Anschauliche Geometrie

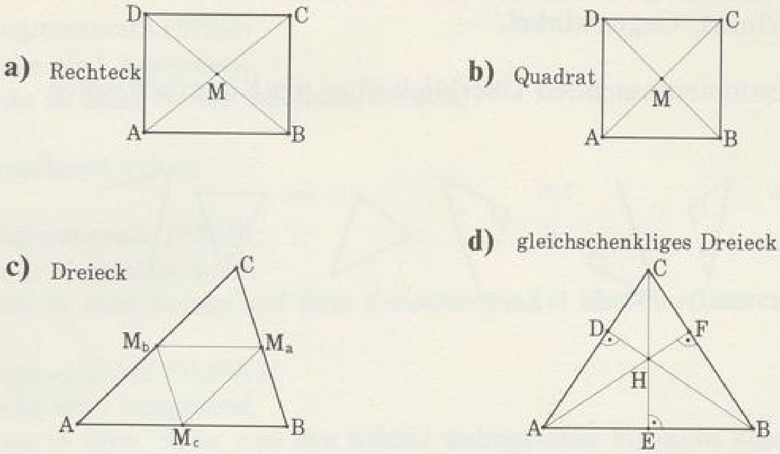
Barth, Friedrich

München, 2001

7.3 Kongruenzabbildungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83485

•**5.** SUCHE in den Figuren **a)** bis **d)** alle Paare kongruenter Dreiecke. Gib jeweils einen passenden Kongruenzsatz an.



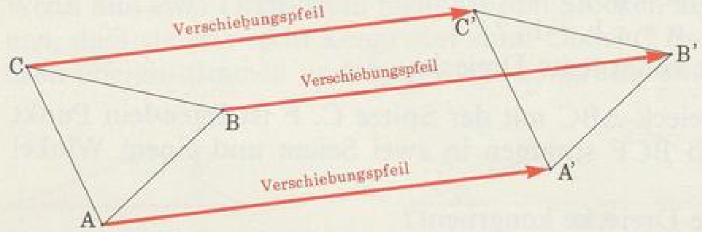
•**6.** Im Dreieck ABC ist H der Höhenfußpunkt von h_c. Außerdem gilt $\overline{AH} = a$.
Zeige: Die Dreiecke AHC und HBC stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein, müssen aber nicht kongruent sein.

7.3 Kongruenzabbildungen

Definition

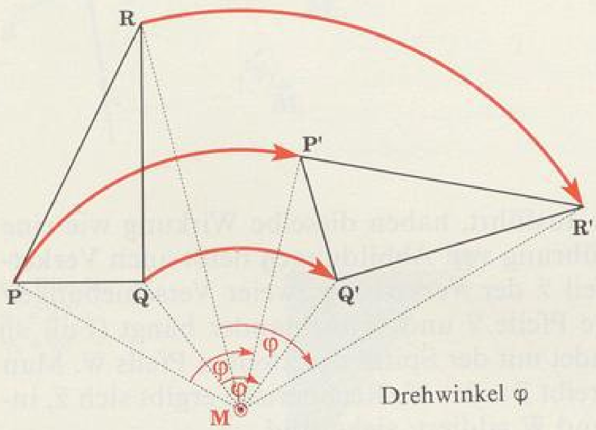
Eine Abbildung, die jede Figur auf eine dazu kongruente abbildet, heißt **Kongruenzabbildung.**

Wegen dieser Definition bleiben bei jeder Kongruenzabbildung die Streckenlängen und Winkelgrößen erhalten, werden aus Geraden wieder Geraden. Deswegen sagt man auch, Kongruenzabbildungen sind *längentreu, winkeltreu* und *geradentreu.* Zwei Kongruenzabbildungen kennen wir schon: die Achsen- und die Punktspiegelung. Am Besten stellt man sich eine Kongruenzabbildung so vor, dass man eine ebene Figur bewegt, ohne sie zu verzerren. Man kann zeigen, dass es nur drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt: Die Figur verschieben, sie drehen oder an einer Achse spiegeln (wenden). Die Punktspiegelung ist damit schon erfasst, weil sie ja eine spezielle Drehung (um 180°) ist.
Zusätzlich zur Achsenspiegelung definiert man demnach noch zwei Kongruenzabbildungen: die Verschiebung und die Drehung.



Verschiebt man jeden Punkt einer Figur gleich weit in dieselbe Richtung, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Verschiebung** oder **Translation.** Man kennzeichnet sie mit Verschiebungspfeilen.

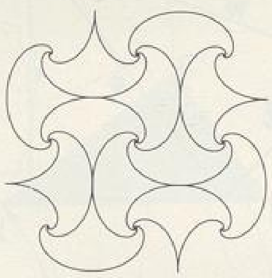
Bewegt man jeden Punkt P einer Figur auf dem Kreis um den festen Punkt M mit dem Radius $\overline{MP}$ um den Drehwinkel φ, so entsteht eine Bildfigur. Diese Abbildung heißt **Drehung** oder **Rotation** um den Drehpunkt M mit dem Drehwinkel φ.

