, \ldots$ immer monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ (vgl. Aufgabe 45/**5**).

**2.2.3 Divisionsverfahren

Es gibt einen interessanten Algorithmus*, bei dem – ähnlich wie beim Intervallschachtelungsverfahren – die einzelnen Ziffern der Dezimalentwicklung einer Wurzel nacheinander berechnet werden, wobei aber der wesentliche Schritt bei der Bestimmung einer Dezimalen im Ausführen einer Division besteht.
Zunächst eine einfache Vorüberlegung zur Größe von $\sqrt{a}$. Es gilt

$1 \leqq a < 100 \Rightarrow 1 \leqq \sqrt{a} < 10$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 1 Stelle vor dem Komma

$100 \leqq a < 10000 \Rightarrow 10 \leqq \sqrt{a} < 100$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 2 Stellen vor dem Komma

$10^4 \leqq a < 10^6 \Rightarrow 10^2 \leqq \sqrt{a} < 10^3$, d.h., $\sqrt{a}$ hat 3 Stellen vor dem Komma
usw.

Daraus folgt: Die Zahl der Stellen, die bei der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ mit $a > 1$ vor dem Komma stehen, ergibt sich, indem man den Radikanden a vom Komma aus nach links in Zweiergruppen einteilt.

Beispiele: $\sqrt{13|67{,}5}$ hat 2 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{6|15|34}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

$\sqrt{10|47|69{,}824}$ hat 3 Stellen vor dem Komma.

Eine entsprechende Regel lässt sich auch für Radikanden zwischen 0 und 1 aufstellen (Aufgabe 46/**10**).
Zur Erklärung des Divisionsverfahrens betrachten wir zunächst das einfache

Beispiel 1: Berechnung von $\sqrt{1369}$
Das Ergebnis ist eine Zahl mit 2 Stellen vor dem Komma, also $\sqrt{13|69} = \_\ \_, \ldots$

a) Bestimmung der ersten Ziffer
Man sucht die größte Ziffer, deren Quadrat kleiner oder gleich 13 ist; Ergebnis 3.
Begründung: Der Radikand enthält 13 Hunderter (1. Zifferngruppe von links), liegt also zwischen 900 und 1600. Daher muss die Wurzel einen zwischen 30 und 40 liegenden Wert haben.

b) Bestimmung der nächsten Ziffer
Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 30 + r$ mit $0 \leqq r < 10$
folgt

$$1369 = (30 + r)^2$$
$$1369 = 900 + 60r + r^2$$
$$469 = (60 + r)r$$

* Algorithmus = Rechenverfahren. Das Wort Algorithmus entstand aus *algorismus*, einer Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Der ganzzahlige Teil von r ist die gesuchte Einerziffer. Um sie zu bestimmen bringen wir die letzte Gleichung auf die Form $469 : (60 + r) = r$. Da der Divisor $60 + r$ zwischen 60 und 70 liegt, kann r nur 7 Ganze enthalten; denn $8 \cdot 60 > 469$ und $6 \cdot 70 < 469$.

Somit gilt: $\sqrt{1369} = 37, \dots$

c) Bestimmung eventueller weiterer Stellen

Aus dem Ansatz $\sqrt{1369} = 37 + s$ mit $0 \leqq s < 1$

folgt
$$1369 = (37 + s)^2$$
$$1369 = 1369 + 74s + s^2$$
$$0 = (74 + s)s$$

Wegen $s \geqq 0$ folgt daraus $s = 0$.

Wir erhalten somit das Ergebnis: $\sqrt{1369} = 37$.

