Algebra

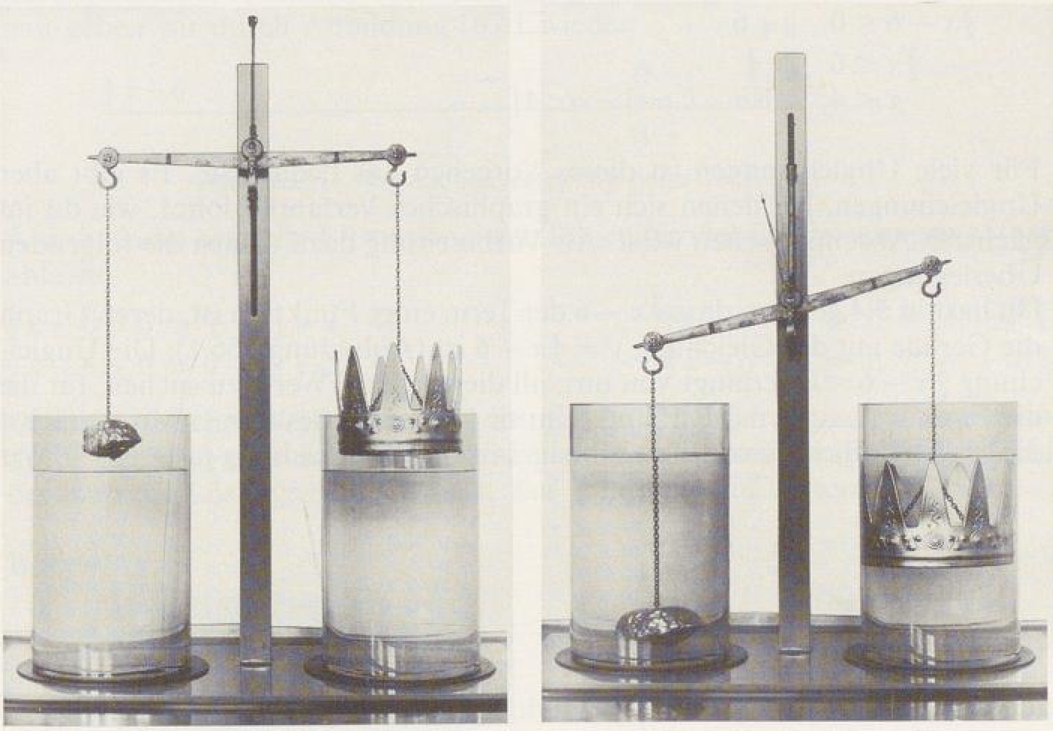
Barth, Friedrich

München, 1999

7 Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

7 Ungleichungen



Die hydrostatische Waage
Was ist gleich, was ist ungleich?

König HIERON II. von Syrakus (*306, 275 Tyrann, 265 König, †215 v. Chr.) hatte einem Goldschmied Gold übergeben, damit er daraus eine Krone für eine Götterstatue schmiede. Es wurde ihm angezeigt, der Goldschmied habe Gold weggenommen und Silber beigemengt. HIERONS Verwandter und Freund ARCHIMEDES (Ἀρχιμήδης, um 287–212 v. Chr.), der wohl größte Mathematiker des Altertums, sollte den Verdacht erhärten oder widerlegen, ohne die Krone zu beschädigen. Im Bade kam ARCHIMEDES die Erleuchtung, die ihn so überwältigte, dass er mit dem Rufe εὕρηκα (heúreka) – »ich hab's gefunden« – nackt nach Hause eilte. Der Goldschmied hatte unterschlagen. – Überliefert wurde diese Legende von dem Baumeister Marcus VITRUVIUS Pollio (1. Jh. v. Chr.) in seinen vor 31 v. Chr. verfassten *De architectura libri decem*, dem einzigen erhaltenen Lehrwerk der Antike über Architektur und Technik. Im Lösungsheft wird VITRUVS Bericht wiedergegeben, dessen Übersetzung auf Seite 164 abgedruckt ist.

7 Ungleichungen

7.1 Ein graphisches Verfahren zum Lösen linearer Ungleichungen

Dir ist bekannt, wie man die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mittels Äquivalenzumformungen bestimmt. Zur Erinnerung

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x - 6 &< 0 \quad \| + 6 \\ \tfrac{3}{2}x &< 6 \quad \| \cdot \tfrac{2}{3} \\ x &< 4, \quad \text{also} \quad L =]-\infty; 4[. \end{aligned}$$

Für viele Ungleichungen ist dieses Vorgehen das bequemste. Es gibt aber Ungleichungen, bei denen sich ein graphisches Verfahren lohnt, wie du im nächsten Abschnitt sehen wirst. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Überlegungen.
Du hast in **5.4** gelernt, dass $\frac{3}{2}x - 6$ der Term einer Funktion ist, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$ ist (Abbildung 166.1). Die Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ verlangt von uns, all diejenigen x-Werte zu suchen, für die die Funktionswerte negativ sind. Um sie zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstelle dieser Funktion, d. h. die Lösung der Gleichung $\frac{3}{2}x - 6 = 0$. Wir

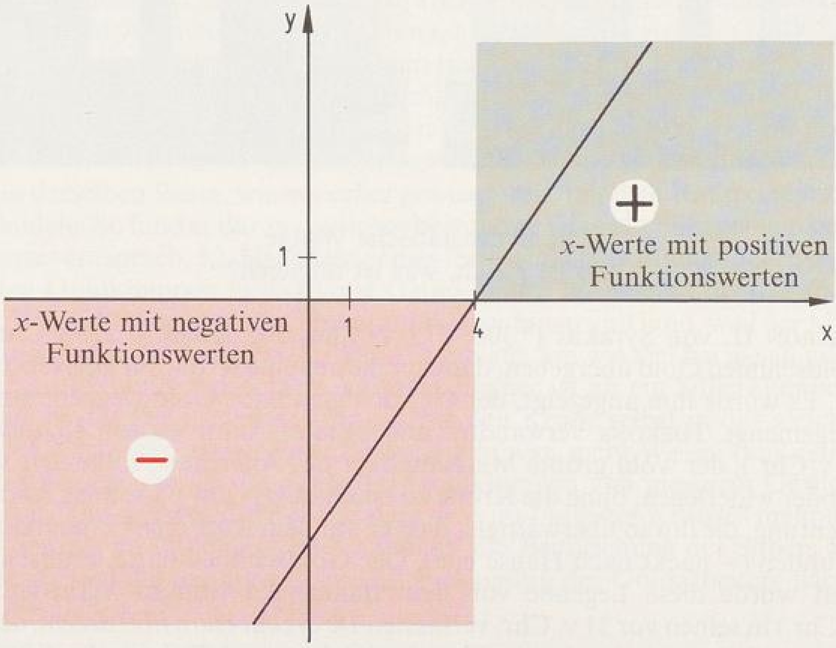


Abb. 166.1 Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$

erhalten $x = 4$. An dieser Stelle schneidet die Gerade die x-Achse. Da die Steigung der Geraden den Wert $\frac{3}{2}$ hat, also positiv ist, verläuft die Gerade von links unten nach rechts oben. Die Funktionswerte sind somit links von der Nullstelle 4 negativ, rechts davon positiv. Damit können wir die Lösungsmenge der Ungleichung direkt ablesen zu $L =]-\infty; 4[$.

Zur Lösung der Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ ist es aber gar nicht nötig, die Gerade zu zeichnen. Es genügt nämlich zu wissen, wo sie die x-Achse schneidet und welches Steigungsverhalten sie besitzt. Bei einer steigenden Geraden liegen die negativen Funktionswerte links von der Nullstelle und die positiven rechts davon; bei einer fallenden Geraden ist es genau umgekehrt. Diesen Sachverhalt geben wir durch Abbildung 167.1 wieder:

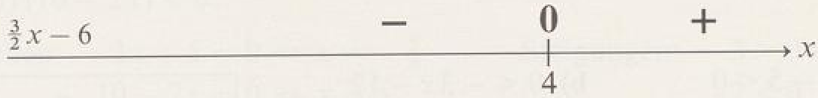


Abb. 167.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{3}{2}x - 6$

Aus ihr kann man die Lösungsmengen folgender vier Ungleichungen sofort ablesen.

$\frac{3}{2}x - 6 < 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4[$ $\qquad$ $\frac{3}{2}x - 6 > 0 \Rightarrow L =]4; +\infty[$

$\frac{3}{2}x - 6 \leqq 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4]$ $\qquad$ $\frac{3}{2}x - 6 \geqq 0 \Rightarrow L = [4; +\infty[$

Beim graphischen Verfahren zur Lösung von Ungleichungen löst man also durch Rechnen zunächst eine Gleichung und macht dann eine Zeichnung, aus der man die Lösungsmenge abliest. Zur Einübung ein weiteres Beispiel.