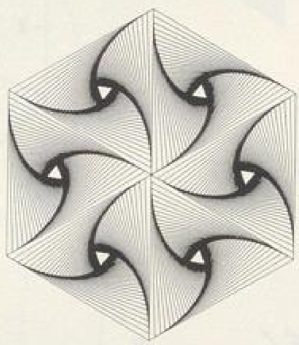


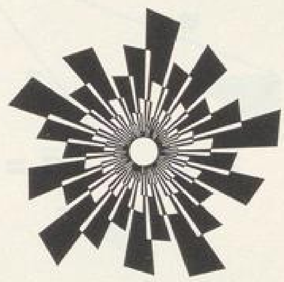
Drehwinkel φ

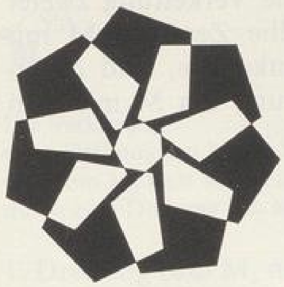
Die Drehung zeigt uns eine neue Art der Symmetrie, die **Drehsymmetrie.** Eine Figur heißt **drehsymmetrisch mit dem Winkel φ,** wenn sie bei einer Drehung um φ in sich übergeht.

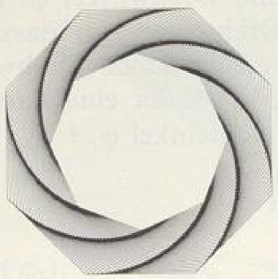

$\varphi = \frac{360°}{3} = 120°$


$\varphi = \frac{360°}{4} = 90°$


$\varphi = \frac{360°}{6} = 60°$


$\varphi = \frac{360°}{5} = 72°$


$\varphi = \frac{360°}{7}$

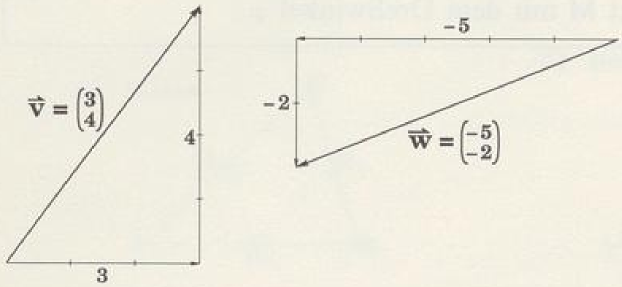

$\varphi = \frac{360°}{8} = 45°$


$\varphi = \frac{360°}{9} = 40°$

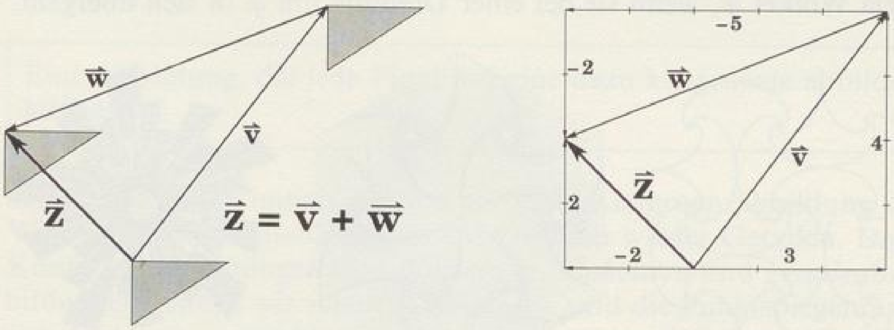

$\varphi = \frac{360°}{10} = 36°$

Eigenschaften von Verschiebung und Drehung

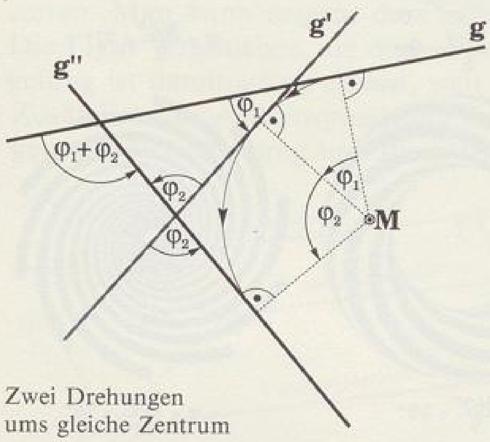
Im Koordinatensystem ist der Verschiebungspfeil $\vec{v}$ und damit die Verschiebung durch zwei Zahlen eindeutig festgelegt. $\vec{v} = \binom{3}{6}$ bedeutet zum Beispiel eine Verschiebung um 3 nach rechts und um 6 nach oben. Minuszeichen weisen auf die Gegenrichtung hin. So bedeutet zum Beispiel $\vec{w} = \binom{-5}{-2}$ eine Verschiebung um 5 nach links und um 2 nach unten.