Die hier durchgeführte Rechnung lässt sich in einer sehr kurzen Niederschrift darstellen; zu Beginn des Schrittes **b** sieht sie etwa so aus:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{13|69} = 3\square, & \\
\underline{-9} & (3^2 = 9) \\
469 & \\
\quad 6\square \cdot \square & (3 \cdot 2 = 6)
\end{array}$$

Die drei roten Kästchen müssen nun mit derselben Ziffer besetzt werden! Ein Schätzwert für diese ergibt sich aus der Rechnung $46 : 6 \approx 7$. Wegen $67 \cdot 7 \leqq 469$ ist 7 die richtige Einerziffer. Die vollständige Rechnung lautet damit

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{13|69} = 37, & \\
\underline{-9} & \\
469 & \\
\underline{-469} & 67 \cdot 7 \\
0 &
\end{array}$$

Da der neue Rest 0 beträgt, ist die Rechnung beendet.

Solange die bei diesem Divisionsverfahren auftretenden Reste positiv sind, kann man die Rechnung fortsetzen und wie bei **b** die nächste Ziffer ermitteln. Dies gilt auch beim Überschreiten des Kommas. Dazu das

Beispiel 2: Berechnung von $\sqrt{40{,}9}$

Das Ergebnis hat 1 Stelle vor dem Komma: $\sqrt{40{,}9} = 6, \dots$

Aus dem Ansatz $\sqrt{40{,}9} = 6 + r$ mit $0 \leqq r < 1$

folgt
$$40{,}9 = 36 + 12r + r^2$$
$$4{,}9 = (12 + r)r$$

Die gesuchte nächste Ziffer ist nun der ganzzahlige Teil von $10r$. Wir führen deshalb $r' = 10r$ ein. Dazu multiplizieren wir beide Faktoren auf der rechten Seite mit 10, die ganze Gleichung also mit 100:

$$490 = (120 + r')r'$$

also
$$490 : (120 + r') = r'.$$

Als ganzzahliger Teil von r' ergibt sich daraus nicht 4, sondern 3. Somit gilt: $\sqrt{40{,}9} = 6{,}3\ldots$

Ganz entsprechend verfährt man bei der Bestimmung weiterer Ziffern. Die Kurzform der Rechnung sieht dann so aus:

$$\sqrt{40{,}9} = \sqrt{40{,}90\,00\,00\ldots} = 6{,}395\ldots$$

$$\begin{array}{r r l}
-36 & & (6^2 = 36) \\
4\,90 & & \\
-3\,69 & \underline{123 \cdot 3} & (6 \cdot 2 = 12) \\
1\,21\,00 & & \\
-1\,17\,21 & \underline{1269 \cdot 9} & (63 \cdot 2 = \underline{126} = 123 + 3) \\
6\,79\,00 & & \\
-6\,39\,25 & \underline{12785 \cdot 5} & (639 \cdot 2 = \underline{1278} = 1269 + 9) \\
39\,75 & &
\end{array}$$

Man rechnet so lange, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

** Zur Geschichte

Das angegebene Divisionsverfahren hat 1540 Reinerus Gemma Frisius (1508–1555) in seiner um 1536 geschriebenen *Arithmeticae practicae methodus facilis* veröffentlicht.

Aufgaben

1. Bei der Berechnung von $\sqrt{31}$ nach dem Intervallschachtelungsverfahren erhält man [5; 6] als erstes und [5,5; 5,6] als zweites Intervall. Muss man zur Bestimmung des nächsten Intervalls die Quadrate aller Zwischenwerte 5,51; 5,52; ...; 5,59 berechnen? Wie viele Quadrate sind bei geschicktem Vorgehen höchstens notwendig? Wie heißt das dritte Intervall für $\sqrt{31}$?

2. Das fünfte Intervall der Schachtelung für $\sqrt{21{,}8}$ heißt [4,6690; 4,6691]. Wie entscheidet man am einfachsten, ob der auf vier Stellen nach dem Komma gerundete Wert von $\sqrt{21{,}8}$ mit der linken oder mit der rechten Intervallgrenze übereinstimmt?