Beispiel 2:

$-7x + 13 \geqq 0$

Nullstelle: $-7x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{7}$

Steigung $= -7 < 0$

Die Vorzeichenverteilung gibt Abbildung 167.2 wieder. Aus ihr liest man ab, dass $L =]-\infty; \frac{13}{7}]$ ist.

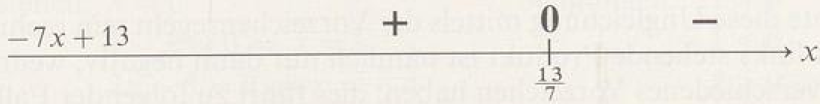


Abb. 167.2 Vorzeichenverteilung beim Term $-7x + 13$

Das graphische Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn eine Seite der Ungleichung den Wert null hat. Andernfalls muss man durch Äquivalenzumformungen erst eine solche **Nullform*** herstellen. Dazu

* Die erste Nullform einer Gleichung findet sich in der *Arithmetica integra* (1544) des Michael Stifel (1487 (?) bis 1567), folium 283r.
Systematisch führte die Nullform Thomas Harriot (1560–1621) ein. 1631 stellten Freunde, vor allem Walter Warner, aus seinen hinterlassenen Manuskripten einen dünnen Band *Artis analyticae praxis, ad aequationes Algebraicas nova, expedita & generali methodo, resolvendas: tractatus* zusammen, der starken Einfluss auf René Descartes (1596–1650) ausübte. Wir erinnern daran, dass sich in diesem Werk zum ersten Mal die nicht von Harriot erfundenen Symbole $<$ und $>$ finden. Walter Warner hat Harriots handschriftliche

Beispiel 3:

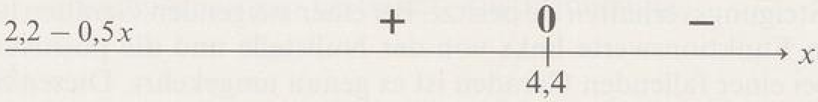
$$0{,}3 - 3{,}2x < -2{,}7x - 1{,}9 \quad \| + 2{,}7x + 1{,}9$$

$$2{,}2 - 0{,}5x < 0$$

Nullstelle: $2{,}2 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}4$

Steigung $= -0{,}5 < 0$

$L =]4{,}4; +\infty[$.



Aufgaben

1. a) $2x - 5 < 0$ b) $0 < -3x - 12$
2. a) $3\frac{1}{3} - \frac{5}{9}x > 0$ b) $0 > -2\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{8}$
3. a) $5{,}6x - 0{,}49 \geqq 0$ b) $0 \leqq 1 - 0{,}001x$
4. a) $3x - 12 < 4 - 3(1 - (1 - x))$
   b) $8\frac{1}{4}x + 3(-\frac{1}{12}x + \frac{4}{9}) \geqq 4\frac{1}{4}x - 6(\frac{11}{24} - \frac{11}{24}x)$
5. a) $(2x - \frac{1}{2})^2 > 2x(2x - 1)$
   b) $(0{,}3 - 2x)(0{,}3 + 2x) < 0{,}09 - 4x^2$

Abb. 168.1 Unterschrift HARRIOTS im Brief an KEPLER vom 13. 7. 1608

7.2. Produktungleichungen

Das graphische Lösungsverfahren von **7.1** bewährt sich besonders bei Produktungleichungen. Unter einer **Produktungleichung** verstehen wir eine Ungleichung, deren eine Seite ein Produkt und deren andere Seite null ist. Ein **Beispiel** hierfür ist

$$(3x + 5)(10 - 2x) < 0.$$

Man könnte diese Ungleichung mittels der Vorzeichenregeln rein rechnerisch lösen. Das links stehende Produkt ist nämlich nur dann negativ, wenn beide Faktoren verschiedenes Vorzeichen haben; dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

(1. Faktor positiv **und** 2. Faktor negativ)

oder

(1. Faktor negativ **und** 2. Faktor positiv) d.h.

Zeichen $\lessdot$ und $\gtrdot$ drucktechnisch zu $<$ und $>$ vereinfacht. – Sir Walter RALEIGH sandte 1585 HARRIOT nach Amerika, wo er North-Carolina erforschte und kartographierte. Nach seiner Rückkehr nach England (1587) tat er sich als Astronom hervor, der mit Johannes KEPLER (1571–1630) korrespondierte; er beobachtete die Sonnenflecken und 1610 nach Galileo GALILEI (1564–1642) die Jupitermonde.
Erst 1734 verband Pierre BOUGUER (16. 2. 1698 Croisic/Bretagne – 15. 8. 1758 Paris) die Zeichen WARNERS mit dem Gleichheitszeichen des Robert RECORD(E) (1510(?) – 1558) zu den Symbolen $\leqq$ und $\geqq$. BOUGUER war einer der Geodäten, die Frankreich 1735 zur Vermessung eines Meridianbogens nach Peru sandte.

$((3x+5>0) \wedge (10-2x<0)) \vee ((3x+5<0) \wedge (10-2x>0))$

$$(x > -\tfrac{5}{3} \wedge x > 5) \;\vee\; (x < -\tfrac{5}{3} \wedge x < 5)$$

$$x > 5 \;\vee\; x < -\tfrac{5}{3}$$

$L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\;\cup\;]5; +\infty[$

Dieses rein rechnerische Verfahren ist aufwendig und auch unübersichtlich. Einfacher findet man die Lösungsmenge mit dem graphischen Verfahren. Dazu berechnet man für jeden Faktor zuerst die Nullstelle, zeichnet dann die dazugehörige Vorzeichenverteilung und ermittelt über die Vorzeichenregeln die Vorzeichenverteilung des Produkts, aus der man die Lösungsmenge abliest. Betrachten wir nochmals die Produktungleichung

$(3x+5)(10-2x) < 0.$

Nullstellen: $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\tfrac{5}{3}$ Steigungen: $3>0$

$10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$ $-2<0$

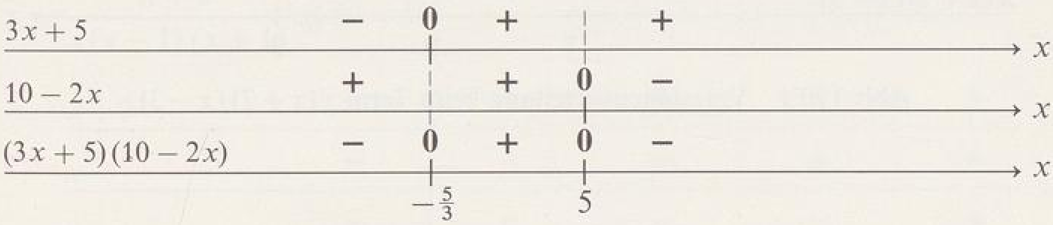


Abb. 169.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+5)(10-2x)$

Aus Abbildung 169.1 liest man ab $L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\;\cup\;]5; +\infty[$

Das graphische Verfahren lässt sich im Gegensatz zum rechnerischen Verfahren mit Leichtigkeit auch auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren übertragen. Hierzu ein

Beispiel: $x(1-x)(2x+8) \geqq 0$

Nullstellen: $x=0$ Steigungen: $1>0$

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ $-1<0$

$2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ $2>0$

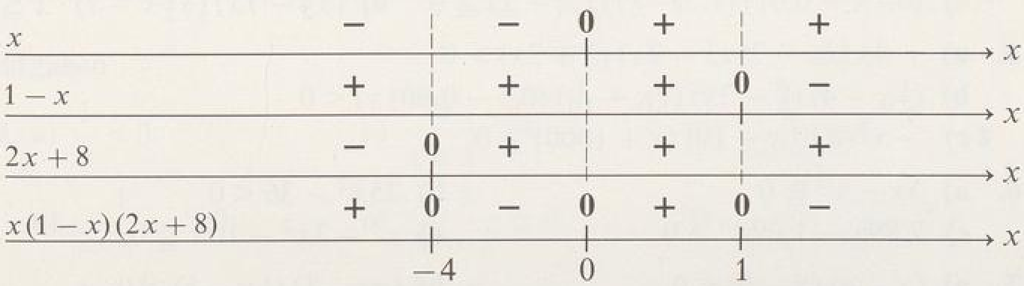


Abb. 169.2 Vorzeichenverteilung beim Term $x(1-x)(2x+8)$

Aus Abbildung 169.2 liest man ab $L =]-\infty; -4] \cup [0; 1]$

Wenn eine Ungleichung nicht in Produktform vorliegt, dann kann man sie manchmal durch Faktorisieren in Produktform bringen und lösen.
Dazu ein

Beispiel: $x^3 + 4x^2 - 21x > 0$
$x(x^2 + 4x - 21) > 0$
$x(x+7)(x-3) > 0$ $\qquad L =]-7; 0[\cup]3; +\infty[$

