Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

2.2.2 Iterationsverfahren

b) Auf der Objektivfassung eines bestimmten Fotoapparats sind sieben Blendenzahlen angegeben, die kleinste davon heißt 2. Die übrigen Blendenzahlen sind so gewählt, dass beim Übergang von einer zur nächsten sich jeweils die Blendenfläche halbiert. Berechne die übrigen Blendenzahlen und gib die ersten beiden Ziffern ihrer Dezimalentwicklung an. (Damit erhält man die auf der Blendenskala angegebenen Zahlen!)
Hinweis: Beachte, dass die Blendenfläche zu d^2 proportional ist.

2.2 Berechnung von Quadratwurzeln

Wie findet man zu einer Zahl $a > 0$ den Wert von $\sqrt{a}$?
Bei den bisherigen Beispielen war das recht einfach; man konnte meist schnell eine positive Zahl angeben, deren Quadrat die Zahl a ergab. Schwieriger wird diese Aufgabe schon, wenn a eine große, uns nicht geläufige Quadratzahl ist. Wie findet man z. B., dass $\sqrt{33489}$ bzw. $\sqrt{157{,}7536}$ den Wert 187 bzw. 12,56 hat? Aber auch das sind noch Sonderfälle. Im Allgemeinen ist ja der Radikand a nicht das Quadrat einer rationalen Zahl; $\sqrt{a}$ ist dann irrational, und man muss sich damit begnügen, einen hinreichend genauen Näherungswert zu bestimmen.
Dir ist sicher schon bekannt, dass man solche Aufgaben bequem mit dem Taschenrechner lösen kann. Man muss lediglich den Radikanden a eingeben und die **Wurzeltaste** (manchmal zwei Tasten) drücken und schon wird ein (Näherungs-)Wert von $\sqrt{a}$ angezeigt. Wie ist das möglich? Sind die Wurzelwerte schon im Taschenrechner gespeichert und müssen nur abgerufen werden? Sicherlich nicht, wie du dir leicht klarmachen kannst! Die gesuchte Wurzel muss vielmehr jedes Mal neu berechnet werden. Dazu dient ein sehr schnell ablaufendes **Rechenprogramm**, das mit dem Drücken der Wurzeltaste gestartet wird. Für das Berechnen von Quadratwurzeln gibt es verschiedene Verfahren. Im Folgenden sollst du einige kennen lernen.

2.2.1 Intervallschachtelungsverfahren

Bei diesem schon bekannten Verfahren schließt man den Wurzelwert zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen ein. Aus diesem Anfangsintervall gewinnt man durch Anwendung der Zehnteilungsmethode eine Intervallschachtelung für die gesuchte Wurzel. Der Rechenaufwand ist meist ziemlich groß.

2.2.2 Iterationsverfahren

Um zu einer Zahl $a > 0$ die Quadratwurzel zu berechnen, beginnen wir mit einem Schätzwert $x_1 > 0$. Dieser ist zu groß bzw. zu klein bzw. richtig, wenn $x_1^2 > a$ bzw. $x_1^2 < a$ bzw. $x_1^2 = a$ gilt. Den letzten Fall, in welchem die Bestimmung von $\sqrt{a}$ zufällig schon gelungen ist, können wir im Folgenden außer Acht lassen.

Wegen $x_1^2 > a \Leftrightarrow x_1 > \frac{a}{x_1}$ bzw. $x_1^2 < a \Leftrightarrow x_1 < \frac{a}{x_1}$ kann man auch durch die Berechnung des Quotienten $\frac{a}{x_1}$ entscheiden, ob der Schätzwert zu groß oder zu klein ist. In jedem Fall liegt aber der gesuchte Wurzelwert *zwischen* den Zahlen x_1 und $\frac{a}{x_1}$. Als nächsten Näherungswert x_2 wählen wir daher eine Zahl aus diesem Intervall, und zwar den einfach zu berechnenden Mittelwert von x_1 und $\frac{a}{x_1}$, also $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$.