3. Berechne nach dem Iterationsverfahren (I) die Näherungswerte x_2 bis x_5 für

   a) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 3$, b) $\sqrt{13}$ und $x_1 = 4$,

   c) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2$, d) $\sqrt{6{,}32}$ und $x_1 = 2{,}5$,

   e) $\sqrt{3987}$ und $x_1 = 60$, f) $\sqrt{0{,}95}$ und $x_1 = 1$.

4. Zeichne den Graphen der zur Berechnung von $\sqrt{8}$ gehörenden Iterationsfunktion $x \mapsto \left(x + \frac{8}{x}\right) : 2$ im Intervall $0 < x \leqq 10$ und veranschauliche das Iterationsverfahren wie in Abbildung 41.2. Verwende dabei als (sehr schlechten!) Anfangswert zuerst 10, dann 0,5.

5. Beweise, dass die Gerade $y = x$ die Kurve $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2$, $x > 0$, im Punkt $S(\sqrt{a}|\sqrt{a})$ schneidet.

•6. Die halbe Summe zweier Zahlen bezeichnet man als ihr **arithmetisches Mittel***; die Wurzel aus dem Produkt zweier positiver Zahlen heißt **geometrisches Mittel***. Weise nach, dass das geometrische Mittel zweier Zahlen stets kleiner oder gleich ihrem arithmetischen Mittel ist.

7. a) Bilde das geometrische Mittel der in der Formel des Iterationsverfahrens (I) vorkommenden Zahlen x_n und $\frac{a}{x_n}$. Zeige, dass für $x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2$ stets die Ungleichung $x_{n+1} \geqq \sqrt{a}$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).

b) Bestätige die Beziehung $x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$ und begründe damit die Ungleichungen $x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq \ldots$

c) Die aus zwei positiven Zahlen u und v gebildete Zahl $\frac{2uv}{u+v}$ bezeichnet man als **harmonisches Mittel*** von u und v.
Beweise, dass für die beim Iterationsverfahren (I) auftretenden Zahlenpaare $\left(x_1 \middle| \frac{a}{x_1}\right), \left(x_2 \middle| \frac{a}{x_2}\right), \left(x_3 \middle| \frac{a}{x_3}\right), \ldots$ gilt:
Das arithmetische Mittel der Zahlen eines Paars ist die erste Zahl des nächsten Paars. Das harmonische Mittel der Zahlen eines Paars ist die zweite Zahl des nächsten Paars.

* ARCHYTAS, der als Staatsmann, Feldherr, pythagoreischer Philosoph und Mathematiker um 375 v. Chr. in Tarent wirkte, sagt, dass es in der Musik drei Mittel gebe, und zwar die μέση ἀριθμητική (mese arithmetikē), das arithmetische Mittel, für das $u - m = m - v$ gilt, die μέση γεωμετρική (mese geometrikē), das geometrische Mittel, für das $u : m = m : v$ gilt, und schließlich die μέση ὑπεναντίη (mese hypenantíe), das konträre oder entgegengesetzte Mittel, das auch μέση ἁρμονική (mese harmonikē), harmonisches Mittel, genannt wird und für das $(u - m) : u = (m - v) : v$ gilt. HIPPASOS (Mitte 5. Jh. v. Chr.) soll, anderen Berichten zufolge, als erster den Ausdruck harmonisches Mittel gebraucht haben. Löst man jeweils nach m auf, dann erhält man die bekannten Ausdrücke $\frac{u+v}{2}$ bzw. $\sqrt{uv}$ bzw. $\frac{2uv}{u+v}$.