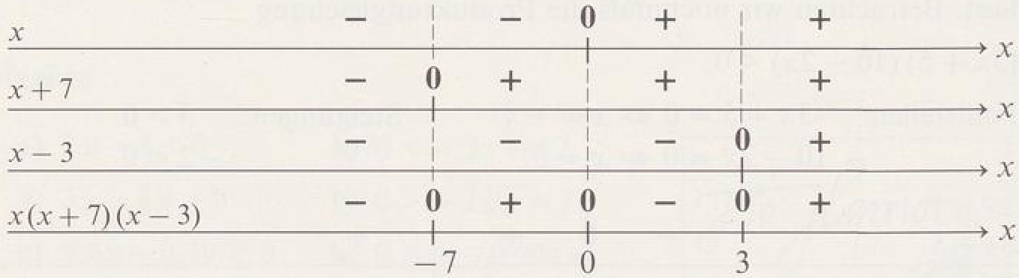


Abb. 170.1 Vorzeichenverteilung beim Term $x(x+7)(x-3)$

Aufgaben

1. **a)** $(x-2)(x-5) < 0$ **b)** $x(x-\frac{1}{3}) > 0$
c) $(x+1)(x-1) \leqq 0$ **d)** $(x+2)(-x+4) \geqq 0$

2. **a)** $(x+2)^2 > 0$ **b)** $(-x-7)^2 < 0$
c) $(x+3)^2 \geqq 0$ **d)** $(-x+7)^2 \leqq 0$
e) $(x+1)^3 > 0$ **f)** $(x-3)^3 < 0$

3. **a)** $\frac{1}{2}(2x+6)(x+3) < 0$ **b)** $5(3x+1)(2x-5) > 0$
c) $-3(\frac{1}{2}x-2)(-\frac{1}{3}x-3) \leqq 0$ **d)** $-(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}) \geqq 0$

4. **a)** $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ **b)** $3x(2x+9)(-x+7) < 0$
c) $(0{,}1x-0{,}01)(1{,}2-x)(1{,}2+x) \geqq 0$ **d)** $(3\frac{1}{2}-7x)(3\frac{1}{2}x-7) \cdot x \leqq 0$

•**5.** **a)** $-4x(2x-3)(3-2x)(3+2x) > 0$
b) $(\frac{1}{2}x-4)(\frac{4}{3}-2x)(\frac{3}{5}x+\frac{1}{10})(0{,}1-0{,}001x) < 0$
:**c)** $-x^2(0{,}01x+10)(x+1000) \geqq 0$

6. **a)** $3x - x^2 \geqq 0$ **b)** $25x^2 - 36 < 0$
c) $2{,}89x - 1{,}69x^3 > 0$ **d)** $x^3 - 3x^2 - 10x \leqq 0$

:**7.** **a)** $(x-a)(x-b) < 0$ **b)** $(ax-1)(bx-b) > 0$
c) $-x(a-x)(b+x)^2 \geqq 0$ **d)** $-(a^2x^2-b^4)(ax+b^2) < 0$

7.3 Bruchungleichungen

Die Vorzeichenregeln für die Division entsprechen völlig denen für die Multiplikation. Deshalb können wir das graphische Lösungsverfahren auch auf Bruchungleichungen anwenden, wenn wir sie auf Nullform bringen und Zähler und Nenner faktorisieren.

Beispiel:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} \leqq \frac{x^2}{x^2-1} \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2-1} \leqq 0$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 + 2 - x^3}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0 \qquad L = [-2; -1[\cup]0; 1[$$

	$x<-2$	-2	$-2<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
$x+2$	−	0	+	+	+	+
x	−		−	−	+	+
$x-1$	−		−	−	−	+
$x+1$	−		−	+	+	+
$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$	+	0	−	+	−	+

Abb. 171.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$.
Die roten Striche kennzeichnen die nicht zulässigen x-Werte.

Weil bei Bruchungleichungen Nenner auftreten, die null werden können, müssen wir auf die Definitionsmenge achten. Am besten streicht man beim graphischen Lösungsverfahren die nicht zulässigen x-Werte von vornherein weg.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} < 0$ **b)** $\frac{2}{x+1} > 0$ **c)** $\frac{-7}{x-3} \geqq 0$

d) $\frac{1}{2x+5} > 0$ **e)** $\frac{-8}{3x+2} \geqq 0$ **f)** $\frac{1}{0{,}3x+1{,}2} > 0$

2. a) $\frac{x+1}{x-1} > 0$ **b)** $\frac{3-x}{x-5} < 0$ **c)** $\frac{2-3x}{3x-2} \leqq 0$

d) $\frac{2x-1}{1-x} \leqq 0$ e) $\frac{\frac{1}{2}x-3}{3x-\frac{1}{2}} < 0$ f) $\frac{1{,}2-0{,}3x}{0{,}9+3x} \geqq 0$

3. a) $\frac{1}{x} > -2$ b) $\frac{2}{x+2} < -3$ c) $\frac{x}{0{,}8-2x} > -\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{1}{x(x+2)} > 0$ b) $\frac{-3}{(x-2)(x+3)} \geqq 0$

c) $\frac{-1}{x^2} > 0$ d) $\frac{3}{(x+3)^2} \geqq 0$

5. a) $\frac{x}{x^2-4} < 0$ b) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9} > 0$

c) $\frac{9x^2-16}{9x^2+16-24x} \leqq 0$ d) $\frac{\frac{1}{4}-x+x^2}{\frac{1}{4}-x^2} \geqq 0$

6. a) $\frac{x}{x-1} > 1$ b) $\frac{x+1}{x-1} \leqq 1$

c) $\frac{2x-1}{4x+2} \geqq -1$ d) $\frac{-0{,}2x+0{,}1}{3x+0{,}6} < 2$

7. a) $x < \frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x}$

c) $\frac{-1}{2x+1} < \frac{1}{1+2x}$ d) $\frac{-0{,}1}{x+0{,}2} \geqq \frac{0{,}2}{0{,}2x+1}$

8. a) $\frac{x}{x+2} \geqq \frac{2x}{2x+1}$ b) $\frac{6x}{x+1} \leqq \frac{6x+1}{x-1}$

c) $\frac{3x}{2-3x} > \frac{1-2x}{2x-1}$ d) $\frac{3x}{2-3x} \leqq \frac{1-2x}{2x+1}$

9. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geqq 0$ b) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geqq 0$

c) $\frac{3+x}{x} + \frac{6}{3-x} \leqq 1$ d) $\frac{4x-1}{x+1} + \frac{4x+1}{x-1} < 8$

•10. a) $x + \frac{1}{x} \leqq \frac{x^2+2}{x} - 1$ b) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{2+x} \geqq \frac{x^2+x}{(x-2)^2}$

c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} \geqq \frac{2}{x}$ d) $\frac{5x^2-6}{25x^2-4} + \frac{9-2\frac{1}{2}x}{15x^2-6x} < \frac{4x-5}{20x^2+8x} - \frac{1}{6x}$

11. a) $\frac{x}{x-a} \leqq 0$ **b)** $\frac{x}{x-a} \leqq 1$ **c)** $\frac{x}{x-a} \leqq a$

12. a) $1 > \frac{1}{x+3} > 0{,}1$ **b)** $\frac{1}{5} < \frac{2}{3x-5} < 2$

c) $-1 \leqq \frac{1}{x} \leqq 2$ **d)** $-10 < \frac{10}{2x+1} \leqq 5$

13. a) Für zwei von null verschiedene rationale Zahlen gelte $a < b$. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Kehrwerten $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$?

Hinweis: Multipliziere die gegebene Ungleichung mit $\frac{1}{ab}$ und beachte die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Wende die Regeln aus **a** an für

1) $\frac{1}{x} > 1$ **2)** $\frac{1}{x} < -3$ **3)** $\frac{3}{2x} > 10$

4) $\frac{1}{x} < 1$ **5)** $\frac{1}{2x} > -3$ **6)** $\frac{1}{x-1} < 4$

7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

Treten in Gleichungen bzw. Ungleichungen Absolutbeträge auf, so musst du immer eine Fallunterscheidung vornehmen. Dabei musst du, wie du weißt, danach unterscheiden, ob der Term zwischen den Betragsstrichen positiv, null oder negativ ist. Der Term zwischen den Betragsstrichen ist bekanntlich das Argument der Betragsfunktion.
Ist nun das Argument größer als 0 oder gleich 0, dann kannst du die Betragsstriche durch eine Plusklammer ersetzen. Ist das Argument hingegen kleiner als 0, dann musst du die Betragsstriche durch eine Minusklammer ersetzen, z. B.

$$|2x-3| = \begin{cases} (2x-3), & \text{falls } 2x-3 \geqq 0, \\ -(2x-3), & \text{falls } 2x-3 < 0. \end{cases}$$

Üblicherweise gibt man aber die Bedingungen $2x-3 \geqq 0$ und $2x-3 < 0$ als Bedingungen für x an und löst die Minusklammer im Kopf auf, nämlich

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{falls } x \geqq \frac{3}{2}, \\ 3-2x, & \text{falls } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

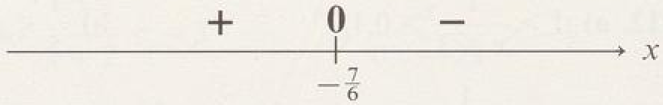
Die Zahl $\frac{3}{2}$ trennt die beiden Fälle. Sie ist aber auch die Nullstelle des Arguments. Es ist daher zweckmäßig, zuerst die Nullstelle des Arguments zu bestimmen, um mit ihrer Hilfe die Vorzeichenverteilung des Arguments ermitteln zu können.

