Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

8. Bestimme graphisch die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme und mache durch Einsetzen die Probe.

a) $x - y = -1$
$x + y = 3$

b) $x - 3y - 4 = 0$
$4x - y + 6 = 0$

c) $x + 2y = 0$
$2x - y = 5$

d) $x + y = x - 3$
$4x = y + 5$

e) $\dfrac{x+y}{x} = 2$
$x + y = 1$

f) $\dfrac{5x - 2y + 1}{x + y} = 0$
$\dfrac{2x + 5y - 14}{x + 2} = 1$

Verwende zum Lösen der bei den Aufgaben **9** bis **12** auftretenden Gleichungssysteme das graphische Verfahren und mache die Probe.

9. Vor drei Jahren war Hans fünfmal so alt wie sein Bruder Otto; in drei Jahren wird er gerade doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden heute? (Maßstab: 1 Jahr $\hat{=}$ 5 mm)

10. Zählt man zum Dreifachen einer ersten Zahl das Fünffache einer zweiten, so erhält man -1. Zieht man jedoch vom Fünffachen der ersten das Dreifache der zweiten Zahl ab, so ergibt sich -13. Wie heißen die beiden Zahlen?

•**11.** Addiert man zu einer zweistelligen Zahl ihre Quersumme, so erhält man 50. Vertauscht man dagegen die beiden Ziffern, so erhält man eine um 9 kleinere Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

12. a) $x + y = 5$
$3x - 2y = 0$
$x - 4y = -10$

b) $4x - 5y = 10$
$2x + y = -2$
$-x + 1{,}25y = 1$

c) $2x + 5y = 6$
$y = 3 - 0{,}4x$
$\frac{1}{3}x + 1 = 2 - \frac{5}{6}y$

6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

6.4.1 Bestimmung der Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kann im Koordinatensystem durch eine Gerade veranschaulicht werden. Daraus lassen sich leicht genauere Angaben über die bei einem System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten möglichen Typen von Lösungsmengen gewinnen. Wir bezeichnen wieder die den Lösungsmengen L_1, L_2 der beiden Gleichungen entsprechenden Geraden mit g_1, g_2. Dann gehört zu jeder Lösung $(x \mid y)$ des Gleichungssystems ein Punkt $(x \mid y)$, der sowohl auf g_1 als auch auf g_2 liegen muss. Da nun aber zwei Geraden der Koordinatenebene entweder genau einen oder keinen oder alle ihre Punkte gemeinsam haben, kann es auch nur drei verschiedene Typen von Lösungsmengen geben, nämlich

genau eine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$,
oder keine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{\ \}$,
oder unendlich viele Lösungen; dann gilt $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge haben wir bis jetzt nur das graphische Verfahren kennen gelernt. Seine Genauigkeit ist offensichtlich sehr begrenzt. Wir benötigen daher rechnerische Verfahren, die exakte Ergebnisse liefern. Die Lösungsmenge lässt sich besonders leicht angeben, wenn das Gleichungssystem folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x = a \\ \text{II} & y = b. \end{array}$$

In diesem Fall ist $L_1 = \{(x|y) \mid x = a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$, $L_2 = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = b\}$, woraus $L = L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$ folgt. Die Lösung $(a|b)$ kann natürlich direkt am Gleichungssystem abgelesen werden.
Um die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, wird man versuchen, es durch geeignete Umformung auf die obige einfache Form zu bringen. Dabei kommt es aber wesentlich darauf an, dass das durch Umformung entstandene Gleichungssystem genau dieselben Lösungen besitzt wie das ursprüngliche.
Wir vereinbaren

Definition 133.1: Zwei Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Zum Lösen beliebiger linearer Gleichungssysteme benötigt man die beiden folgenden Umformungsschritte, von denen man leicht zeigen kann, dass sie Äquivalenzumformungen sind:

(A) Man multipliziert eine Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl; die übrigen Gleichungen bleiben ungeändert.

(B) Man verändert eine der Gleichungen dadurch, dass man ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung zu ihr addiert; alle übrigen Gleichungen werden in der ursprünglichen Form beibehalten.