Die Mittel ergeben sich aus Sonderfällen von Proportionen. Setzt man nämlich in der arithmetischen Proportion $a - b = c - d$ bzw. in der geometrischen Proportion $a : b = c : d$ die Innenglieder b und c gleich, dann erhält man mit den Außengliedern u und v die oben angegebenen stetigen oder fortlaufenden Proportionen (siehe Seite 99) $u - m = m - v$ bzw. $u : m = m : v$. Allmählich wurde es Brauch, eine solche dreigliedrige stetige Proportion μεσότης (mesótes) = *Mittelheit* zu nennen. EUKLID (um 300 v. Chr.) verwendet nur die geometrische Proportion. In Buch VI, Satz 13 der *Elemente* nennt er $\sqrt{uv}$ *mittlere proportionale Größe* (μέσον μέγεθος ἀνάλογον [méson mégethos análogon]), was JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200–1256) mit *medium proportionale* übersetzt. Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) bildet 1489 in seinem Rechenbuch dafür *eyn mittel zal* und Johann SCHEYBL (1494–1570) in seiner Euklidübersetzung *Das sibend/acht und neunt buch des hochberümbten Mathematici Euclidis Megarensis* von 1555 das *mittel proportional zwaier zalen* oder kurz *mittel*. Den Ausdruck *geometrisches Mittel* hat anscheinend 1808 Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) in seinem *Mathematischen Wörterbuch* geprägt. Bei Johannes KEPLER (1571–1630) findet man 1615 *medium arithmeticum* in seiner *Nova Stereometria doliorum vinariorum* – »Neue Raummesskunst für Weinfässer« –, die Eindeutschung *arithmetisches Mittel* erst im 1. Viertel des 19. Jh.s.
(Übrigens verwechselt SCHEYBL wie so mancher andere den Mathematiker EUKLID [um 300 v. Chr.] mit dem Philosophen EUKLID von Megara [um 450–um 370 v. Chr.], einem Schüler des SOKRATES. Federigo COMMANDINO [1509–1575] weist 1572 in seiner Euklidübersetzung auf diesen Irrtum hin.)

8. Wähle einen Startwert x_1 und berechne mit dem Iterationsverfahren (I) die ersten vier geltenden* Ziffern der Dezimalentwicklung von

a) $\sqrt{8170}$ **b)** $\sqrt{14{,}36}$ **c)** $\sqrt{0{,}088855}$ **d)** $\sqrt{0{,}000001234}$.

9. Wie viel Stellen vor dem Komma hat die Dezimalentwicklung der Wurzel und wie heißt die erste Ziffer?

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{37{,}64}$ **c)** $\sqrt{428}$ **d)** $\sqrt{3650809}$

e) $\sqrt{82145}$ **f)** $\sqrt{8214{,}5}$ **g)** $\sqrt{821{,}45}$ **h)** $\sqrt{82{,}145}$

10. a) Welche Ungleichung für $\sqrt{a}$ folgt aus

1) $1 > a \geqq 0{,}01$; **2)** $0{,}01 > a \geqq 0{,}0001$; **3)** $\frac{1}{10^4} > a \geqq \frac{1}{10^6}$?

b) Wo steht in der Dezimalentwicklung von **1)** $\sqrt{0{,}5}$; **2)** $\sqrt{0{,}025}$; **3)** $\sqrt{0{,}004}$ die erste von 0 verschiedene Ziffer und wie heißt sie?

11. Wie muss bzw. kann der Anfang der Dezimalentwicklung der Wurzel aussehen? (Die Punkte bedeuten weggelassene Ziffern.)

a) $\sqrt{0{,}7\ldots}$ **b)** $\sqrt{0{,}006\ldots}$ **c)** $\sqrt{0{,}12\ldots}$ **d)** $\sqrt{0{,}0147\ldots}$

12. Berechne nach dem Divisionsverfahren den ganzzahligen Teil der Wurzel.

a) $\sqrt{1000}$ **b)** $\sqrt{80656}$ **c)** $\sqrt{338725}$ **d)** $\sqrt{3387{,}25}$

13. Berechne nach dem Divisionsverfahren den auf Hundertstel gerundeten Wert von **a)** $\sqrt{19}$, **b)** $\sqrt{187{,}5}$, **c)** $\sqrt{17{,}7241}$, **d)** $\sqrt{0{,}6196}$.