Ausgehend von x_2 kann man nun nach derselben Methode einen Näherungswert x_3, dann $x_4, x_5, \ldots$ berechnen. Allgemein erhalten wir den $(n+1)$ten Näherungswert x_{n+1} aus x_n nach der Formel

$$\boxed{x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2, \quad n \in \mathbb{N}.} \qquad \text{(I)}$$

Beispiel 1:

Gesucht ist $\sqrt{841}$.
Wir beginnen (z. B.!) mit dem Schätzwert $x_1 = 30$.
Durch Anwendung von (I) erhält man*:

$x_2 = (30 + \frac{841}{30}) : 2 \Leftrightarrow x_2 = 29{,}016666$

und weiter $x_3 = 29{,}000004$; $x_4 = 29$; $x_5 = 29$; …
Da $29^2 = 841$, hat man mit x_4 bereits den richtigen Wert der Wurzel gefunden!

Beispiel 2:

Gesucht ist $\sqrt{6}$.
Mit dem Schätzwert $x_1 = 2$ erhält man* nach (I)

$x_2 = 2{,}5$; $x_3 = 2{,}45$; $x_4 = 2{,}4494897$; $x_5 = x_4$ (!).

Sobald zwei aufeinander folgende Näherungswerte übereinstimmen, kann man die Rechnung abbrechen; der nächste Schritt wäre nur eine Wiederholung des vorausgehenden und müsste wieder dasselbe Ergebnis liefern. Dass dieses Ergebnis die gesuchte Wurzel ist, lässt sich leicht begründen:
Mit $x_{n+1} = x_n$ folgt aus (I)

$$\begin{aligned} x_n &= \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2 \qquad && \| \cdot 2x_n \\ 2x_n^2 &= x_n^2 + a && \| - x_n^2 \\ x_n^2 &= a\,. \end{aligned}$$

Da $x_n > 0$ gilt, ist somit $x_n = \sqrt{a}$.

* Die angegebenen Zahlenwerte wurden auf einem Taschenrechner mit achtstelliger Anzeige berechnet.

Natürlich gilt in Beispiel 2 die Gleichung $x_5 = x_4$ nicht exakt, sondern nur im Rahmen der Anzeigegenauigkeit des verwendeten Taschenrechners. $x_4 = 2{,}4494897$ ist deshalb nur der bestmögliche Näherungswert, der mit diesem Rechner für die irrationale Zahl $\sqrt{6}$ ermittelt werden kann. Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man nach Eingabe von 6 die Wurzeltaste drückt.

Das Besondere an dem hier angewandten Rechenverfahren besteht darin, dass zur Bestimmung der verschiedenen Näherungswerte immer wieder dieselbe Regel, hier (I), benützt wird. Eine solche Berechnungsmethode bezeichnet man als **Iterationsverfahren**.*

Ein Iterationsverfahren ist für das praktische Rechnen sehr vorteilhaft: Man kann beim Taschenrechner immer wieder dieselbe Tastenfolge benützen. Die Iterationsregel (I) lässt sich, sobald ein Näherungswert in der Anzeige steht, z. B. mit folgender Tastenfolge ausführen:

Nach dem zweiten = -Befehl wird der neue Näherungswert angezeigt. Mit ihm kann man, wie der Pfeil andeutet, das Verfahren wiederholen. Ein Iterationsverfahren lässt sich vor allem auf einem programmierbaren Rechner sehr einfach durchführen. Die Abbildungen 40.1 und 40.2 zeigen ein Struktogramm und ein Flussdiagramm für Programme zur Berechnung von $\sqrt{a}$ nach dem Iterationsverfahren (I). Bei den Taschenrechnern ist ein entsprechendes Programm fest eingebaut.

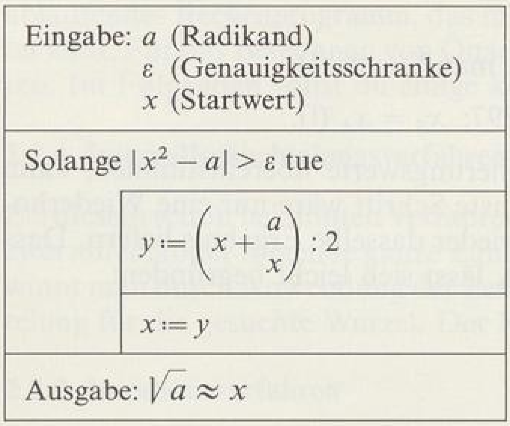

Abb. 40.1 Struktogramm zum Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_n^2 - a| \leqq \varepsilon$