Beispiel 1: $|-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10}|$

Nullstelle des Arguments: $-\frac{5}{3}x - \frac{7}{10} = 0$

$x = -\frac{7}{6}$

Vorzeichenverteilung:



Somit gilt:

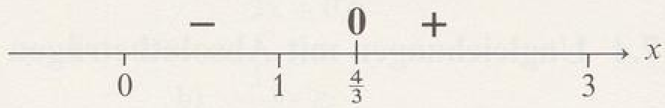
$$|-\tfrac{3}{5}x - \tfrac{7}{10}| = \begin{cases} -\tfrac{3}{5}x - \tfrac{7}{10}, & \text{falls} \quad x \leqq -\tfrac{7}{6}, \\ \tfrac{3}{5}x + \tfrac{7}{10}, & \text{falls} \quad x > -\tfrac{7}{6}. \end{cases}$$

Beachte: An Stelle der Minusklammer $-(-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10})$ haben wir gleich $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}$ geschrieben.

Kommen nun Absolutbeträge in Gleichungen oder Ungleichungen vor, dann musst du in den jeweiligen Vorzeichenbereichen die zugehörigen Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen. Die Lösungsmenge der Betrags(un)gleichung ist dann die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen. Zwei Beispiele mögen dir das veranschaulichen.

Beispiel 2: $|3x - 4| \leqq 2x - 1$

Vorzeichenverteilung: $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$



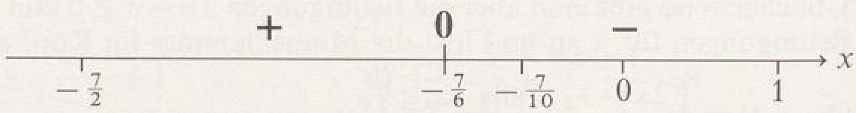
1. Fall $\boxed{x < \frac{4}{3}}$
$$\begin{aligned} -3x + 4 &\leqq 2x - 1 \\ 5 &\leqq 5x \\ 1 &\leqq x \quad \Rightarrow \quad L_1 = [1; \tfrac{4}{3}[\end{aligned}$$

2. Fall $\boxed{x \geqq \frac{4}{3}}$
$$\begin{aligned} 3x - 4 &\leqq 2x - 1 \\ x &\leqq 3 \quad \Rightarrow \quad L_2 = [\tfrac{4}{3}; 3] \end{aligned}$$

Somit gilt $L = L_1 \cup L_2 = [1; 3]$.

Beispiel 3: $|-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10}| > \frac{2}{5}x$

Vorzeichenverteilung: $-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6}$



1. Fall $\boxed{x < -\frac{7}{6}}$
$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{5}x - \tfrac{7}{10} &> \tfrac{2}{5}x \\ -x &> \tfrac{7}{10} \\ x &< -\tfrac{7}{10} \quad \Rightarrow \quad L_1 =]-\infty; -\tfrac{7}{6}[, \\ &\text{da } -\tfrac{7}{6} < -\tfrac{7}{10}. \end{aligned}$$

2. Fall $\boxed{x \geqq -\frac{7}{6}}$

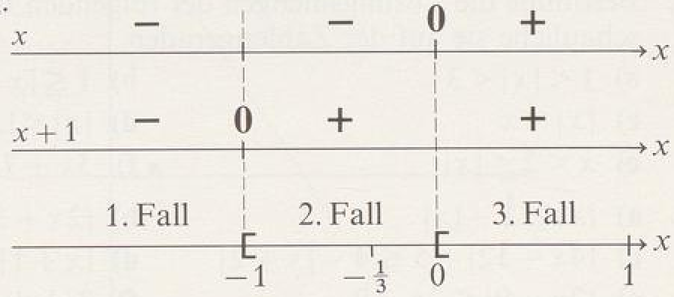
$$\begin{aligned} -(-\tfrac{3}{5}x - \tfrac{7}{10}) &> \tfrac{2}{5}x \\ \tfrac{1}{5}x &> -\tfrac{7}{10} \\ x &> -\tfrac{7}{2} \Rightarrow L_2 = [-\tfrac{7}{6}; +\infty[, \\ &\text{da } -\tfrac{7}{2} < -\tfrac{7}{6}. \end{aligned}$$

Somit gilt $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{Q}$

Schwieriger wird es, wenn mehrere Absolutbeträge vorkommen. Dann musst du für jedes Argument die Vorzeichenverteilung feststellen und anschließend die Zahlengerade so in Intervalle einteilen, dass in keinem der Intervalle ein Argument das Vorzeichen ändert. Die Nullstellen der Argumente trennen die Intervalle. Wir wollen sie immer zum rechten Intervall dazunehmen. Dazu

Beispiel 4: $|x| - |x+1| > x$

Vorzeichenverteilung:



1. Fall $\boxed{x < -1}$

$$\begin{aligned} -x-(-x-1) &> x \\ -x+x+1 &> x \\ 1 &> x \\ x &< 1 \quad \Rightarrow L_1 =]-\infty; -1[\end{aligned}$$

2. Fall $\boxed{-1 \leqq x < 0}$

$$\begin{aligned} -x-(x+1) &> x \\ -x-x-1 &> x \\ -1 &> 3x \\ x &< -\tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow L_2 = [-1; -\tfrac{1}{3}[\end{aligned}$$

3. Fall $\boxed{0 \leqq x}$

$$\begin{aligned} x-(x+1) &> x \\ x-x-1 &> x \\ -1 &> x \\ x &< -1 \quad \Rightarrow L_3 = \{\ \} \end{aligned}$$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty; -\frac{1}{3}[.$

Aufgaben

1. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:
a) $|x| = 0$ **b)** $|x| = 1$ **c)** $|x| = -3{,}75$ **d)** $|x| = |-2\frac{3}{7}|$
e) $|x| - 8 = 11$ **f)** $3 - |x| = 7$ **g)** $2 \cdot |x| + 5 = 9$ **h)** $5 + |3x| = 5$
i) $|x - 1| = 1{,}5$ **k)** $|x + 4| = 6$ **l)** $|2x + 5| = 0$ **m)** $|9 - 7x| = 30$

2. Welche Punktmengen auf der Zahlengeraden werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben?
a) $|x| < 1$ **b)** $|x| \geqq 2$ **c)** $|x - 3| \leqq 1$ **d)** $|4x + 10| > 5$

3. **a)** $|2x - 1| < 5x$ **b)** $|x + 1| \geqq 2x - 1$
c) $2 \cdot |x - 0{,}5| \leqq 2x + 1{,}5$ **d)** $-|3 - x| > 3 - x$
e) $-3 \cdot |\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}| > 10 - x$ **f)** $-2{,}5 \cdot |2x - 1{,}2| \leqq 10 - 2x$

4. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und veranschauliche sie auf der Zahlengeraden.
a) $1 < |x| < 3$ **b)** $1 \leqq |x - 3| \leqq 4$
c) $|x| < x$ **d)** $|x| < |x + 3|$
e) $x < 2 < |x|$ •**f)** $5x + 7 > |2x - 4| \geqq x - 1$

5. **a)** $|x| \geqq 1 - |x|$ **b)** $|2x + 3| \geqq |3x - 2|$
c) $|4x - 12| + 5 \leqq 4 - |x + 2|$ **d)** $|x + 1| \geqq x + |x - 1|$
e) $|2x - 9| \leqq 2x - 9$ **f)** $3 \cdot |x| + 2x + 1 \leqq 2 - |2x - 6|$

6. **a)** $|x| + |x + 1| \geqq x + 2$ **b)** $|x| - |x + 1| \geqq x + 2$
c) $-|x| + |x + 1| \geqq x + 2$ **d)** $-|x| - |x + 1| \geqq x + 2$

•**7.** **a)** $|x + 2| - |2x - 1| < 2x$
b) $|\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}| - 2 \cdot |\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
c) $|2{,}5 - 1{,}2x| + |2{,}4x + 7{,}5| \geqq 3{,}6x + 1{,}5$

••**8.** **a)** $|x| + |x + 1| - |x + 2| > 0$
b) $|x - 1{,}5| + |2x - 5| - |3x + 6| \leqq 4x - 2{,}5$
c) $|\frac{1}{4}x + 1| - |x + \frac{1}{4}| \geqq |\frac{2}{3}x + 1| - |x + \frac{2}{3}|$

7.5 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

7.5.1 Graphische Lösung einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen lässt sich geometrisch in einem Koordinatensystem als Menge von Punkten deuten, die auf einer Geraden liegen. So ergibt sich als Lösungsmenge für die Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$ die Gerade der Abbildung 177.1.