14. Auf der in Abbildung 48.1 gezeigten altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) wurde zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln folgendes Verfahren angewandt, das auch Heron (um 62 n. Chr.) in seinem *Περὶ μέτρων* – »Vermessungslehre« – angibt:

$$\sqrt{p^2+q} \approx p + \frac{q}{2p} \qquad (p > 0;\ p^2 + q \geqq 0)$$

Welcher Wert ergibt sich damit

a) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 4 - 1$;

b) für $\sqrt{3}$ aus der Zerlegung $3 = 2{,}89 + 0{,}11$;

c) für $\sqrt{6}$ aus der Zerlegung $6 = 6{,}25 - 0{,}25$;

d) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 400 + 35$;

e) für $\sqrt{435}$ aus der Zerlegung $435 = 441 - 6$;

f) für $\sqrt{1000}$ aus der Zerlegung $1000 = 1024 - 24$?

Vergleiche das Ergebnis mit dem Näherungswert des Taschenrechners.

* Die geltenden Ziffern werden von links nach rechts gezählt. Die erste von 0 verschiedene Ziffer ist dabei die erste geltende Ziffer.

15. Welcher Näherungswert x_2 ergibt sich nach der Formel von Aufgabe **14** für $\sqrt{a}$, wenn man mit Hilfe eines Schätzwertes x_1 den Radikanden in der Form $a = x_1^2 + (a - x_1^2)$ darstellt? Vergleiche damit das entsprechende Ergebnis beim Iterationsverfahren (I).

16. Von HERON (um 62 n. Chr.) wird angenommen, dass er für Wurzeln der Form $\sqrt{n^2 - 1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auch die Näherungsformel

$$\sqrt{n^2 - 1} \approx n - \frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} \quad \text{verwandte.}$$

a) Zeige, dass die von HERON angegebene Näherung $\sqrt{3} \approx \frac{26}{15}$ mit dieser Formel gewonnen werden kann.

b) Welcher Näherungswert ergibt sich aus obiger Formel für

1) $\sqrt{15}$, **2)** $\sqrt{63}$, **3)** $\sqrt{120}$?

c) Vergleiche die HERONsche Näherung für $\sqrt{3}$ mit der von ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) stammenden Abschätzung

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Vergleiche die Ergebnisse jeweils auch mit den von deinem Taschenrechner gelieferten Näherungswerten.

17. Die Babylonier rechneten bekanntlich im Sexagesimalsystem*, also im Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60. In den Übersetzungen ihrer Keilschrifttexte werden Zahlen meist in der Form geschrieben, dass hinter die Ganzen ein Strichpunkt und zwischen Einer, Sechziger, ... bzw. zwischen Sechzigstel, 3600stel, ... jeweils ein Komma gesetzt wird. Zum Beispiel bedeutet 4,20;25,08 die Zahl $4 \cdot 60 + 20 + \frac{25}{60} + \frac{8}{3600}$.

a) Prüfe die aus einer babylonischen Wurzeltabelle stammende Gleichung $\sqrt{0;38,24} = 0;48$.

b) Gib den Wert von **1)** $\sqrt{3,45}$, **2)** $\sqrt{1;33,45}$, **3)** $\sqrt{11;13,21}$ im Sexagesimalsystem an.

18. Die Keilschrifttafel VAT 6598 (Abbildung 48.1) enthält folgende Aufgabe: Ein Tor. $\frac{1}{2}$ GAR und 2 Ellen Höhe, 2 Ellen Weite. Seine Diagonale ist was?

a) Wie viel Ellen misst die Diagonale, wenn 1 GAR = 12 Ellen** gilt?

b) Auf der Tafel wird für die Länge der Diagonale der Wert 0;41,15 GAR angegeben. Zeige, dass dies keine exakte Lösung ist und dass sie sich nach der Näherungsformel von Aufgabe **14** ergibt, wenn

* sexagesimus (lat.) = der sechzigste
** 1 GAR bedeutet etwa 6 Meter, 1 babylonische Elle also etwa 5 dm.