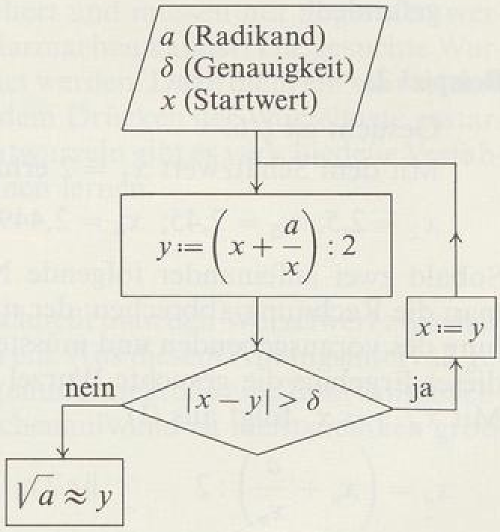

Abb. 40.2 Flussdiagramm für das Iterationsverfahren (I) mit der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| \leqq \delta$

* iterare (lat.) = etwas noch einmal tun, wiederholen; iteratio (lat.) = die Wiederholung.

Das Iterationsverfahren (I) lässt sich auch geometrisch veranschaulichen. Wir zeichnen dazu den Graphen der **Iterationsfunktion**, das ist in unserem Fall die Funktion mit der Gleichung $y = \left(x + \frac{a}{x}\right) : 2,\ x \in \mathbb{R}^+$. Sie liefert zu jedem Näherungswert x den nächsten Näherungswert y; d.h., setzt man $x = x_n$, so gilt $y = x_{n+1}$. Um dann die Zahl y als x_{n+1} wieder auf der x-Achse anzutragen verwendet man die Gerade mit der Gleichung $y = x$. Der auf ihr liegende Punkt mit der Ordinate y hat auch die Abszisse y, also x_{n+1} (Abbildung 41.1).

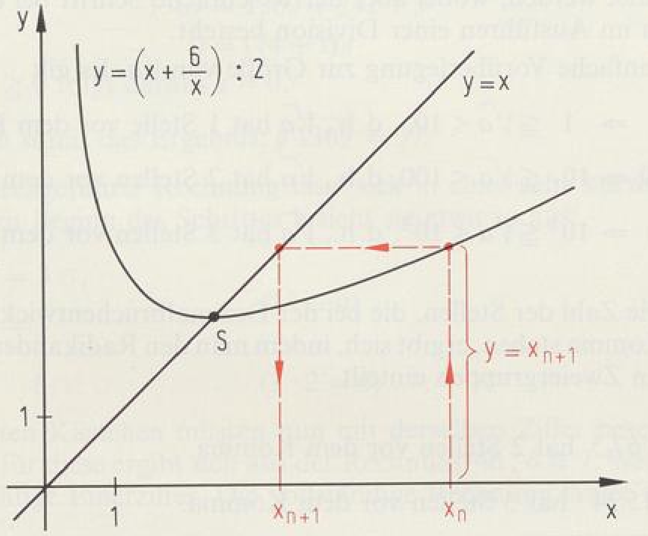

Abb. 41.1 Graphische Erzeugung von x_{n+1} aus x_n

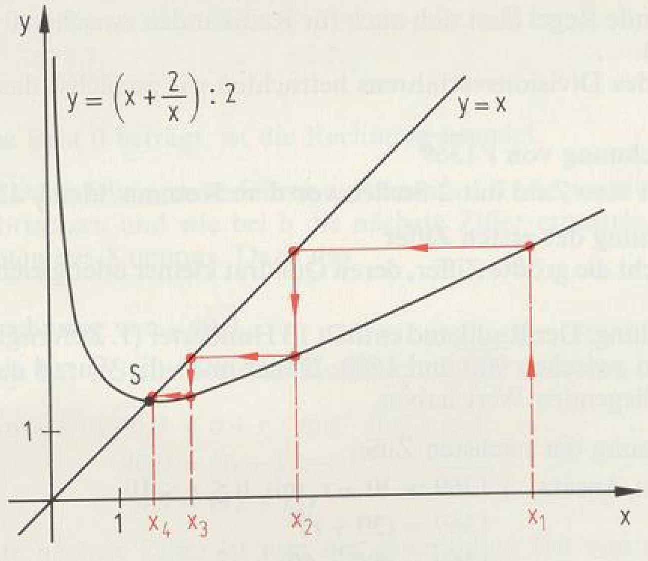

Abb. 41.2 Graphische Darstellung des Iterationsverfahrens

Der rote Linienzug in Abbildung 41.2 zeigt, dass die Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ sich von oben rasch der Abszisse des Schnittpunktes S der beiden Graphen nähern.