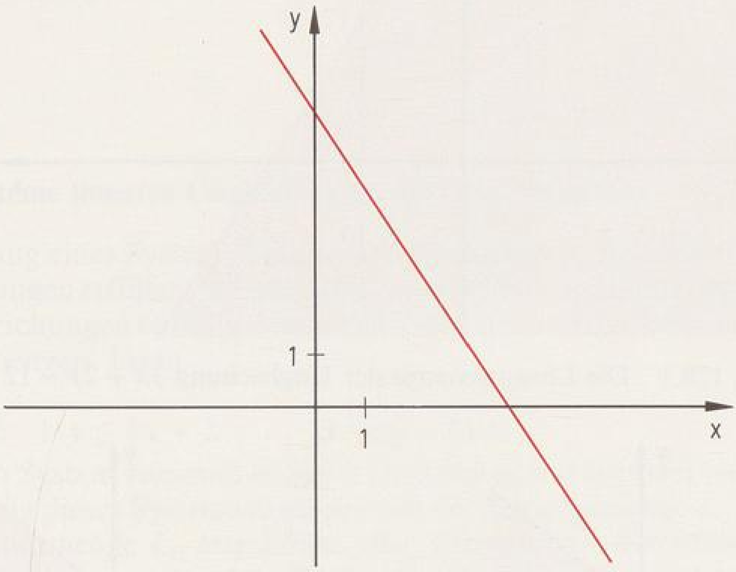


Abb. 177.1 Die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$

Nun betrachten wir statt dieser Gleichung eine Ungleichung, zum Beispiel $3x + 2y - 12 \leqq 0$. Wie sieht in diesem Fall das geometrische Bild der Lösungsmenge aus? Am leichtesten lässt sich diese Frage beantworten, wenn man die Ungleichung nach y auflöst. Wir erhalten als neue Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$. Wegen des $=$-Zeichens sind die Punkte der Geraden von Abbildung 177.1 auch Lösung dieser Ungleichung; so ist z. B. $(2|3)$ ein Lösungspunkt. Wegen des $<$-Zeichens ist dann auch jeder Punkt $(2|y)$ mit $y < 3$, d. h. jeder Punkt, der unterhalb des Geradenpunkts $(2|3)$ liegt, ein Lösungspunkt der Ungleichung (Abbildung 178.1). Weil die für den Punkt $(2|3)$ angestellte Überlegung für jeden Geradenpunkt richtig ist, können wir sagen: Die Lösungsmenge der Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$ ist die Menge aller Punkte unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 6$ und die Gerade selbst. Eine solche Punktmenge heißt **Halbebene**.
Bei der Ungleichung $y < -\frac{3}{2}x + 6$ gehört die Randgerade natürlich nicht zur Lösungsmenge. Ersetzt man $<$ durch $>$, dann sind die oberhalb der Geraden gelegenen Punkte Lösungspunkte. Einen Überblick über die möglichen vier Fälle gibt dir Abbildung 178.2.

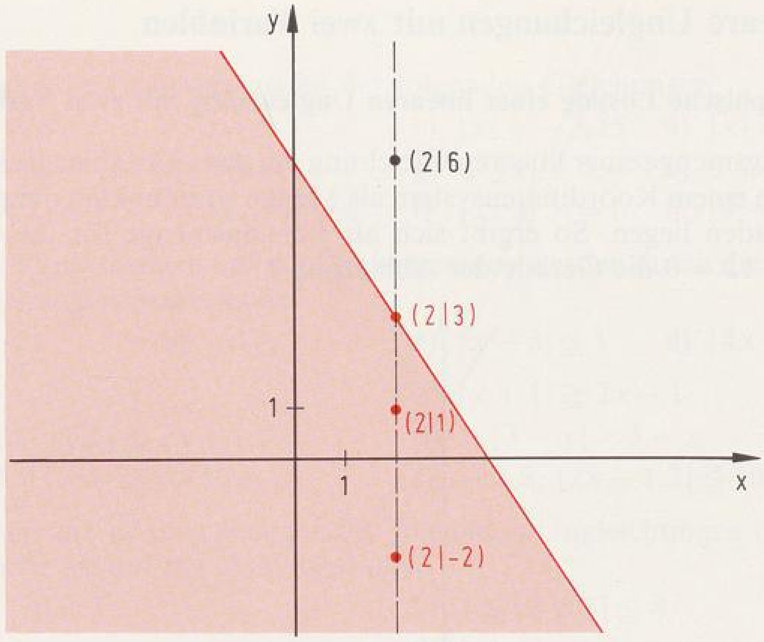


Abb. 178.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x + 2y - 12 \leqq 0$

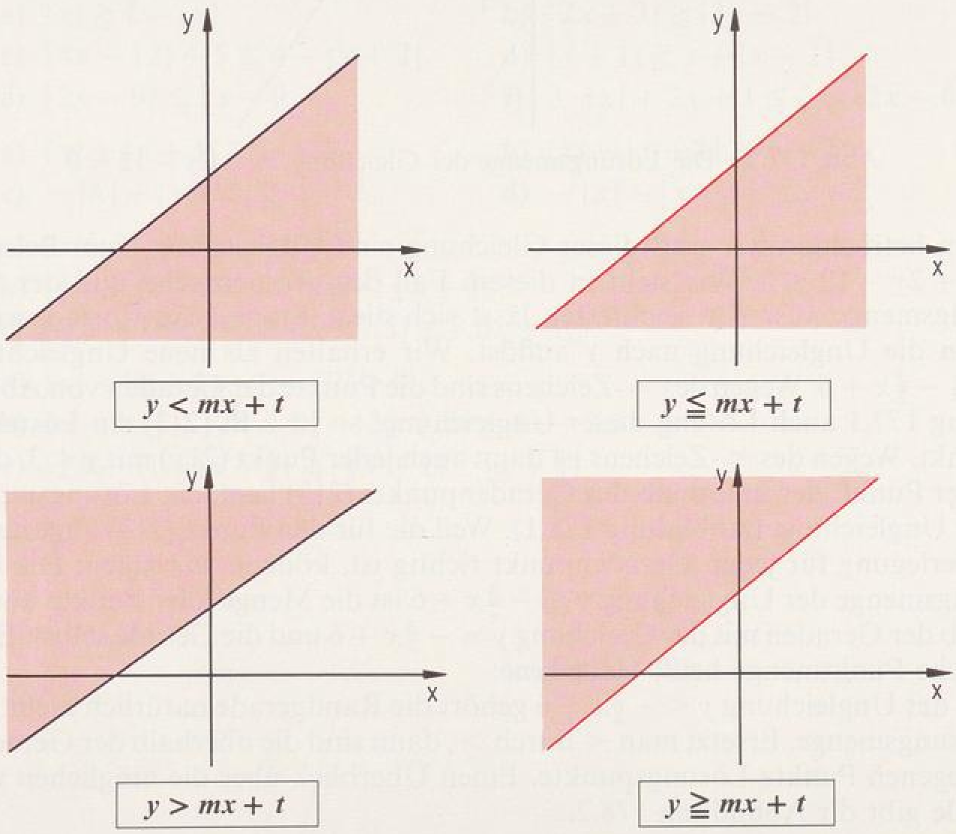


Abb. 178.2 Die Lösungsmengen der Ungleichungen $y \gtreqqless mx + t$

Aufgaben

Zeichne die Lösungsmenge!

1. **a)** $y < x + 3$ **b)** $y \leqq -\frac{1}{2}x$ **c)** $y > 2x - 5$ **d)** $y \geqq -\frac{3}{4}x + 4$

2. **a)** $y < 2$ **b)** $y \geqq -3$ **c)** $x < 0$ (!) **d)** $x \geqq -2$ (!)