Dass diese beiden Schritte wirklich Äquivalenzumformungen darstellen, sei an einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufgezeigt:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & ax + by = e \\ \text{II} & cx + dy = f \end{array}$$

Umformung (A): Wir multiplizieren etwa I mit $r \neq 0$ und behalten II bei. Die neuen Gleichungen nennen wir I′, II′.

$$\begin{array}{llll} \text{I}' & rax + rby = re & \qquad & \text{I}' = \text{I} \cdot r \\ \text{II}' & cx + dy = f & & \text{II}' = \text{II} \end{array}$$

Jede Lösung $(x|y)$ des Systems (I, II) genügt auch dem System (I′, II′); die Lösungsmenge L von (I, II) ist also in der Lösungsmenge L' von (I′, II′) enthalten: $L \subset L'$. Man schreibt in diesem Fall: (I, II) $\Rightarrow$ (I′, II′).

Umgekehrt kann man aber aus (I′, II′) wieder (I, II) gewinnen, indem man I′ mit $\frac{1}{r}$ multipliziert und II′ beibehält. Hier wird die Voraussetzung $r \neq 0$ benötigt! Daher gilt auch: $L' \subset L$ oder (I′, II′) $\Rightarrow$ (I, II). Wegen $L \subset L'$ und $L' \subset L$ ist $L = L'$ und daher (I, II) $\Leftrightarrow$ (I′, II′).

Umformung (B): Wir addieren etwa die mit s multiplizierte Gleichung I zu II und behalten die uspröngliche Gleichung I bei.

I′	$ax + by = e$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}$
II′	$(sa + c)x + (sb + d)y = se + f$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} + \mathrm{I} \cdot s$

Jede Lösung von (I, II) ist auch Lösung von (I′, II′); also (I, II) $\Rightarrow$ (I′, II′). Man gelangt umgekehrt vom System (I′, II′) durch einen Rechenschritt derselben Art wieder zu (I, II); addiert man nämlich zu II′ das $(-s)$-fache von I′, so ergibt sich wieder das ursprüngliche System.
Es gilt also auch (I′, II′) $\Rightarrow$ (I, II) und daher (I, II) $\Leftrightarrow$ (I′, II′).

Natürlich gelangt man auch stets wieder zu äquivalenten Systemen, wenn man die Umformungen **(A)** und **(B)** wiederholt ausführt. Die folgenden Beispiele zeigen, wie man damit ein beliebiges System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf die Endform $x = a, y = b$ bringen kann. Das Entscheidende dabei ist, dass man bei einer Gleichung die Unbekannte x, bei der anderen y **eliminiert***, d. h. beseitigt. Die rechts stehenden Anmerkungen geben jeweils an, wie die Gleichungen des neuen Systems aus denen des vorangehenden entstehen und welcher der Schritte **(A)**, **(B)** dabei angewandt wird. Um die Niederschrift übersichtlich zu gestalten, ziehen wir zwischen zwei äquivalenten Systemen jeweils einen Trennungsstrich.

Beispiel 1:

I	$2x + 7y = 5$	
II	$3x + 8y = 2$	
I′	$2x + 7y = 5$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I}$
II′	$-\frac{5}{2}y = -\frac{11}{2}$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} + \mathrm{I} \cdot (-\frac{3}{2})$; **(B)**
I″	$2x + 7y = 5$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}'' = \mathrm{II}' \cdot (-\frac{2}{5})$; **(A)**
I‴	$2x = -\frac{52}{5}$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}'' + \mathrm{II}'' \cdot (-7)$; **(B)**
II‴	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}''$
I⁗	$x = -\frac{26}{5}$	$\mathrm{I}'''' = \mathrm{I}''' \cdot \frac{1}{2}$; **(A)**
II⁗	$y = \frac{11}{5}$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}'''$

(I⁗, II⁗) hat die Lösung $(-\frac{26}{5} \mid \frac{11}{5})$.

* eliminare (lat.) = aus dem Hause treiben.
Sowohl Isaac NEWTON (1643–1727) wie auch Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) verwenden gelegentlich *eliminare*, das durch Leonhard EULER (1707–1783) zum üblichen Fachausdruck wird.

Da (I, II) $\Leftrightarrow$ (I'''', II''''), ist dies auch die Lösung von (I, II). Zur Kontrolle auf eventuelle Rechenfehler führen wir aber noch eine Probe durch.

Probe: I LS $= 2 \cdot (-\frac{26}{5}) + 7 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{52}{5} + \frac{77}{5} = \frac{25}{5} = 5 =$ RS; richtig!
II LS $= 3 \cdot (-\frac{26}{5}) + 8 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{78}{5} + \frac{88}{5} = \frac{10}{5} = 2 =$ RS; richtig!