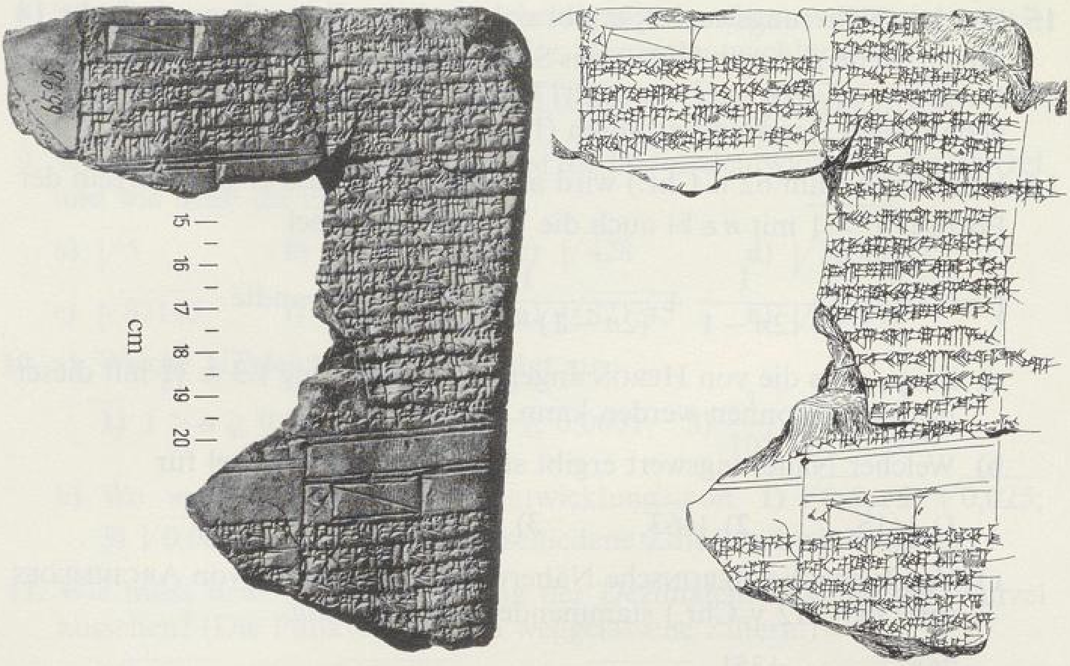

Abb. 48.1 Rückseite der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598, aufbewahrt in Berlin, Staatliche Museen: **V**orderasiatische **A**bteilung; **T**ontafeln, samt zugehöriger Autographie (wörtlich: Selbstgeschriebenes), d.h. handschriftlicher Übertragung der in den Ton eingedrückten Zeichen

man für p^2 die größte Quadratzahl wählt, die im Quadrat der Diagonalen enthalten ist.

c) Für dieselbe Aufgabe wird auf der Tafel auch noch die Lösung 0;42,13,20 GAR angegeben. Vergleiche die Genauigkeit der beiden Lösungen.

19. a) Auf der babylonischen Keilschrifttafel* AO 6484 aus Uruk aus der Zeit der SELEUKIDEN (321–63 v. Chr.) findet man für $\sqrt{2}$ den sexagesimalen Wert 1;25.

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert mit dem von deinem Taschenrechner angezeigten Wert überein?

2) Man kann nur vermuten, dass die Babylonier diese Näherung durch zweimalige Anwendung der Formel von Aufgabe 46/**14** gefunden haben, und zwar beginnend mit $p_1^2 = 1$; der sich dabei ergebende Näherungswert wird als p_2 genommen. Führe diese Rechnung durch.