3. **a)** $x + y < 0$ **b)** $2x + 4y - 6 \geqq 0$
c) $-3x + 2y + 4 < 0$ **d)** $\frac{3}{2}x - \frac{6}{5}y - 1\frac{2}{5} > 0$

7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Eine Lösung eines Systems linearer Ungleichungen muss jede einzelne dieser Ungleichungen erfüllen. Sie muss also in jeder der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen enthalten sein und damit auch in der Schnittmenge dieser Lösungsmengen. Dazu

Beispiel 1: I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$ II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

ist ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Variablen. Eine Lösung dieses Systems muss sowohl der Lösungsmenge L_1 wie auch der Lösungsmenge L_{II} angehören, also Element der Schnittmenge $L_I \cap L_{II}$ sein. In der geometrischen Deutung ist die Lösungsmenge des Systems die Schnittmenge der beiden Halbebenen L_I und L_{II}. (Abbildung 179.1)

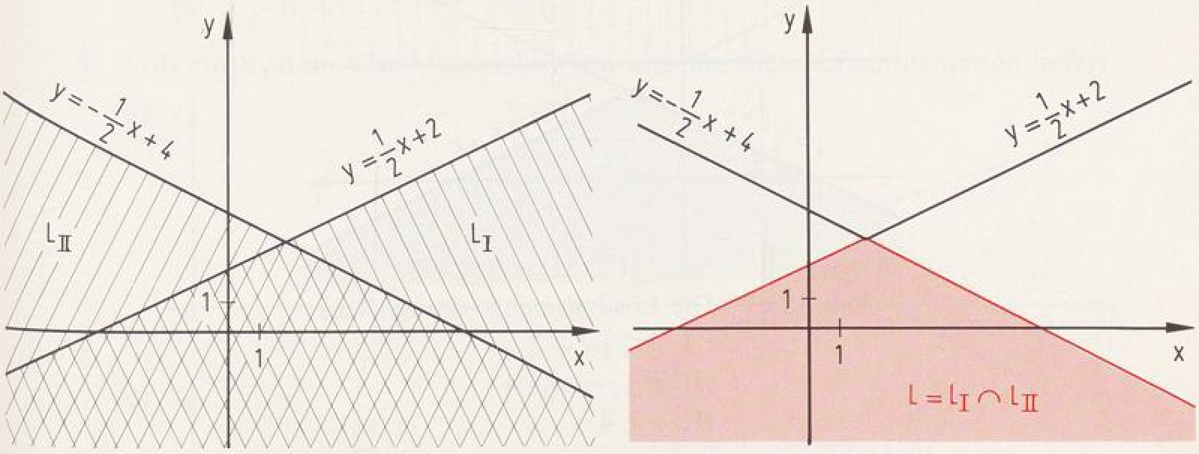


Abb. 179.1 Die Lösungsmenge des Systems von Beispiel 1 als Schnittmenge der Teil-Lösungsmengen

Auch bei einem System mit mehr als zwei Ungleichungen erhält man die Lösungsmenge als Schnittmenge aller Teil-Lösungsmengen, geometrisch als Schnittmenge aller Lösungs-Halbebenen. Es entsteht dabei entweder eine konvexe Polygonfläche* (siehe Abbildung 180.1) oder eine konvexe Punktmenge, die sich ins Unendliche erstreckt (siehe Abbildung 179.1) oder die leere Menge (siehe Abbildung 180.2).

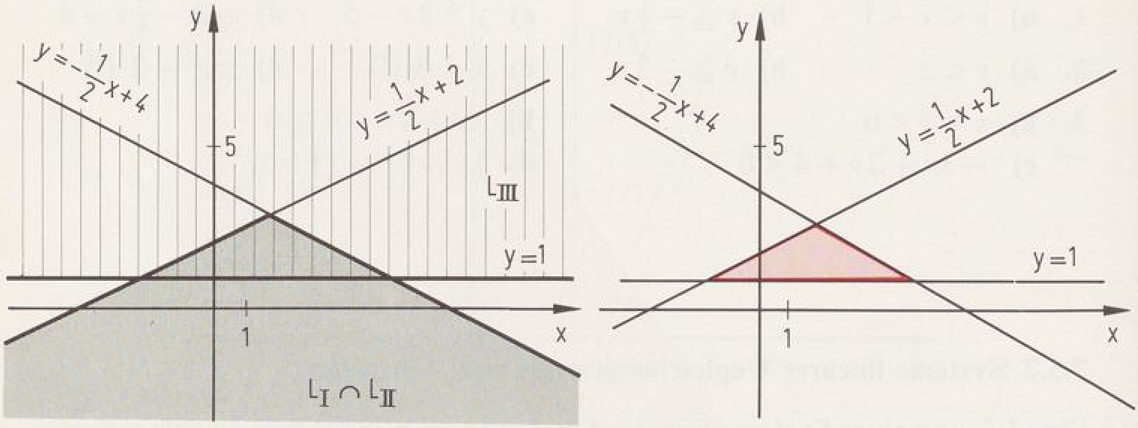


Abb. 180.1 Die Lösungsmenge des Systems
I $y \leqq \frac{1}{2}x+2$
II $y \leqq -\frac{1}{2}x+4$
III $y \geqq 1$
ist die rote Dreiecksfläche.

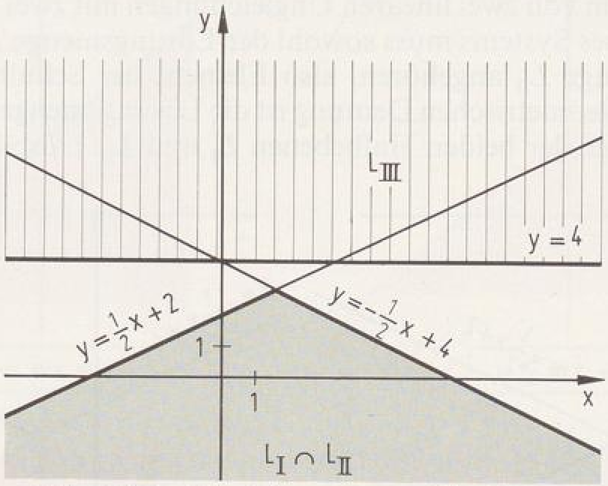


Abb. 180.2 Die Lösungsmenge des Systems
I $y \leqq \frac{1}{2}x+2$
II $y \leqq -\frac{1}{2}x+4$
III $y \geqq 4$
ist leer.

* Aus πολύς (polýs) = *viel* und dem ionischen ἡ γωνία (he gonía) = der *Winkel, die Ecke* wurde in nachklassischer Zeit, d. h. nach 300 v. Chr., das Kunstwort τὸ πολύγωνον (to polýgonon) = *das Vieleck* geprägt. *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

Je mehr Ungleichungen das System hat, desto mehr Ecken hat im Normalfall die entstehende Polygonfläche. Dazu

Beispiel 2:

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$
II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$
III $y \leqq -x + 6$
IV $y \geqq 0$
V $x \geqq 0$

Die Lösungsmenge, eine Fünfecksfläche, zeigt Abbildung 181.1.

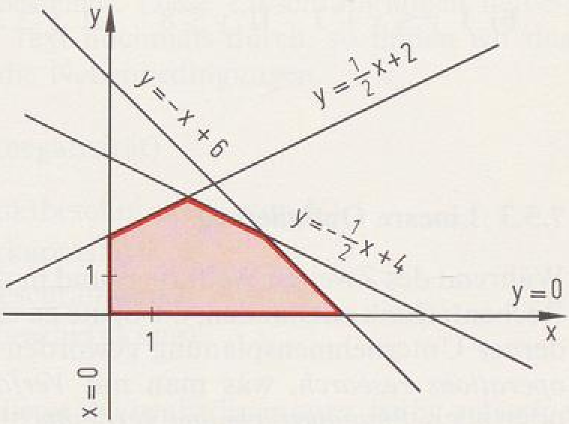


Abb. 181.1 Zum Beispiel 2

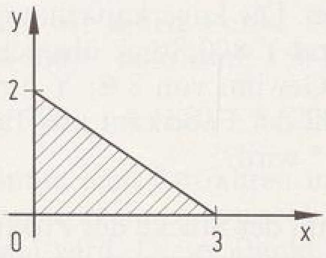
Aufgaben

1. **a)** I $y \leqq 3x + 5$ II $y \geqq -2x$
b) I $x + y \geqq 0$ II $x - y \leqq 0$
c) I $2x - y + 3 < 0$ II $-3x + 5y < 10$
d) I $-x + 2y \leqq 2$ II $x - y > 3$

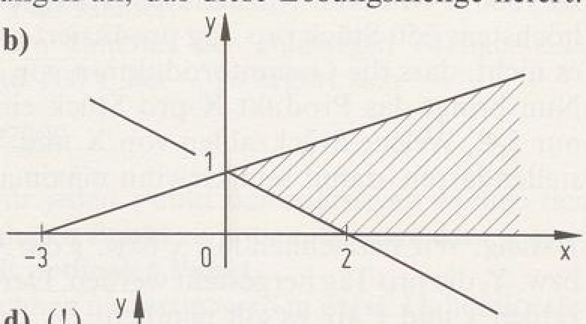
2. **a)** I $y \leqq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ II $y \geqq -x - 1$ III $y \geqq x$
b) I $2x - y + 2 \geqq 0$ II $x - 2y - 2 \leqq 0$ III $y + 3 \geqq 0$
c) I $y \leqq 2x + 6$ II $3y \leqq -4x + 12$ III $y \leqq -\frac{1}{3}x$
IV $y \geqq -6$ V $x \leqq 6$
d) I $y + x - 2 \geqq 0$ II $y - 2x + 10 \geqq 0$ III $3y - x + 18 \leqq 0$
IV $y \geqq 0$ V $x \geqq 0$

3. Gib ein System von Ungleichungen an, das diese Lösungsmenge liefert.

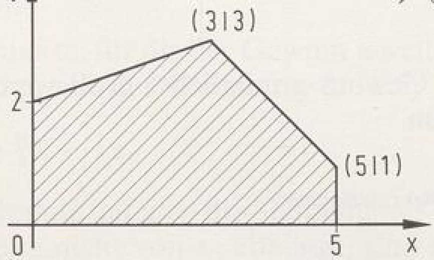
a)



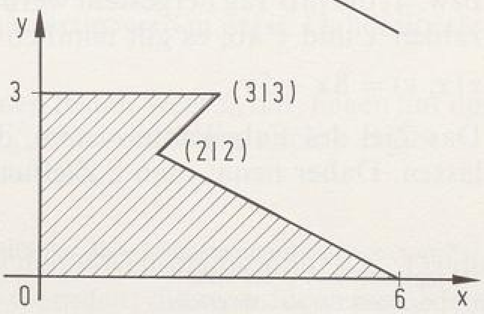
b)



c)



d) (!)