Damit gilt: $L = \{(-\frac{26}{5} | \frac{11}{5})\}$

Beispiel 2:

I	$9x - 21y = 10$	
II	$6x - 14y = 13$	
I′	$9x - 21y = 10$	$\text{I}' = \text{I}$
II′	$0 \cdot x + 0 \cdot y = \frac{19}{3}$	$\text{II}' = \text{II} + \text{I}\,(-\frac{2}{3})$; **(B)**

II′ und damit das Gesamtsystem hat keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Beispiel 3:

I	$14x + 49y = \frac{3}{2}$	
II	$8x + 28y = \frac{6}{7}$	
I′	$14x + 49y = \frac{3}{2}$	$\text{I}' = \text{I}$
II′	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	$\text{II}' = \text{II} + \text{I}\,(-\frac{8}{14})$; **(B)**

II′ stellt eine allgemein gültige Gleichung dar. Als Bedingung für x und y bleibt nur die Gleichung I′. Daher gilt:

$L = \{(x|y) | 14x + 49y = \frac{3}{2}\}$.

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten jeder der eingangs genannten Lösungsfälle tatsächlich auftreten kann.

6.4.2 Spezielle Lösungsverfahren

Die Umformung eines linearen Gleichungssystems mithilfe der Schritte **(A)** und **(B)** bis zur Ermittlung der Lösungsmenge kann auf sehr unterschiedliche Art erfolgen. Besonders zweckmäßig sind die drei folgenden Verfahren.

1) Das Einsetzungsverfahren

Man löst eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf und ersetzt in der anderen Gleichung diese Unbekannte durch den erhaltenen Term. Außer einfachen Umstellungen durch Termaddition benützt der erste Schritt die Umformung **(A)**, der zweite die Umformung **(B)**.

Beispiel:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	folgt aus $\mathrm{I} \cdot (-1)$; **(A)**
II′	$2x + 4y = -1$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$
I″	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	folgt aus $\mathrm{II}' + \mathrm{I}' \cdot (-4)$; **(B)**
I‴	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}''$
II‴	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}'' \cdot \frac{1}{14}$; **(A)**
I⁗	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	folgt aus $\mathrm{I}''' + 3 \cdot \mathrm{II}'''$; **(B)**
II⁗	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}'''$

Diese sehr ausführlich gehaltene Niederschrift des Lösungsganges lässt sich stark vereinfachen. Aus (I, II) kann sofort (I″, II″) gewonnen werden und daraus zuerst II⁗, dann I⁗. Die verkürzte Form sieht (mit neuer Nummerierung) so aus:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	(I nach y aufgelöst)
II′	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	(y in II eingesetzt)
I″	$x = \frac{27}{14}$	(II′ nach x aufgelöst)
II″	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	(x in I′ eingesetzt)

$L = \{(\frac{27}{14} \mid -\frac{17}{24})\}$

2) Das Additionsverfahren

Man multipliziert die beiden Gleichungen mit Faktoren, die so gewählt werden, dass in den neuen Gleichungen die Koeffizienten bei einer der beiden Unbekannten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden (Umformung **(A)**). Bei der nachfolgenden Addition dieser Gleichungen (Umformung **(B)**) »verschwindet« diese Unbekannte. Als zweite Gleichung wird eine der Ausgangsgleichungen in der ursprünglichen oder in der multiplizierten Form verwendet.

Beispiel 1:

I	$3x + 2y = 8$	
II	$5x - 3y = -31$	
I′	$9x + 6y = 24$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 3$
II′	$10x - 6y = -62$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} \cdot 2$

I″	$19x = -38$	I″ = I′ + II′
II″	$9x + 6y = 24$	II″ = I′
I‴	$x = -2$	I″ nach x aufgelöst
II‴	$6y = 42$	x in II″ eingesetzt
I⁗	$x = -2$	I⁗ = I‴
II⁗	$y = 7$	II‴ nach y aufgelöst

$L = \{(-2|7)\}$

Eine nahe liegende Abkürzung der Niederschrift erhält man, wenn man die obigen Gleichungen I′, II′ gar nicht anschreibt, sondern sofort ihre Addition ausführt:

I	$3x + 2y = 8 \quad \|\cdot 3$	
II	$5x - 3y = -31 \quad \|\cdot 2$	
I′	$19x = -38$	I′ = I · 3 + II · 2
II′	$5x - 3y = -31$	II′ = II
I″	$x = -2$	I′ nach x aufgelöst
II″	$-3y = -21$	x in II′ eingesetzt
I‴	$x = -2$	I‴ = I″
II‴	$y = 7$	II″ nach y aufgelöst

$L = \{(-2|7)\}$

Beispiel 2:

I	$1{,}5x - 3{,}5y = -2 \quad \|\cdot 6$	
II	$-9x + 21y = 12 \quad \|\cdot 1$	
I′	$0 = 0$	I′ = I · 6 + II · 1
II′	$-3x + 7y = 4$	II′ = II · $\frac{1}{3}$ (Vereinfachung von II)
I″	$0 = 0$	I″ = I′
II″	$y = \dfrac{3x+4}{7}$	II′ nach y aufgelöst

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man kann x willkürlich wählen und dazu y nach II″ berechnen. Wir wollen dies durch eine (immer zu empfehlende!) Proberechnung überprüfen.