Zwei Verschiebungen, die man nacheinander ausführt, haben dieselbe Wirkung wie eine einzige Verschiebung. Die Nacheinanderausführung von Abbildungen heißt auch **Verkettung** der Abbildungen. Der Verschiebungspfeil $\vec{z}$ der Verkettung zweier Verschiebungen ergibt sich in der Zeichnung, indem man die Pfeile $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aneinander hängt (Fuß an Spitze) und den Fuß des ersten Pfeils $\vec{v}$ verbindet mit der Spitze des zweiten Pfeils $\vec{w}$. Man bezeichnet $\vec{z}$ als Summe von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und schreibt $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$. Rechnerisch ergibt sich $\vec{z}$, indem man die entsprechenden Zahlen von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ addiert, siehe Bild.

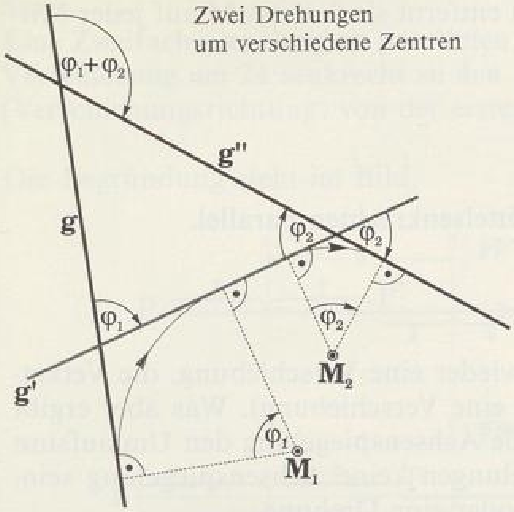


$$\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$$
$$= \binom{3}{4} + \binom{-5}{-2}$$
$$= \binom{3 + (-5)}{4 + (-2)} = \binom{-2}{2}$$
$$\vec{z} = \binom{-2}{2}$$



Zwei Drehungen ums gleiche Zentrum

Eine Drehung ist im Koordinatensystem eindeutig festgelegt durch Drehzentrum M und Drehwinkel φ. Die Verkettung zweier Drehungen um dasselbe Zentrum M mit verschiedenen Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$.

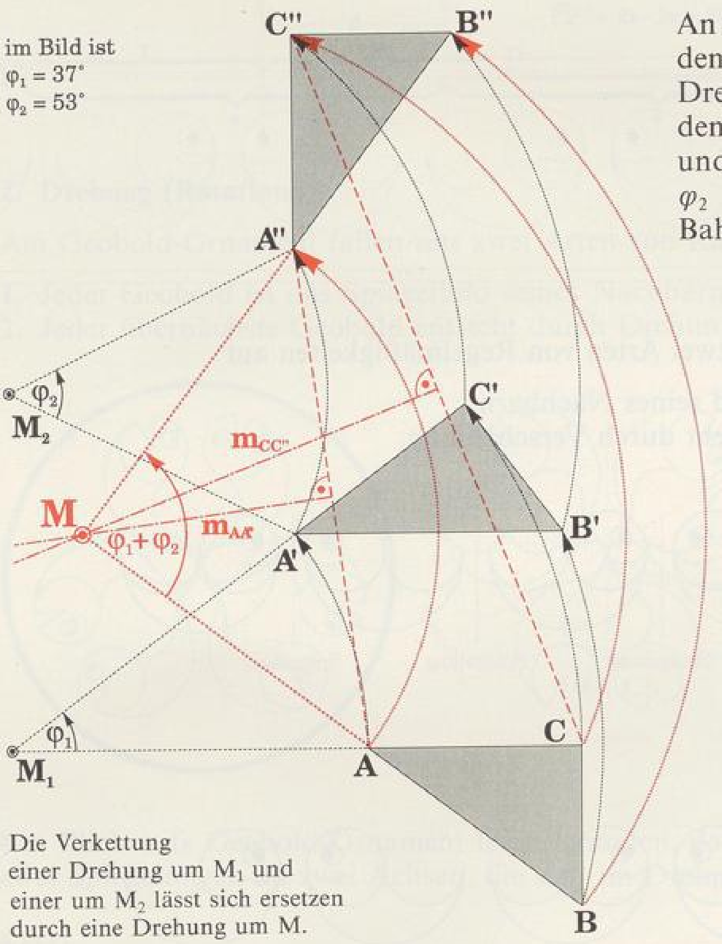


Zwei Drehungen um verschiedene Zentren

Es gilt sogar: Die Verkettung zweier Drehungen um verschiedene Zentren M_1 und M_2 mit den Drehwinkeln φ_1 und φ_2 ergibt wieder eine Drehung um ein Zentrum M mit dem Drehwinkel $\varphi_1 + \varphi_2$, solang $\varphi_1 + \varphi_2$ kein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist. Wenn aber $\varphi_1 + \varphi_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360° ist, dann ergibt sich eine Verschiebung.