• **4.** Bestimme alle Lösungspunkte, deren Koordinaten natürliche Zahlen sind.
a) I $2x-y+2\geqq 0$ II $x-2y-2\leqq 0$ III $x+y-5\leqq 0$
b) I $y\leqq x+3$ II $y\leqq 8$ III $y\geqq 2x-4$ IV $y\geqq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ V $x\geqq 1$

7.5.3 Lineare Optimierung

Während des Zweiten Weltkriegs und in den darauf folgenden Jahren ist eine Rechentechnik entstanden, die heute zu einem sehr wichtigen Hilfsmittel moderner Unternehmensplanung geworden ist. Im Englischen nannte man sie *operations research*, was man mit *Verfahrensforschung*, *Verfahrensplanung* oder auch *Planungsrechnung* verdeutschte. G. B. Dantzig hat im Wesentlichen dieses neue Gebiet der Mathematik begründet; er nannte es 1949 *Lineares Programmieren*, da man schematisch mittels so genannter Programme* Lösungen von linearen Gleichungen und Ungleichungen sucht. Heute spricht man lieber von *linearer Optimierung***, weil man im Grunde die beste aller möglichen Lösungen sucht. Zur Verdeutlichung und Einführung betrachten wir das einfache, aber doch schon genügend aussagekräftige

Beispiel 1:

Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Produkte X und Y her. Für die Anfertigung von einem Stück X benötigt man 5 Std. und verbraucht Material im Wert von 5 €, wohingegen ein Y Material im Wert von 0,60 € und eine Herstellungszeit von 6 Std. benötigt. Pro Tag können bis zu 4000 Arbeitsstunden von der Belegschaft geleistet werden. Der Finanzplan erlaubt es, täglich bis zu 1500 € Material einzukaufen. Aus technischen Gründen können von Y höchstens 550 Stück pro Tag produziert werden. Die Lagerkapazität erlaubt es nicht, dass die Gesamtproduktion von X und Y 800 Stück überschreitet. Nun bringt das Produkt X pro Stück einen Gewinn von 8 €, Y hingegen nur 5 €. Welche Stückzahlen von X und Y soll der Fabrikant pro Tag herstellen lassen, damit sein Gewinn maximal *** wird?

Lösung: Wir bezeichnen mit x bzw. y die Anzahl der Stücke des Produkts X bzw. Y, die pro Tag hergestellt werden. Der Gewinn z hängt von diesen Stückzahlen x und y ab; es gilt nämlich

$$z(x, y) = 8x + 5y.$$

Das Ziel des Fabrikanten ist es, den Gewinn z möglichst groß werden zu lassen. Daher nennt man z **Zielfunktion**.

* *τὸ πρόγραμμα* (to prógramma) = die schriftliche Bekanntmachung
** optimus (lat.) = der beste
*** maximus (lat.) = der größte

Man erkennt unmittelbar, dass z umso größer wird, je größer x und y werden. Nun können aber x und y nicht beliebig wachsen, da für sie technische und wirtschaftliche Einschränkungen bestehen. Diese Einschränkungen heißen **Nebenbedingungen**. Lesen wir den Text nochmals durch, so finden wir das folgende Ungleichungssystem für die Nebenbedingungen.

I	$x \geqq 0$	(Nichtnegativität)
II	$y \geqq 0$	
III	$y \leqq 550$	(Produktbeschränkung von Y)
IV	$x + y \leqq 800$	(Lagerkapazität)
V	$5x + 6y \leqq 4000$	(Zeitbeschränkung)
VI	$5x + 0{,}6y \leqq 1500$	(Geldbeschränkung)

Die Lösungsmenge des Systems dieser Nebenbedingungen heißt **zulässige Menge**. Aufgrund der Überlegungen des vorigen Abschnitts erhält man die zulässige Menge als Schnittmenge der Lösungshalbebenen der Ungleichungen I–VI. Abbildung 184.1 zeigt die zulässige Menge als Fünfecksfläche OABCD. Für die Eckpunkte errechnet man die Koordinaten

O(0|0), A(0|550), B(140|550), C($244\frac{4}{9}$|$462\frac{26}{27}$) und D(300|0).

Jetzt kann man für jeden Punkt aus der zulässigen Menge den Gewinn z berechnen. So erhält man z. B. für A (man stellt nur das Produkt Y her)

$$z(0;\ 550) = 8 \cdot 0 + 5 \cdot 550 = 2750$$

und für D (man stellt nur das Produkt X her)

$$z(300;\ 0) = 8 \cdot 300 + 5 \cdot 0 = 2400.$$

Der Gewinn ist also im letzteren Fall kleiner.
Wählen wir einen Punkt aus dem Inneren der zulässigen Menge, z. B. P(150|200) – man stellt 150X und 200Y her –, so ergibt sich

$$z(150;\ 200) = 8 \cdot 150 + 5 \cdot 200 = 2200.$$

So könnte man fortfahren und für jeden Punkt der zulässigen Menge den Gewinn ausrechnen, um schließlich den Punkt zu finden, bei dem der Gewinn maximal wird. Dieser Punkt heißt **optimaler Punkt**.
Es ist klar, dass du mit dem Ausrechnen nie fertig werden wirst. Daher überlegen wir:
Die Punkte, für die der Gewinn jeweils einen festen Wert z_0 hat, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $8x + 5y = z_0$. Die Auflösung nach y ergibt

$$y = -\tfrac{8}{5}x + \tfrac{1}{5}z_0.$$

Die Gerade hat also die Steigung $-\frac{8}{5}$ und den y-Achsenabschnitt $\frac{1}{5}z_0$. Da die Steigung nicht von z_0 abhängt, sind alle Geraden, die man für verschiedene