Probe: I LS $= 1{,}5x - 3{,}5 \cdot \dfrac{3x+4}{7} = 1{,}5x - \dfrac{3x+4}{2} = -2 =$ RS; richtig!

II LS $= -9x + 21 \cdot \dfrac{3x+4}{7} = -9x + 3(3x+4) = 12 =$ RS; richtig!

Damit gilt: $L = \left\{(x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = \dfrac{3x+4}{7}\right\}$

Manchmal ist es von Vorteil, das Additionsverfahren zweimal anzuwenden. Wenn es gelingt, zuerst durch Elimination von y auf eine Gleichung der Form $x = a$, dann – wiederum ausgehend von dem ursprünglichen System – entsprechend auf eine Gleichung $y = b$ zu kommen, so ist $(a|b)$ die Lösung des Systems.

Beispiel 3:

I	$6x + 10y = 15$	$\Vert \cdot 9$	$\Vert \cdot 10$
II	$20x + 45y = 31$	$\Vert \cdot (-2)$	$\Vert \cdot (-3)$
I′	$14x = 73$		$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 9 + \mathrm{II} \cdot (-2)$
II′	$-35y = 57$		$\mathrm{II}' = \mathrm{I} \cdot 10 + \mathrm{II} \cdot (-3)$
I″	$x = \frac{73}{14}$		I′ nach x aufgelöst
II″	$y = -\frac{57}{35}$		II′ nach y aufgelöst

Die Probe zeigt, dass wir damit eine Lösung gefunden haben:

Probe: I $6 \cdot \frac{73}{14} + 10 \cdot (-\frac{57}{35}) = \frac{219}{7} - \frac{114}{7} = \frac{105}{7} = 15$; richtig!

II $20 \cdot \frac{73}{14} + 45 \cdot (-\frac{57}{35}) = \frac{730}{7} - \frac{513}{7} = \frac{217}{7} = 31$; richtig!

$L = \{(\frac{73}{14} | -\frac{57}{35})\}$.

Bei den zwei bisher behandelten Lösungsverfahren für lineare Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten geht es jeweils darum, ein äquivalentes System zu finden, in welchem eine Gleichung nur noch eine der beiden Unbekannten enthält. Deren Wert kann damit berechnet und in die andere Gleichung eingesetzt werden. Damit gewinnt man eine Gleichung, in der nur noch die zweite Unbekannte auftritt, sodass auch diese berechnet werden kann. Natürlich vereinfacht sich das Lösungsverfahren sehr, wenn bereits im ursprünglichen System eine Gleichung mit nur einer Unbekannten vorkommt. Solche Aufgaben konnten schon in **6.3** gelöst werden.

**3) Die Cramer'sche Regel

Gibt es für ein System von zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte eine Lösungsformel? Wir wollen versuchen, diese Frage zu beantworten. Ein solches Gleichungssystem hat allgemein die Form

I $ax + by = e$

II $cx + dy = f$.

Dabei sind a, b, c, d, e, f beliebige Zahlen. Da durch sie das Gleichungssystem festgelegt ist, muss dies auch für die Lösungsmenge gelten; d.h., die eventuellen Lösungen müssen sich aus diesen Koeffizienten berechnen lassen. Wir versuchen, das System (I, II) durch Äquivalenzumformungen auf die Gestalt $x = u \wedge y = v$ zu bringen. Dazu benützen wir das doppelte Additionsverfahren:

$$\begin{array}{lll} \text{I} \quad ax + by = e & \| \cdot d & \| \cdot (-c) \\ \text{II} \quad cx + dy = f & \| \cdot (-b) & \| \cdot a \\ \hline \text{I}' \quad (ad - bc)x = de - bf & & \text{I}' = \text{I} \cdot d + \text{II} \cdot (-b) \\ \text{II}' \quad (ad - bc)y = af - ce & & \text{II}' = \text{I} \cdot (-c) + \text{II} \cdot a \end{array}$$

Man erkennt, dass es möglich ist, das Eliminieren von y aus der ersten und von x aus der zweiten Gleichung so vorzunehmen, dass bei der jeweils übrig bleibenden Unbekannten derselbe Faktor $ad - bc$ steht. Falls dieser von null verschieden ist, kann man die Rechnung fortsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I}'' & x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}, \\ \text{II}'' & y = \dfrac{af - ce}{ad - bc}, \end{array}\right. \qquad \text{falls} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

In diesem Fall besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung und die Gleichungen I'', II'' stellen die gesuchte Lösungsformel dar.

