Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.5 Lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen oder Unbekannten

6.5 Lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen oder Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem besteht allgemein aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Ist $m < n$, dann heißt das System **unterbestimmt**, im Fall $m > n$ **überbestimmt**.
Zur Bestimmung der Lösungsmenge wird wieder das Verfahren der Äquivalenzumformungen angewandt. Man kommt auch hier mit den Schritten **(A)** und **(B)** aus (vgl. Seite 133). Durch schrittweises Eliminieren von Unbekannten lässt sich immer ein äquivalentes System finden, dessen Lösungsmenge unmittelbar ersichtlich ist. Grundsätzlich läuft das Verfahren wie bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Beispiel 1:

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & 3x-2y+5z=23 & \\
\text{II} & 2x+4y-z=-3 & (m=3,\ n=3) \\
\text{III} & 5x+2y+2z=14 & \\
\hline
\text{I}' & 13x+18y=8 & \text{I}'=\text{I}+\text{II}\cdot 5 \\
\text{II}' & 2x+\ 4y-z=-3 & \text{II}'=\text{II} \\
\text{III}' & 9x+10y=8 & \text{III}'=\text{III}+\text{II}\cdot 2 \\
\hline
\text{I}'' & 16x=32 & \text{I}''=\text{III}'\cdot 9+\text{I}'\cdot(-5) \\
\text{II}'' & 9x+10y=8 & \text{II}''=\text{III}' \\
\text{III}'' & 2x+\ 4y-z=-3 & \text{III}''=\text{II}' \\
\hline
\text{I}''' & x=2 & \text{I}'''=\text{I}''\cdot\frac{1}{16} \\
\text{II}''' & 10y=-10 & \text{II}'''=\text{II}''-\text{I}'''\cdot 9 \\
\text{III}''' & 4y-z=-7 & \text{III}'''=\text{III}''-\text{I}'''\cdot 2 \\
\hline
\text{I}'''' & x=2 & \text{I}''''=\text{I}''' \\
\text{II}'''' & y=-1 & \text{II}''''=\text{II}'''\cdot\frac{1}{10} \\
\text{III}'''' & z=3 & \text{III}''''=\text{II}''''\cdot 4-\text{III}''' \\
\hline
\end{array}$$

$L=\{(2|-1|3)\}$

Natürlich eignet sich auch das Einsetzungsverfahren zum Lösen solcher Gleichungssysteme. Seine Anwendung soll noch einmal an Beispiel 1 aufgezeigt werden. Dazu lösen wir z. B. die Gleichung I nach $2y$ auf (weil alle Koeffizienten bei y gerade Zahlen sind!) und setzen den erhaltenen Term gleich in II und III ein:

$$\begin{array}{ll}
\text{I}' & 2y=3x+5z-23 \\
\text{II}' & 2x+2(3x+5z-23)-z=-3 \;\Leftrightarrow\; 8x+9z=43 \\
\text{III}' & 5x+(3x+5z-23)+2z=14 \;\Leftrightarrow\; 8x+7z=37 \\
\hline
\end{array}$$

I″	$2y = 3x + 5z - 23$	$\mathrm{I''} = \mathrm{I'}$
II″	$8x = 43 - 9z$	II′ nach $8x$(!) aufgelöst
III″	$(43 - 9z) + 7z = 37 \Leftrightarrow -2z = -6$	$8x$ in III′ eingesetzt
I‴	$\underline{z = 3}$	III″ nach z aufgelöst
II‴	$8x = 43 - 9 \cdot 3 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$	z in II″ eingesetzt
III‴	$2y = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 23 \Leftrightarrow \underline{y = -1}$	x und z in I″ eingesetzt

$L = \{(2|-1|3)\}$.

Beispiel 2:

I	$x + 3y = -7$	
II	$2x - 5y = 30$	$(m = 3,\ n = 2)$
III	$7x + 4y = 19$	
I′	$x + 3y = -7$	$\mathrm{I'} = \mathrm{I}$
II′	$-11y = 44$	$\mathrm{II'} = \mathrm{II} - \mathrm{I} \cdot 2$
III′	$-17y = 68$	$\mathrm{III'} = \mathrm{III} - \mathrm{I} \cdot 7$
I″	$x + 3y = -7$	$\mathrm{I''} = \mathrm{I'}$
II″	$y = -4$	$\mathrm{II''} = \mathrm{II'} \cdot (-\frac{1}{11})$
III″	$0 = 0$	$\mathrm{III''} = \mathrm{II''} \cdot 17 + \mathrm{III'}$ (kann im Folgenden weggelassen werden, da allgemein gültig)
I‴	$x = 5$	$\mathrm{I'''} = \mathrm{I''} - \mathrm{II''} \cdot 3$
II‴	$y = -4$	$\mathrm{II'''} = \mathrm{II''}$

$L = \{(5|-4)\}$

Die Lösbarkeit in Beispiel 2 beruht darauf, dass man zu einem äquivalenten System gelangt, welches eine allgemein gültige Gleichung enthält. Es bleiben dann nur noch zwei Bestimmungsgleichungen für die zwei Unbekannten übrig. In der Regel wird dieser Fall nicht eintreten. Ein überbestimmtes System ist i. A. nicht lösbar, da normalerweise bereits ein Teil des Systems eine eindeutig bestimmte Lösung hat, die den übrigen Gleichungen nicht mehr genügt. Ersetzt man etwa die Gleichung III von Beispiel 2 durch III* $7x + 4y = 20$, so besitzt das System (I, II, III*) keine Lösung. Denn aus I und II folgt bereits $x = 5$ und $y = -4$; doch liefert III* mit diesen Werten die falsche Aussage $19 = 20$.