Zunächst überlegen wir uns an einem Bild, dass der Winkel zwischen einer beliebigen Gerade und ihrer Bildgerade gleich ist dem Drehwinkel φ, unabhängig davon, wo das Zentrum M liegt. Führt man zwei Drehungen nacheinander aus, dann dreht sich jede Gerade um $\varphi_1 + \varphi_2$.

An einem Beispiel zeigen wir, wie man den Mittelpunkt M der resultierenden Drehung konstruieren kann, wenn von den beiden Drehungen die Zentren M_1 und M_2 sowie die Drehwinkel φ_1 und φ_2 bekannt sind. Verfolgen wir die Bahn eines Dreiecks:



Die Verkettung einer Drehung um M_1 und einer um M_2 lässt sich ersetzen durch eine Drehung um M.

1. Drehung (um M_1 mit φ_1):	$\triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$
2. Drehung (um M_2 mit φ_2):	$\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle A''B''C''$
Verkettung (um M mit $\varphi_1 + \varphi_2$):	$\triangle ABC \rightarrow \triangle A''B''C''$

Weil Bild P″ und Urbild P gleich weit vom Zentrum entfernt sind, muss M auf jeder Mittelsenkrechten $m_{PP''}$ liegen, zum Beispiel

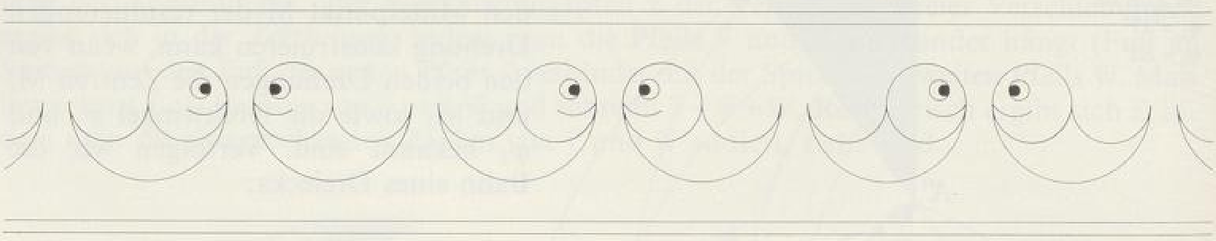
1. auf der Mittelsenkrechten $m_{AA''}$ von [AA″]
2. auf der Mittelsenkrechten $m_{CC''}$ von [CC″]

M ist also der Schnittpunkt von $m_{AA''}$ und $m_{CC''}$.
Im Fall $\varphi_1 + \varphi_2 = 360°$ (Verschiebung) sind diese Mittelsenkrechten parallel.

Mehrfachspiegelungen

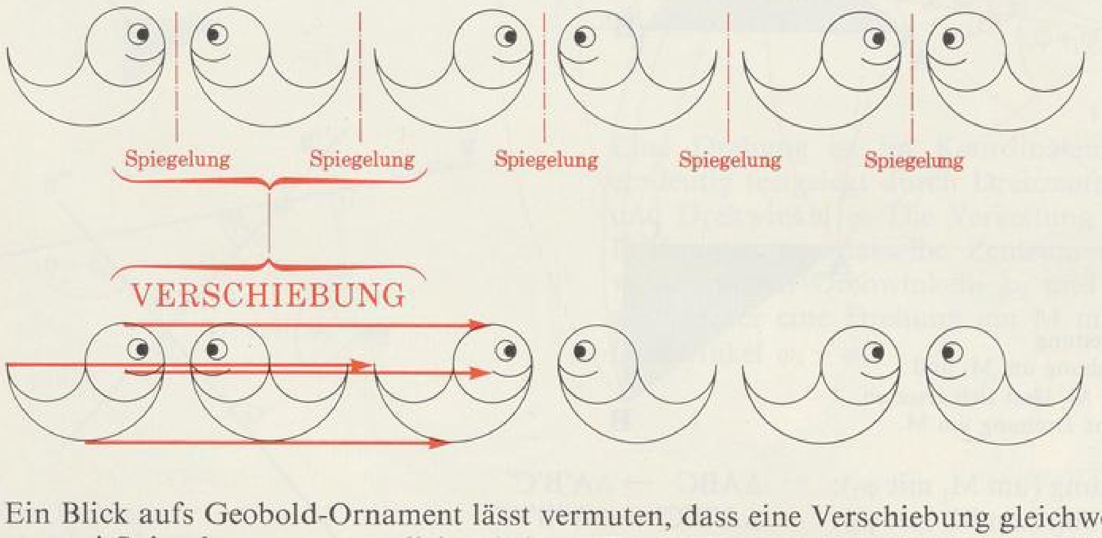
Die Verkettung zweier Verschiebungen ergibt also wieder eine Verschiebung, die Verkettung zweier Drehungen wieder eine Drehung (oder eine Verschiebung). Was aber ergibt die Verkettung zweier Achsenspiegelungen? Weil jede Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, kann die Verkettung zweier Achsenspiegelungen keine Achsenspiegelung sein. Tatsächlich ergibt sich entweder eine Verschiebung oder eine Drehung.