Wenn jedoch $ad - bc = 0$ gilt, hat das System (I', II') die Form

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 0 \cdot x = de - bf \\ \text{II}' & 0 \cdot y = af - ce \end{array}$$

und lässt sich nicht auf die Form $x = u \wedge y = v$ bringen. Man kann zeigen, dass es in diesem Fall entweder keine oder unendlich viele Lösungen gibt. Vergleiche dazu die Beispiele 2 und 3 auf Seite 141f.

Die für $ad - bc \neq 0$ gefundene Lösungsformel halten wir fest in

Satz 139.1: Das Gleichungssystem

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

hat für $ad - bc \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Der Term $ad - bc$, von dessen Wert es abhängt, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht, heißt **Determinante* des Gleichungssystems**. Die zwei Lösungsformeln in Satz 139.1, nach denen man die Lösung berechnen kann, falls diese Determinante von null verschieden ist, werden als **Cramer'sche Regel**** bezeichnet.

* determinare (lat.) = abgrenzen

** benannt nach Gabriel Cramer (1704–1752), der dieses Verfahren 1750 als Anhang zu seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* – »Einführung in die Analysis algebraischer Kurven« – unter dem Titel *De l'évanouissement des inconnues* – »Über das Verschwinden von Unbekannten« – veröffentlichte.

Für Determinanten gibt es eine besondere Schreibweise, vereinbart durch

> **Definition 140.1:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \cdot d - b \cdot c$
>
> $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ heißt **zweireihige Determinante**.

Wenn man sich die Differenz der beiden Produkte in Definition 140.1 näher ansieht, erkennt man folgende Merkregel für die Berechnung einer zweireihigen Determinante:

Zahl oben links · Zahl unten rechts
minus
Zahl oben rechts · Zahl unten links

Nennt man die im Determinantenschema von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale *Hauptdiagonale* und die andere *Nebendiagonale*, so ergibt sich für $ad - bc$ der in Abbildung 140.1 veranschaulichte Merkspruch

»Hauptdiagonale
minus
Nebendiagonale«.

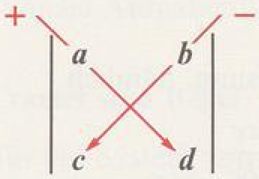

Abb. 140.1 Zur Berechnung einer zweireihigen Determinante

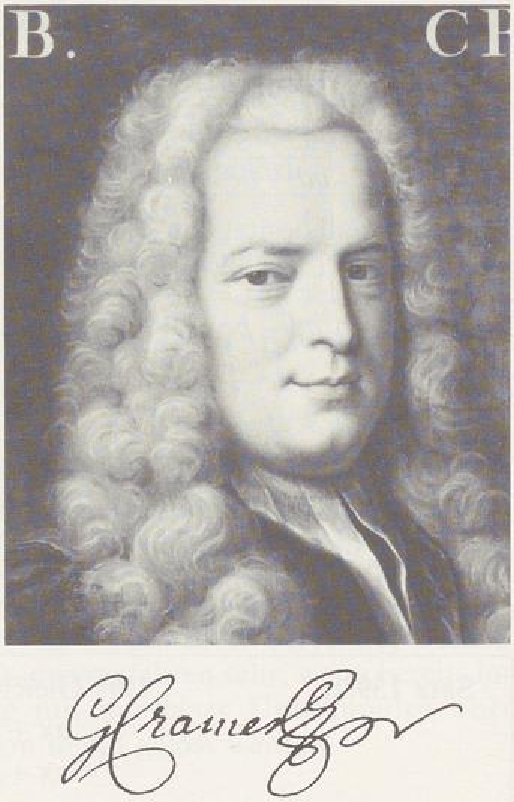

Abb. 140.2 Gabriel CRAMER, *gesprochen kramär, ä betont* (31. 7. 1704 Genf–4. 1. 1752 Bagnols-sur Cèze). Gemälde Robert GARDELLE (1682–1766) zugeschrieben.