Beispiel 3:

I	$2x - 5y + 11z = 31$	$(m = 2,\ n = 3)$
II	$3x + 15y - 4z = 15$	
I′	$2x - 5y + 11z = 31$	$\mathrm{I'} = \mathrm{I}$
II′	$9x + 29z = 108$	$\mathrm{II'} = \mathrm{I} \cdot 3 + \mathrm{II}$

I″ $-45y+41z=63$	$\mathrm{I''}=\mathrm{I'}\cdot 9-\mathrm{II'}\cdot 2$
II″ $x+\frac{29}{9}z=12$	$\mathrm{II''}=\mathrm{II'}\cdot\frac{1}{9}$
I‴ $y=-\frac{7}{5}+\frac{41}{45}z$	$\mathrm{I'''}=\mathrm{I''}\cdot(-\frac{1}{45})$
II‴ $x=12-\frac{29}{9}z$	$\mathrm{II'''}=\mathrm{II''}$

Man kann also z willkürlich wählen; zu jedem Wert von z gibt es genau ein x und y. Das System hat somit unendlich viele Lösungen:

$$L=\{(x|y|z)|x=12-\tfrac{29}{9}z\wedge y=-\tfrac{7}{5}+\tfrac{41}{45}z\wedge z\in\mathbb{Q}\}.$$

Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als diejenige der Unbekannten, so hat das System im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass es unlösbar ist, wie z. B. das System

I $x+y+z=1$
II $x+y+z=2$.

Aufgaben

1. $x=7$
$3x+y=22$
$-5x+9y+z=-8$

2. $x-3z=-8$
$3x-z=0$
$x+y+z=3$

3. $2x+z=3$
$x-6y-2z=14$
$5x+4y+3z=5$

4. $x+y-z=1$
$x-y-z=0$
$x+5y-z=2$

5. $x-y+2z=11$
$x+y-2z=-7$
$3x-4y-7z=27$

6. $x+2y+5z=50$
$3x-7y+z=10$
$13x+4y-3z=-30$

7. $-3x+5y+z=3$
$7x-4y-z=2$
$x+6y+z=8$

8. $2x+4y-11z=6$
$9x-7y+5z=2$
$12x-26y+43z=0$

9. $2x-3y+5z=0$
$3x+5y-2z=0$
$5x-2y+3z=0$

10. $x-y=0$
$y-z=0$
$z-x=0$

11. $x-y-z=1$
$5x+4y+z=-1$

12. $7x+3{,}75y-1{,}5z=9$
$\frac{4}{3}x+\frac{5}{7}y-\frac{2}{7}z=\frac{4}{3}$

13. $x+2y=1$
$4x-3y=-29$
$3x+17y=36$

14. $8x-11y=3$
$13x+5y=-18$
$2x-9y=10$

15. $x + y - z = -1$
$x - y - z = 3$
$2y + 3z - w = -3$
$-2x + 2z + 3w = -5$

16. $x + y - z + w = 0$
$x - y - z - w = 0$
$x + y + z - w = 5$
$x - y + z + w = 3$

17. $2x - y + 3z = -7$
$x + 4y - 2z = 8$
$3x + 2y + z = 0$
$6x - 3y + 4z = -11$

18. $3x + 4y - 5z + 5w = 13$
$5x - 3y + 4z - 19w = -10$
$2x - 5y + z - 2w = -11$

19. Zwei Beispiele aus der *Zahlenlehre* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.):

a) $x + y = 20$
$y + z = 30$
$z + x = 40$

b) $x = y + \frac{1}{3}z$
$y = z + \frac{1}{3}x$
$z = 10 + \frac{1}{3}y$

20. Johannes BUTEO (1492–1564/72) löst in seiner *Logistica* (1559) folgende Aufgabe als Beispiel für das Additionsverfahren. Text und Ansatz lauten*:

Tres numeros inuenire, quorum primus cum triente reliquorum faciat 14. Secundus cum aliorum quadrante 8. Tertius item cum parte quinta reliquorum 8.

$1A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = 14$
$1B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = 8$
$1C + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B = 8$

21. Das **Problem der 100 Vögel** erscheint zum ersten Mal im *Chang Ch'iu-chien Suan Ching* – »Arithmetisches Handbuch des CHANG Ch'iu-chien« – um 475 n. Chr.:
Ein Hahn kostet 5 sapeks, eine Henne 3 sapeks, und 3 Küken 1 sapek. Wenn wir nun für 100 sapeks 100 dieser Tiere einkaufen, wie viele sind es dann von jeder Sorte?

22. Aufgabe **21** findet sich bei den Indern, den Arabern, in Byzanz und schließlich bei fast allen Mathematikern des Abendlandes in allen möglichen Variationen, auch mit 4 und 5 Arten von Vögeln oder anderem Getier. Ein Beispiel hierfür ist die nebenstehende Aufgabe aus dem *Rechenbuch auff Linien und Ziphren* (1574) des Adam RIES (1492–1559).**
Beachte: fl ist die Abkürzung für *Gulden*; ort bedeutet *ein Viertel.*


Adam Risen. 71
Vihekauff.
Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?

* Drei Zahlen zu finden, deren erste mit einem Drittel der übrigen 14 macht. Die zweite mit einem Viertel der anderen 8. Die dritte ebenso mit dem fünften Teil der übrigen 8.

** Ohne Bild steht sie bereits in der Erstauflage von 1522, der *Rechenung auff der linihen vnd federn.*