• **b)** Auf der altbabylonischen Keilschrifttafel** YBC 7289 (Abbildung 49.1) steht auf der Diagonale eines Quadrats die Sexagesimalzahl 1;24,51,10.

* aufbewahrt im Louvre zu Paris in der Abteilung **A**ntiquités **O**rientales
** aufbewahrt in der **Y**ale **B**abylonian **C**ollection in New Haven (USA)

1) Auf wie viel Dezimalstellen stimmt dieser Wert für $\sqrt{2}$ mit dem von deinem Taschenrechner hierfür angezeigten Wert überein?

2) Wie die Babylonier diesen recht genauen Wert gefunden haben, wissen wir nicht. Nahe liegend erscheinen die beiden folgenden Verfahren.
1. Art: Man führt zuerst das in **a 2** beschriebene Näherungsverfahren noch einen Schritt weiter.
2. Art: Man wendet zuerst auf 1;25 das Iterationsverfahren (I) von Seite 38f. einmal an.
Zeige, dass man jedes Mal $1\frac{169}{408}$ als Näherungswert erhält. Rechnet man dann diesen Bruch in eine Sexagesimalzahl um* und bricht nach der 3. Sexagesimalstelle hinter dem Semikolon ab, so erhält man die auf der Diagonale stehende Zahl. Weise dies nach.

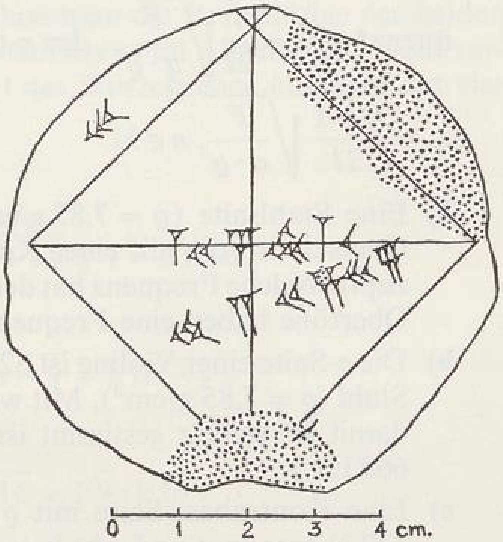

Abb. 49.1 Autographie der altbabylonischen Keilschrifttafel YBC 7289 (um 1700 v. Chr.). Auf der Quadratseite links oben liest man ‹‹‹ = 30, auf der Diagonale I ‹‹ᴵᴵ ‹‹ I ‹ als Näherungswert für $\sqrt{2}$. Darunter steht die entsprechende Länge der Diagonale.

3) Berechne mit Hilfe dieses Näherungswerts die Länge der Diagonale als Sexagesimalzahl, wenn die Quadratseite die Länge 30 hat. (Abbildung 49.1)

20. Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft von 0 °C beträgt $c_0 = 331{,}6\,\mathrm{m/s}$. Sie nimmt mit steigender Temperatur zu, und zwar gilt bei der Lufttemperatur t (in °C): $c = c_0\sqrt{1+\frac{1}{273{,}2\,\mathrm{K}}\,t}$.

a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit bei 20 °C bzw. 40 °C?

b) Bei welcher Temperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit 325 m/s?

21. Wenn eine schwingende Saite von der Länge l, dem Querschnitt q und der Dichte ϱ mit einer Kraft F gespannt ist, dann hat ihr Grundton die Fre-

* Beispiel einer Umrechnung:

$$\frac{3}{35}=\frac{\frac{3}{35}\cdot 60}{60}=\frac{\frac{36}{7}}{60}=\frac{5+\frac{1}{7}}{60}=\frac{5}{60}+\frac{\frac{1}{7}}{60}=\frac{5}{60}+\frac{\frac{1}{7}\cdot 60}{3600}=\frac{5}{60}+\frac{8}{3600}+\frac{\frac{4}{7}\cdot 60}{216000}=0;05,08,\ldots$$