Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

6.6 Gleichungssysteme, die auf lineare Gleichungssysteme zurückführbar sind

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

6.6 Gleichungssysteme, die auf lineare Gleichungssysteme zurückführbar sind

In vielen Fällen gelingt es, nicht lineare Gleichungssysteme in lineare umzuwandeln. Die dabei verwendeten Rechenschritte sind aber im Allgemeinen keine Äquivalenzumformungen. In der Regel kann man nur sagen: Wenn das ursprüngliche System eine Lösung hat, so ist diese in der Lösungsmenge des aus ihm abgeleiteten Systems enthalten. Aber nicht jede Lösung des neuen Systems muss auch eine Lösung des ursprünglichen sein. Daher ist durch eine *grundsätzlich notwendige* Probe festzustellen, welche Lösungen aus der Lösungsmenge des neuen Systems auch dem ursprünglichen Gleichungssystem genügen.

Beispiel 1:

$$\text{I}\quad \frac{2x-y-1}{x+3y-2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{II}\quad \frac{5}{4x-5y-9} - \frac{2}{7x+2y-1} = 0$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 7(2x-y-1) = -3(x+3y-2) \\ \text{II}' & 5(7x+2y-1) = 2(4x-5y-9) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}'' & 17x + 2y = 13 \\ \text{II}'' & 27x + 20y = -13 \end{array}$$

Als Lösungsmenge des Systems (I″, II″) erhält man in bekannter Weise $L'' = \{(1|-2)\}$. Ob $x = 1$ und $y = -2$ auch dem System (I, II) genügen, muss noch geprüft werden.

Probe: $\text{I LS} = \dfrac{2+2-1}{1-6-2} = \dfrac{3}{-7} = -\dfrac{3}{7} = \text{RS}$

$$\text{II LS} = \frac{5}{4+10-9} - \frac{2}{7-4-1} = \frac{5}{5} - \frac{2}{2} = 0 = \text{RS}$$

Das ursprüngliche System hat also die Lösungsmenge $L = \{(1|-2)\}$.

Beispiel 2:

$$\text{I}\quad \frac{3x-y-5}{7x+2y-3} = 2$$

$$\text{II}\quad 8x - 13y = 34$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Systemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 3x-y-5 = 2(7x+2y-3) \\ \text{II}' & 8x-13y = 34 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}'' & 11x + 5y = 1 \\ \text{II}'' & 8x - 13y = 34 \end{array}$$

Daraus ergibt sich I''' $x = 1$
II''' $y = -2$

Probe: I LS $= \dfrac{3+2-5}{7-4-3}$ sinnlos, da Nenner $= 0$.

Die Annahme, dass das System lösbar sei, hat also zu einem Widerspruch geführt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist somit die leere Menge.

Beispiel 3:

$$\text{I} \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

$$\text{II} \quad \frac{3}{x} - \frac{3}{y} = 1$$

Da die Unbekannten nur in der Verbindung $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{3}{y}$ auftreten, empfiehlt es sich, für diese Ausdrücke Abkürzungen, z. B. u und v, einzuführen; d. h., wir machen folgende **Substitution***:

$$\text{(S)} \quad \frac{1}{x} =: u; \quad \frac{3}{y} =: v\,.$$

In den neuen Unbekannten u, v erhalten wir dann das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' \quad u + v = 1 & \\ & \Leftrightarrow \\ \text{II}' \quad 3u - v = 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{I}'' \quad u = \dfrac{1}{2} \\ \\ \text{II}'' \quad v = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Aus (S) ergibt sich dann

$$\begin{array}{ll} \text{III} \quad \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} & \\ & \Leftrightarrow \\ \text{IV} \quad \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{III}' \quad x = 2 \\ \\ \text{IV}' \quad y = 6 \end{array}$$

Probe: I LS $= \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1 = \text{RS}$ II LS $= \frac{3}{2} - \frac{3}{6} = 1 = \text{RS}$

Die Lösungsmenge von (I, II) ist also $L = \{(2|6)\}$.