Auch die Zähler der in der Cramer'schen Regel auftretenden Brüche kann man als Determinanten schreiben. Es gilt nämlich

$$de - bf = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, \quad af - ce = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

Damit lässt sich Satz 139.1 in der folgenden Form schreiben, in der wir ihn uns auch merken wollen:

Satz 141.1: Die Cramer'sche Regel. Das Gleichungssystem

$$\begin{matrix} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{matrix} \quad \text{hat für} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{genau eine Lösung, nämlich}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Beispiel 1:

I $5x + 2y = 2$

II $3x - 3y = 4$

Wir berechnen zuerst die Determinante des Gleichungssystems:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 3 = -15 - 6 = -21; \text{ also nicht null.}$$

Daher hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, die man nach der Cramer'schen Regel berechnen kann:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow x = \frac{-14}{-21} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow y = \frac{14}{-21} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} L = \{(\tfrac{2}{3} \mid -\tfrac{2}{3})\}.$$

Beispiel 2:

I $1{,}5x - 0{,}5y = 3$

II $6x - 2y = 1$

$$\begin{vmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 1{,}5 \cdot (-2) - (-0{,}5) \cdot 6 = 0$$

Damit hat das System keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Ob es überhaupt lösbar ist, können wir mit dem Einsetzungs- oder dem Additionsverfahren entscheiden; man erhält z. B.

I'	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 11$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 4 + \mathrm{II} \cdot (-1)$
II'	$6x - 2y = 1$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$

Da I' bei jeder Einsetzung die falsche Aussage $0 = 11$ ergibt, ist (I', II') und damit auch (I, II) unlösbar, also $L = \{\ \}$.

Beispiel 3:

I $\frac{3}{2}x - y = -\frac{3}{8}$

II $-6x + 4y = 1,5$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 4 - (-1) \cdot (-6) = 0$$

Es gibt also keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Durch Äquivalenzumformung des Systems erhalten wir

I′ $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ $\quad$ $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 4 + \mathrm{II} \cdot 1$

II′ $-6x + 4y = 1,5$ $\quad$ $\mathrm{II}' = \mathrm{II}$

Da die Gleichung I′ allgemein gültig ist, besteht die Lösungsmenge aus allen Lösungen von II′. Somit gilt:

$$L = \left\{ (x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{6x + 1,5}{4} \right\}.$$

**Zur Geschichte der Lösungsverfahren

Weder die Babylonier noch die Ägypter noch die Griechen haben Verfahren entwickelt, mit denen man, allgemein gesprochen, *jedes* System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten lösen kann. Soweit heute bekannt ist, finden wir zum ersten Mal ein solches allgemeines Verfahren, nämlich das Additionsverfahren im 九章算術 – *Chiu Chang Suan Shu* –, den »Neun Büchern arithmetischer Technik« aus der frühen Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.). In Aufgabe 162/**80** ist das erste dort behandelte Problem wiedergegeben; 18 solcher Aufgaben enthält das Lehrwerk, von 2 bis zu 6 Unbekannten. Interessanterweise haben die Chinesen überhaupt keine Zeichen für ihre Unbekannten verwendet, sondern die Koeffizienten sauber in einem rechteckigen Schema angeschrieben, sodass jedem klar war, dass in der ersten Zeile die x-Glieder, in der zweiten die y-Glieder usw. stehen. (Die Chinesen schrieben ja von oben nach unten, nicht wie wir von links nach rechts!)

Das umständliche* Gleichsetzungsverfahren – man löst jede Gleichung nach derselben Variablen auf und setzt die erhaltenen Terme gleich – taucht in allgemeiner Form bei dem Inder Brahmagupta (598 – nach 665) auf. Wie schon oben (Seite 123) gesagt, beschäftigten sich die Araber und daher auch das europäische Mittelalter kaum mit Gleichungssystemen. Erste Ansätze dazu im Italien des späten 15. Jh.s gelangten nach Deutschland. Der Rechenmeister Christoff Rudolff (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) war der Erste, der Gleichungssysteme behandelte, nämlich 1525 in seiner *Coß*. Zwar brachte Michael Stifel (1487 (?)–1567) durch seine glücklichen Bezeichnungen (siehe Seite 123) einen Fortschritt; er rechnete aber wenig mit ihnen. Der von ihm beeinflusste Johannes Buteo (1492–1564/72) packte dann das Problem, Gleichungssysteme zu lösen, allgemein an, da ihm die bisherige Art und Weise des Lösens »sehr mühsam und schwer zu erfassen« war. Er führt das Additionsverfahren