1. Verschiebung (Translation)



Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeiten auf:

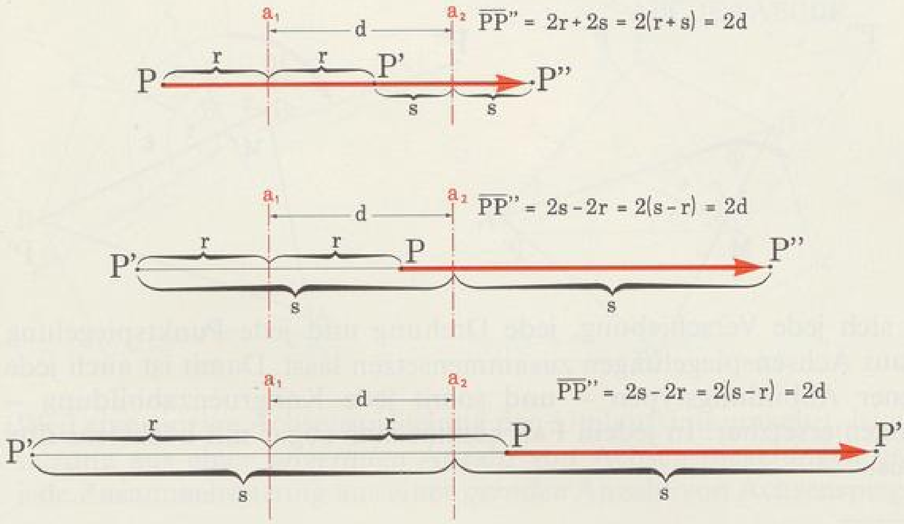
1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Verschiebung.



Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Verschiebung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an parallelen Achsen. Tatsächlich gilt der

Satz:
Eine Zweifachspiegelung an parallelen Achsen mit dem Abstand d ist gleichwertig mit einer Verschiebung um 2d senkrecht zu den Achsen.
(Verschiebungsrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

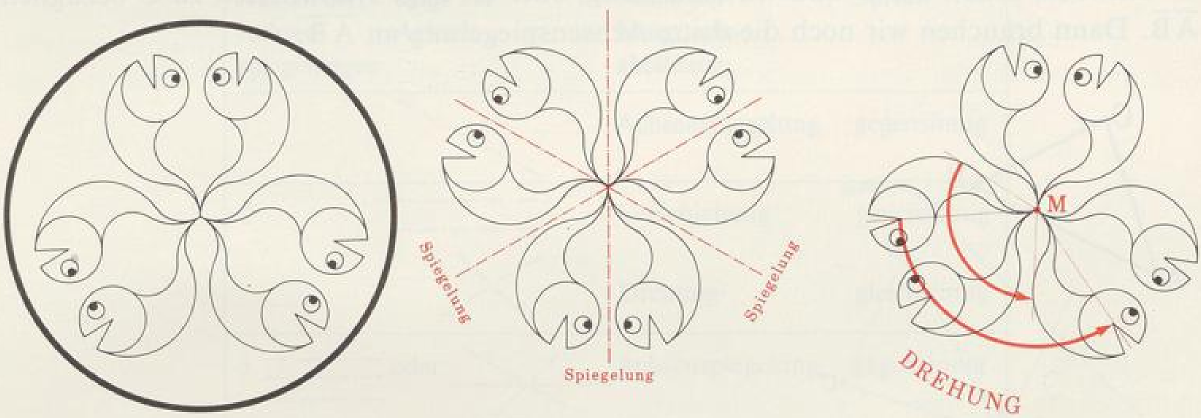
Die Begründung steht im Bild.



2. Drehung (Rotation)

Am Geobold-Ornament fallen uns zwei Arten von Regelmäßigkeit auf:

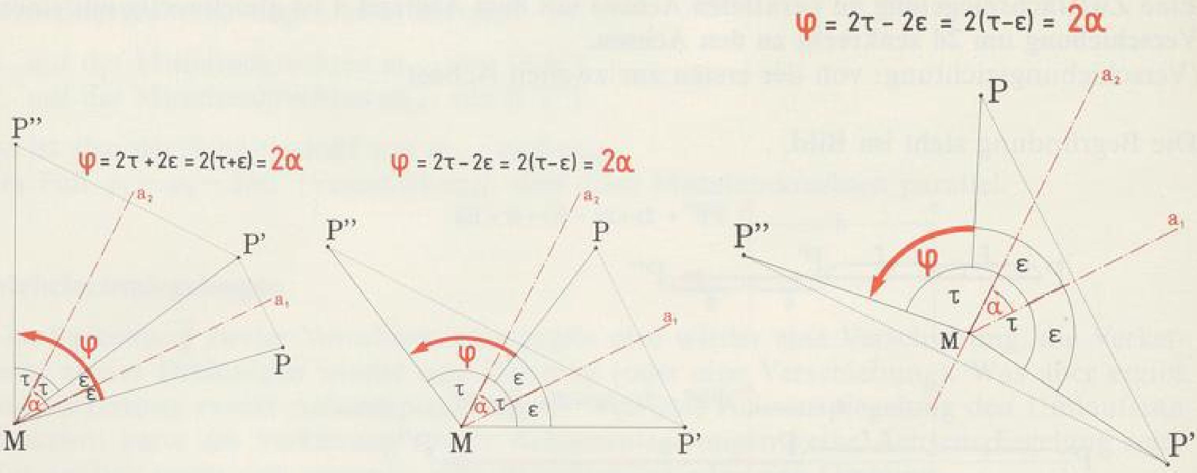
1. Jeder Geobold ist das Spiegelbild seines Nachbarn.
2. Jeder übernächste Geobold entsteht durch Drehung.



Ein Blick aufs Geobold-Ornament lässt vermuten, dass eine Drehung gleichwertig ist zu zwei Spiegelungen an zwei Achsen, die sich im Drehpunkt schneiden. Tatsächlich gilt

Satz:
Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich in M unter dem Winkel α schneiden ist gleichwertig mit einer Drehung um M mit dem Drehwinkel $\varphi = 2\alpha$.
(Drehrichtung: von der ersten zur zweiten Achse)

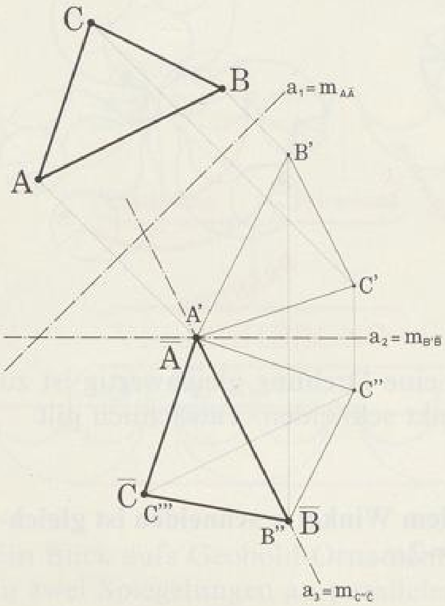
Die Begründung steht im Bild.



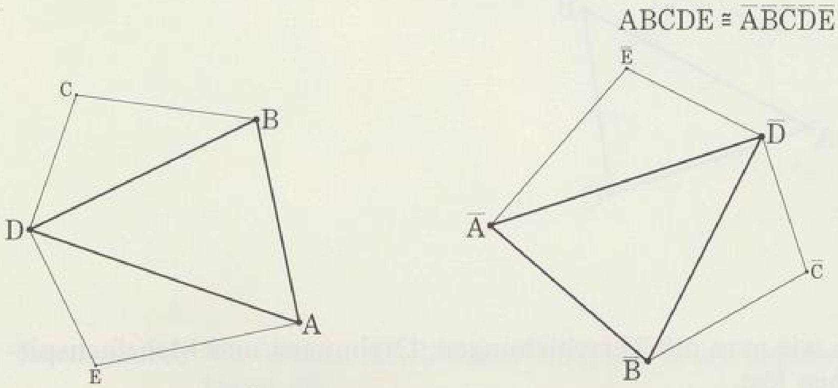
Wir wissen jetzt, dass sich jede Verschiebung, jede Drehung und jede Punktspiegelung (= Drehung um 180°) aus Achsenspiegelungen zusammensetzen lässt. Damit ist auch jede Verkettung verschiedener Abbildungstypen – und somit jede Kongruenzabbildung – durch Achsenspiegelungen ersetzbar. In jedem Fall kommt man sogar mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus.

Beweis: Das Dreieck $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ ist durch Kongruenzabbildung aus dem Dreieck ABC entstanden. Mit höchstens drei Achsenspiegelungen können wir das Dreieck ABC aufs Dreieck $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ abbilden.

Mit den ersten beiden bilden wir [AB] auf $[\overline{A}\,\overline{B}]$ ab. Weil die Dreiecke kongruent sind, liegt C'' entweder schon auf $\overline{C}$ und wir sind fertig, oder C'' liegt symmetrisch zu $\overline{C}$ bezüglich $\overline{A}\,\overline{B}$. Dann brauchen wir noch die dritte Achsenspiegelung an $\overline{A}\,\overline{B}$.