* substitụere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 4:

$$\text{I} \quad \frac{6}{x+y} + \frac{2}{x+y+1} = -1$$

$$\text{II} \quad \frac{-3}{x+y} + \frac{4}{x+y+1} = 3$$

Substitution: (S) $\dfrac{3}{x+y} =: u; \quad \dfrac{2}{x+y+1} =: v\,.$

Für u und v ergibt sich folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I}' & 2u + v & = & -1 \\ \text{II}' & -u + 2v & = & 3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{I}'' & u & = & -1 \\ \text{II}'' & v & = & 1 \end{array}$$

Für die Unbekannten x und y erhalten wir durch Einsetzen in (S):

$$\begin{array}{lrcl} \text{III} & x+y & = & -3 \\ \text{IV} & x+y+1 & = & 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{III}' & x+y & = & -3 \\ \text{IV}' & x+y & = & 1 \end{array} \quad \text{Widerspruch!}$$

Das ursprüngliche System hat demnach keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Aufgaben

1. $\dfrac{x+30}{y+1} = 5$

$\dfrac{1}{2y-6} - \dfrac{2}{3(x-1)} = 0$

2. $\dfrac{2x-8}{x+y} = \dfrac{4}{5}$

$\dfrac{8}{2x+y} = \dfrac{5}{3y-4}$

3. $\dfrac{2}{11x-6y+2} = \dfrac{1}{14y-19x-9}$

$\dfrac{8y-3x-6}{7x-y+1} = \dfrac{3}{2}$

4. $\dfrac{1}{2x+3y-8} = \dfrac{-5}{3x-y+9}$

$\dfrac{7}{x+y-2} = \dfrac{2}{4x-3y+27}$

5. $3x+5y = 5z-4$

$\dfrac{3y-8z-6}{x+y+2z} = -1$

$\dfrac{6}{x-2y} = \dfrac{-1}{y-2z}$

6. $\dfrac{2x-7y+3z}{5x} = 1{,}4$

$\dfrac{x-y}{3y-4z} = 0{,}5$

$\dfrac{x-4y+15z}{8x+y-6z} = -1{,}5$

7. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 10$

$\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 20$

8. $\dfrac{14}{x} + \dfrac{15}{y} = 44$

$\dfrac{22}{x} - \dfrac{25}{y} = 40$

9. $5x - \frac{8}{y} = 13$

$7x - \frac{10}{y} = 18{,}5$

10. $\frac{5}{x} + 3y = 1$

$\frac{15}{x} - 7y = 3$

11. $\frac{1}{x+y+1} + \frac{3}{x-y+1} = 2$

$\frac{4}{x+y+1} - \frac{9}{x-y+1} = 1$

12. $\frac{10}{x+2y-1} - \frac{3}{x+2y+8} = 2$

$\frac{10}{x+2y-1} + \frac{6}{x+2y+8} = -1$

13. $\frac{1}{2x-10y+30} + \frac{1}{3x+2y-11} = 0$

$\frac{-7}{x-5y+15} + \frac{6}{3x+2y-11} = 0{,}2$

14. $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 14$

$\frac{1}{2x} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$

$\frac{2}{x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{3z} = \frac{3}{2}$

15. $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x+z} = \frac{3}{8}$

$\frac{1}{x+y} + \frac{9}{y+z} = \frac{3}{4}$

$\frac{5}{x+y} - \frac{6}{y+z} - \frac{4}{x+z} = \frac{5}{12}$

6.7 Textaufgaben

6.7.1 Bestimmung von Zahlen

1. Addiert man zu einer Zahl das Dreifache einer anderen, so ergibt sich 18. Subtrahiert man dagegen vom Dreifachen der ersten Zahl die zweite, so erhält man 4. Wie heißen die Zahlen?
2. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu ihrer Differenz wie 13 : 22. Die doppelte Summe der Zahlen übertrifft ihre Differenz um $\frac{8}{15}$.
3. Die Differenz zweier Zahlen ist eine gerade Primzahl. Ihre Summe ist gleich dem Quadrat dieser Primzahl.
4. Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 2 : 7. Die kleinere ist in der größeren dreimal enthalten, wobei 9 als Rest bleibt.
5. Eine zweiziffrige Zahl ist viermal so groß wie die Quersumme. Vertauscht man die beiden Ziffern, so erhält man eine um 18 größere Zahl.