* Deswegen haben wir es nicht vorgeführt. Euler hält es zwar für den »natürlichsten Weg«.

an Aufgabe 149/**20** vor. Als allgemeine Methode finden sich das Gleichsetzungs- und das Einsetzungsverfahren dann bei Isaac Newton (1643–1727) in seiner *Arithmetica universalis* (entstandenen 1673, gedruckt 1707). Einen besonderen Weg ist Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gegangen. 1678 glaubte er, eine Regel gefunden zu haben, mittels derer die Lösung eines beliebigen linearen Gleichungssystems ohne weitere Rechnung angegeben werden könnte. Er nennt es ein *theorema pulcherrimum*, einen allerschönsten Lehrsatz. 1684 hatte er es geschafft, die Determinantenmethode war geboren. Zwar verwendet er seine Erkenntnisse in Briefen, gedruckt wurden sie aber erst 1903 bzw. 1972! Im uns so fernen Japan veröffentlichte 1683 Takakazu (oder auch Kowa) Seki (1642–1708 Tokio) die unabhängig von Leibniz von ihm erfundene Determinantenmethode, die im 19. Jh. dort wieder in Vergessenheit gerät. Und so gebührt in Europa dem Schweizer Gabriel Cramer (1704–1752) das Verdienst, 1750 die allgemeine Lösungsregel mittels Determinanten angegeben zu haben. Das Wort »Determinante« geht auf Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zurück, der in seinen *Disquisitiones arithmeticae* 1801 von einem *numerus determinans* spricht. Augustin Cauchy (1789 bis 1857) verwendet es 1812 erstmals im heutigen Sinn, und Arthur Cayley (1821 bis 1895) führte 1841 die Schreibweise mit den beiden senkrechten Strichen ein.

Abb. 143.1 Augustin Louis Baron Cauchy (21.8.1789 Paris – 23.5.1857 Sceaux)

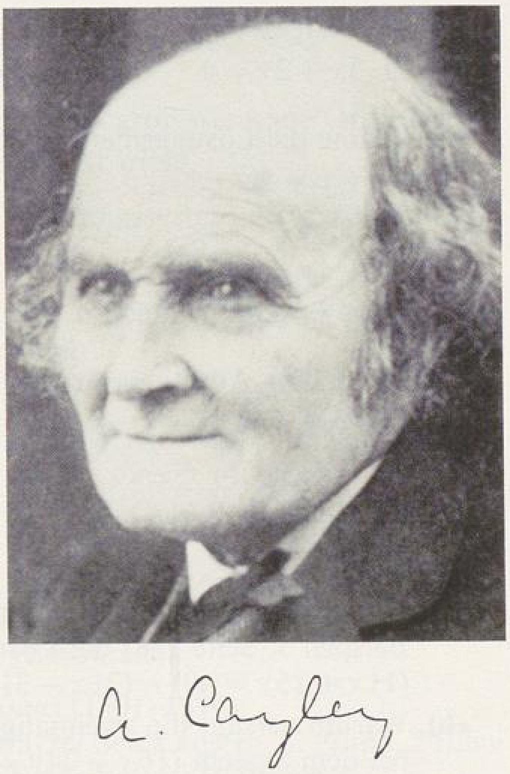

Abb. 143.2 Arthur Cayley (16.8.1821 Richmond – 26.1.1895 Cambridge)

Aufgaben

1. Führe das Gleichungssystem (I, II) nacheinander in die äquivalenten Systeme (I′, II′), …, (I″″, II″″) über, sodass gilt:
In I′ hat x den Koeffizienten 1.
In II″ kommt x nicht mehr vor.
In II‴ kommt x nicht mehr vor, und der Faktor bei y ist 1.
In I″″ kommt y nicht mehr vor, und der Faktor bei x ist 1.

a) I $2x+3y=2$
II $4x-9y=-1$

b) I $3x-11y=21$
II $4x+7y=28$

2. Weise mit Umformungen des Typs **(A)** und **(B)** nach, dass die Gleichungssysteme (I, II) und (I*, II*) äquivalent sind.
Bestimme sodann die Lösungsmenge.