Bei zwei kongruenten Vielecken mit mehr als drei Ecken kommt man auch mit höchstens drei Achsenspiegelungen aus: Zuerst bildet man wie vorhin ein Teildreieck ab, die restlichen Punkte müssen dann wegen der Kongruenz der Figuren automatisch richtig liegen. Man teilt die Kongruenzabbildungen in zwei Sorten ein: Bei der einen Sorte ist der Umlaufsinn im Bild und Urbild der gleiche, bei der anderen entgegengesetzt. Deshalb nennt man dann die Kongruenzabbildung **gleichsinnig** oder **gegensinnig.**

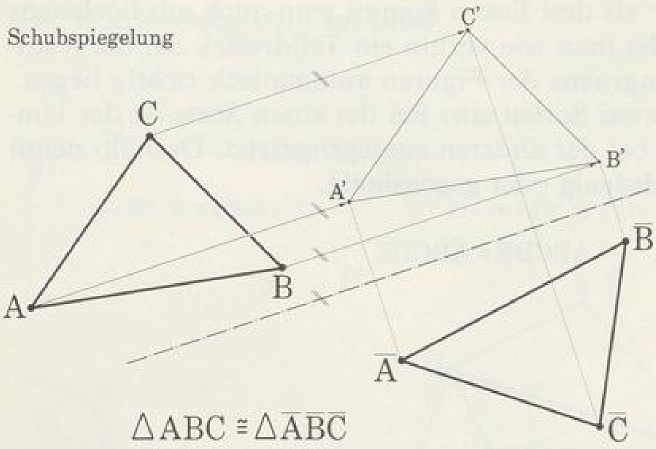


Weil eine einzige Achsenspiegelung den Umlaufsinn umkehrt, ist sie und jede Zusammensetzung aus einer *ungeraden* Anzahl von Achsenspiegelungen gegensinnig. Dagegen ist jede Zusammensetzung aus einer *geraden* Anzahl von Achsenspiegelungen gleichsinnig.

Wir haben gesehen, dass sich jede Kongruenzabbildung durch höchstens drei Achsenspiegelungen darstellen lässt. Damit verschaffen wir uns eine Übersicht über alle Kongruenzabbildungen:

Anzahl der Achsen-spiegelungen	**Lage der Achsen:**	**Name der Kongruenz-abbildung:**	**Sorte:**
1		Achsenspiegelung	gegensinnig
2		Verschiebung	gleichsinnig
		Drehung	gleichsinnig
3	oder	Achsenspiegelung	gegensinnig
	oder	Schubspiegelung	gegensinnig

Der einzig neue Typ, die Schubspiegelung, besteht aus einer geradlinigen Verschiebung von Punkten (Translation) und einer Spiegelung, bei der die Achse parallel zur Verschiebungsrichtung ist.



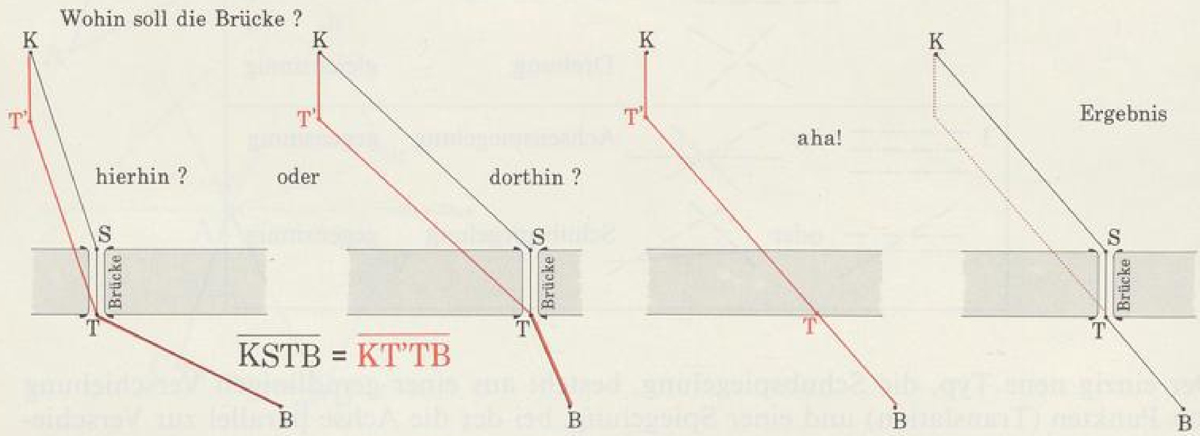
3. Anwendungen

In vier Beispielen sehen wir, wie man mit Verschiebungen, Drehungen und Mehrfachspiegelungen schwierige Aufgaben löst.

Brückenaufgabe (Translation):

Krachkirchen und Bröselbrunn sind durch einen Fluss getrennt. Eine Brücke soll senkrecht so über den Fluss gebaut werden, dass der Weg über die Brücke von Krachkirchen nach Bröselbrunn möglichst kurz wird.

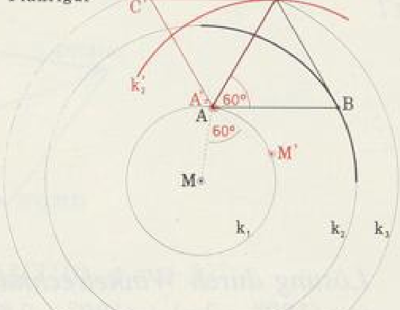
Lösungsidee: Wir verschieben die Brücke [ST] so, dass S′ = K wird. Weil Strecken auf gleich lange parallele Strecken abgebildet werden, ist $\overline{KT'} = \overline{ST}$ und [KT′]||[ST]. T′ ist also für alle möglichen Brücken [ST] derselbe Punkt. Weil $\overline{T'T} = \overline{KS}$ ist, sind der rote und der schwarze Weg gleich lang. $\overline{T'TB}$ ist am kürzesten, wenn T′, T und B auf einer Gerade liegen. Der gesuchte Punkt T ist also der Schnittpunkt von [TB] und dem Flussufer. Jetzt schieben wir die Brücke wieder zurück zum Punkt T und haben damit den kürzesten Weg konstruiert.



Drei Ecken auf drei Kreisen (Rotation)

Gegeben sind drei Kreise k_1, k_2 und k_3 mit demselben Mittelpunkt M und ein Punkt A auf k_1. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit B auf k_2 und C auf k_3.

Planfigur



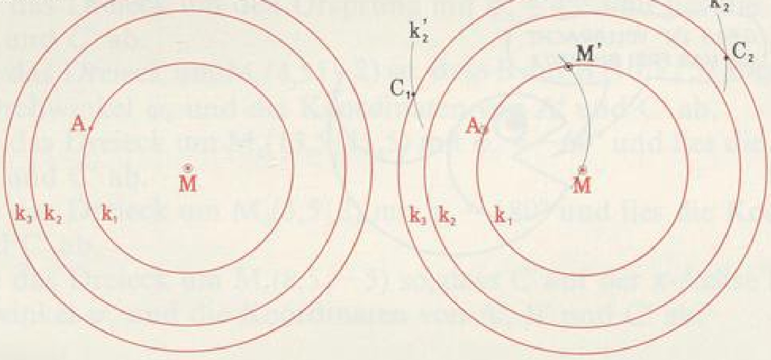
Lösungsidee: Wir drehen das Dreieck ABC um A mit dem Winkel 60° so, dass B' = C ist. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{r}\text{C liegt auf } k_3\\ B' = \text{C liegt auf } k_2'\end{array}\right\}\begin{array}{l}k_2' \text{ und } k_3 \text{ schneiden}\\ \text{sich in C.}\end{array}$$

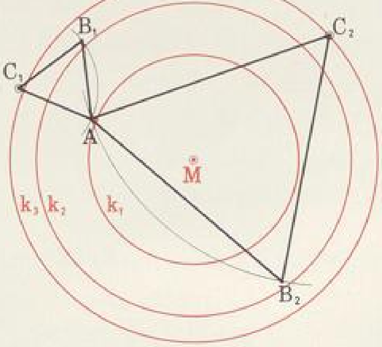
[AC] ergänzt man zum gleichseitigen Dreieck ABC.

Je nach Größe der Radien schneidet $k_{2'}$ den Kreis k_3 zweimal, einmal oder gar nicht, das heißt, es gibt zwei Lösungsdreiecke, nur ein Lösungsdreieck oder gar keines.

gegeben

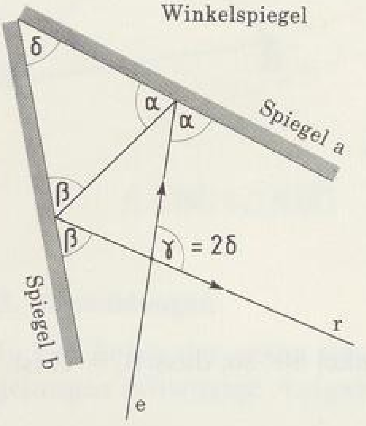


Ergebnis



Winkelspiegel (Mehrfachspiegelung):

Zwei Spiegel, die den Winkel δ einschließen, nennt man einen Winkelspiegel. Ein Lichtstrahl trifft unter dem Winkel α auf den Spiegel und verlässt den Winkelspiegel nach zweimaliger Reflexion. Wie groß ist der Winkel γ zwischen dem einfallenden Strahl e und dem reflektierten Strahl r?



Lösung durch Winkelrechnung:

$$\gamma = (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) \quad \text{(Außenwinkel am Dreieck)}$$
$$= 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$$
$$= 2\underbrace{(180^\circ - \alpha - \beta)}_{\delta}$$
$$\gamma = 2\delta$$

Unabhängig von α dreht sich also der Lichtstrahl um den doppelten Winkelspiegelwinkel. Das kann man auch ohne Rechnung sofort einsehen: Eine Zweifachspiegelung an Achsen, die sich unter dem Winkel δ schneiden, ist gleichwertig mit einer Drehung um $\gamma = 2\delta$, γ ist auch der Winkel zwischen Gerade (e) und Bildgerade (r).