a) I $x-2y=0$ I* $x-2y=0$
II $4x+y=9$ II* $9y=9$

b) I $5x+8y=-10$ I* $x+1{,}6y=-2$
II $3x+2y=1$ II* $-7x=-14$

3. Bestimme die Lösungsmenge nach dem Einsetzungsverfahren:

a) $2x+y=4$
$x+y=3$

b) $3{,}5x+5y=0$
$2{,}1x+3y=6$

c) $9x+4y=55$
$-5x+y=-37$

d) $\frac{2}{3}x+y=4$
$x+\frac{3}{2}y=6$

4. Verwende das Additionsverfahren:

a) $x+y=-8$
$x-y=2$

b) $3x+12y=5$
$2x+8y=4$

c) $29x+37y=0$
$13x-17y=0$

d) $2x-5y=186$
$3x+4y=279$

5. a) Berechne durch zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens (vgl. Beispiel 3, Seite 138) die Lösung des Gleichungssystems $(11x+15y=40) \wedge (21x-31y=13)$.

•**b)** Warum versagt die zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens bei dem System $(16x+24y=5\frac{1}{3}) \wedge (6x+9y=2)$?

•6. Stelle mithilfe der Determinante des Gleichungssystems fest, ob dieses genau eine Lösung hat. Berechne diese gegebenenfalls nach der Cramer'schen Regel. Bestimme andernfalls die Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen.

a) $3x+4y=0$
$4x-3y=25$

b) $8x-2y=1$
$-4x+y=-1$

c) $3{,}6x - 1{,}5y = 7{,}8$
$0{,}4x + 2{,}5y = -9{,}8$

d) $1{,}1x + 2{,}1y = 0$
$\frac{2}{7}x + \frac{6}{11}y = 0$

Bestimme bei den Gleichungssystemen der Aufgaben **7** bis **16** die Lösungsmengen.

7. $26x - 99y = 101$
$47x - 72y = 242$

8. $56x - 63y = 4$
$35x + 14y = 33$

9. $\frac{2}{5}x - 4y = -4$
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 17$

10. $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = 1$
$10x + \frac{32}{3}y = 7$

11. $6{,}5x - 10{,}4y = 13$
$-2{,}6x + 13{,}9y = -5{,}2$

12. $-3{,}24x + 16{,}2y = 14{,}58$
$1{,}62x + 4{,}05y = 9{,}72$

13. $\frac{11}{6}x + \frac{7}{8}y = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{7}x + \frac{12}{35}y = \frac{3}{10}$

14. $0{,}7x + \frac{5}{6}y = 1{,}9$
$\frac{7}{9}x - y = -0{,}2$

15. $\frac{2}{3}x + \frac{9}{11}y = 5$
$1{,}2x - 1{,}8y = -9$

16. $\frac{3}{7}x - \frac{5}{14}y = 3{,}2$
$0{,}75x - 0{,}625y = 5$

17. Für welchen Punkt der Geraden mit der Gleichung $x + 2y - 6 = 0$ gilt:
a) Der Punkt hat zwei gleiche Koordinaten.
b) Die Abszisse des Punktes ist doppelt so groß wie seine Ordinate.
c) Die Ordinate ist um 3 größer als die Abszisse.

Gib jeweils zuerst das zu lösende Gleichungssystem an. Überprüfe die Ergebnisse an einer Zeichnung.

18. Stelle fest, ob die Geraden g_1 und g_2 einen Schnittpunkt haben, und berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.

a) g_1: $3x + 2y - 1 = 0$
g_2: $x - y + 3 = 0$

b) g_1: $2{,}5x - \frac{5}{6}y + 2 = 0$
g_2: $-x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

c) g_1: $2{,}5x - 0{,}8y + 2 = 0$
g_2: $-x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

d) g_1: $5x + 2{,}25y + 4{,}5 = 0$
g_2: $3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 3 = 0$

19. Eine einfache Aufgabe aus dem alten Babylon (um 2000 v. Chr.), gefunden in Susa: Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten.

20. Eine Aufgabe von Geronimo CARDANO (1501–1576):
7 Ellen grüner Seide und 3 Ellen schwarzer Seide kosten 72 Pfund. 2 Ellen grüner Seide und 4 Ellen schwarzer Seide kosten 52 Pfund.

• **21.** Aufgabe 12 aus Buch I der *Zahlenlehre* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.): Jemand drückt 100 auf zwei verschiedene Arten als zweigliedrige Summe aus, und zwar so, dass ein Summand der ersten Summe das Doppelte eines Summanden der zweiten Summe ist und dass der andere Summand der zweiten Summe das Dreifache des anderen Summanden der ersten Summe ist. Wie heißen die Summanden?