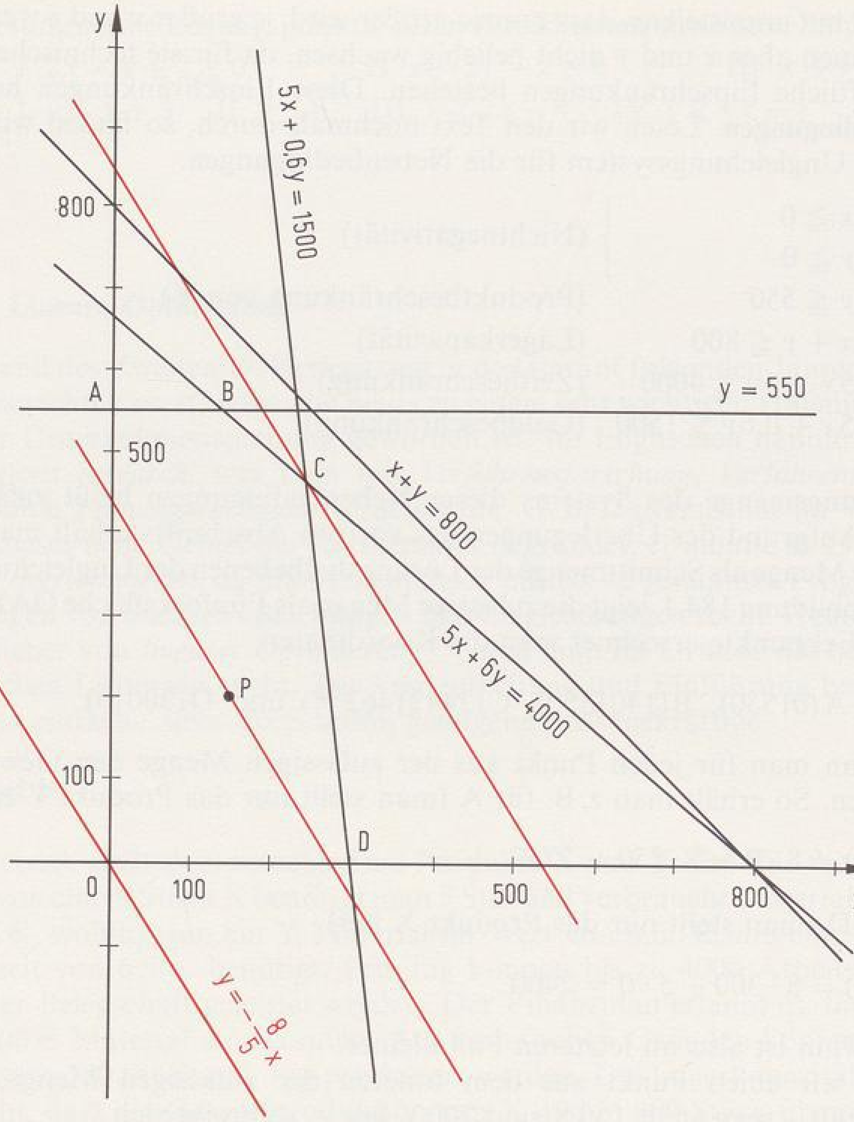


Abb. 184.1 Die zulässige Menge des Systems der Nebenbedingungen

Werte von z_0 erhält, zueinander parallel. Darüber hinaus erkennen wir, dass bei größtem Gewinn der y-Achsenabschnitt am größten ist (und umgekehrt).

Wir müssen also aus unserer Parallelenschar diejenige Gerade bestimmen, die die zulässige Menge gerade noch trifft und dabei einen möglichst großen y-Achsenabschnitt besitzt.

Zeichnerisch kann man wie folgt vorgehen. Man verschiebt die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{8}{5}x$ so weit parallel nach oben, bis sie die zulässige Menge gerade noch trifft. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Die Gerade trifft die zulässige Menge in einem Eckpunkt oder sie trifft sie in einer ganzen Polygonseite. Im ersten Fall gibt es genau einen optimalen Punkt; im zweiten Fall ist jeder Punkt dieser Seite ein optimaler Punkt, es gibt also unendlich viele solcher optimalen Punkte. In unserem Beispiel gibt es genau einen optimalen Punkt, weil keine Polygonseite die Steigung $-\frac{8}{5}$ hat.

Rechnerisch bestimmt man den optimalen Punkt nun so, dass man für alle Eckpunkte – denn diese kommen nach dem Obigen als optimale Punkte in Frage – den Gewinn z errechnet. Der Eckpunkt mit dem größten z ist der optimale Punkt. Gibt es aber zwei Eckpunkte mit größtem z, dann ist die ganze Verbindungsstrecke optimal.
Für unser Fünfeck OABCD erhalten wir

O: $z(0; 0) = 0$,
A: $z(0; 550) = 2750$, B: $z(140; 550) = 3870$,
C: $z(244\frac{4}{9}; 462\frac{26}{27}) = 4270\frac{10}{27}$, D: $z(300; 0) = 2400$.

Man erkennt: C ist der optimale Punkt.
Wenn der Produktionsprozess auch die Herstellung von Teilen von Produkten zulässt, dann sind wir fertig. Der Fabrikant wird dann pro Tag $244\frac{4}{9}$ »Stück« von X und $462\frac{26}{27}$ »Stück« von Y herstellen lassen, um den maximal möglichen Gewinn von $4270\frac{10}{27}$ € zu erzielen.

Wenn aber nur ganze Produkte möglich sind, dann müssen wir die Gerade durch den optimalen Punkt C so weit nach unten parallel verschieben, bis sie zum ersten Mal auf einen Gitterpunkt trifft. Dieser ist dann der optimale Gitterpunkt, der die Lösung für das ganzzahlige Problem liefert. In unserem Beispiel ist $G(244|463)$ der optimale Gitterpunkt (Abbildung 186.1).
Der Fabrikant wird jetzt pro Tag 244 Stück von X und 463 Stück von Y herstellen lassen, um den maximal möglichen Gewinn von 4267 € erzielen zu können.

Ein Blick auf Abbildung 184.1 zeigt übrigens, dass die Nebenbedingung IV für die Lagerkapazität ($x + y \leqq 800$) überflüssig ist, weil sie die zulässige Menge nicht beeinflusst.

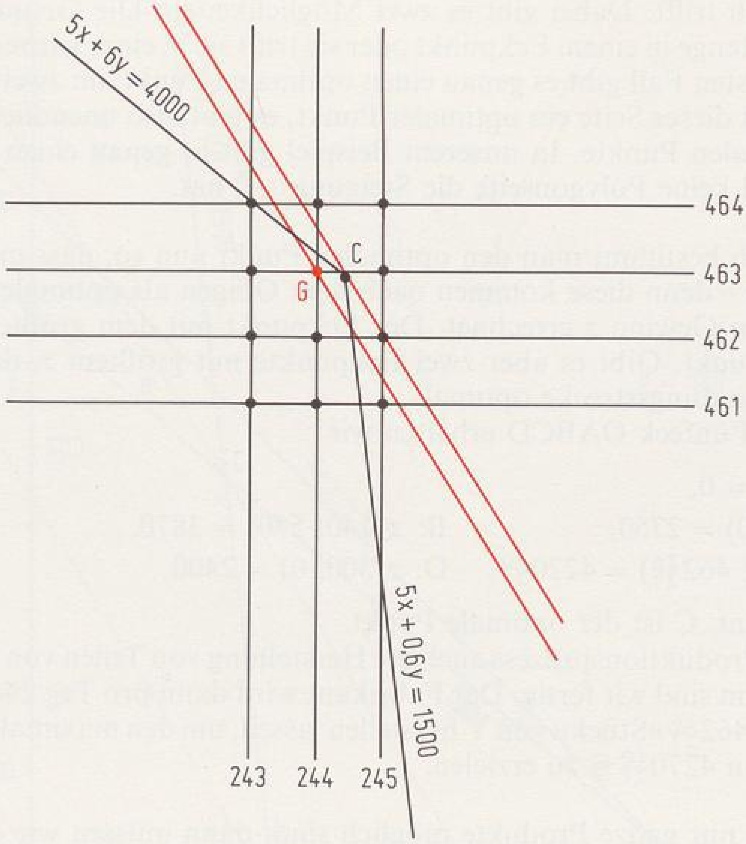


Abb. 186.1 Auffinden des optimalen Gitterpunkts

Aufgaben

1. Durch die Nebenbedingungen
I $x \geqq 0$ II $y \geqq 0$ III $x + 2y \leqq 12$ IV $3x + y \leqq 11$ V $x \leqq 3$
VI $x + 2y \geqq 2$
wird eine zulässige Menge beschrieben. Bestimme für die angegebene Zielfunktion z den optimalen Punkt, sodass dort z maximal wird. Wie groß ist das Maximum?
a) $z = x + 4y$ **b)** $z = x + y$ **c)** $z = 3x + y$ • **d)** $z = x - 2y$

2. Bei manchen Fragestellungen sucht man nicht denjenigen Punkt, bei dem die Zielfunktion maximal wird, sondern denjenigen, bei dem sie minimal* wird. (So wird man z. B. bei einem Geschäft versuchen, den Verlust zu minimieren.) Löse nun Aufgabe **1** so, dass die Zielfunktion im optimalen Punkt ihr Minimum annimmt.

* minimus (lat.) = der kleinste

3. Die Nebenbedingungen

I $x \geqq 0$ II $y \geqq 0$ III $x + 2y \geqq 12$ IV $3x + y \geqq 11$ V $x \leqq 3$

legen eine zulässige Menge fest. In welchen Punkten werden die Zielfunktionen aus Aufgabe **1**

a) maximal, **b)** minimal?

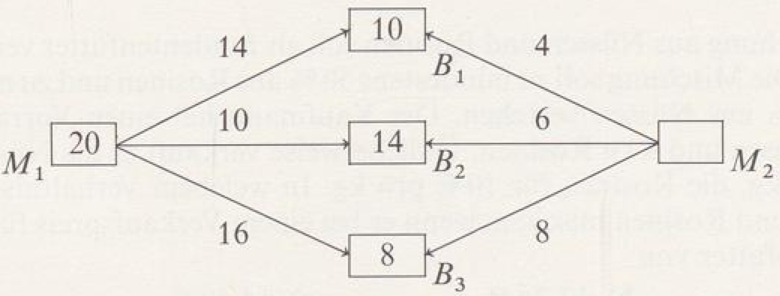
4. Eine Fabrik stellt ein Gerät in 2 Ausführungen her. Je nach Ausführung ist die Zusammensetzung der zur Herstellung verwendeten Materialien verschieden, wie die nachstehende Tabelle zeigt; diese gibt auch an, über welche Vorräte in kg die Fabrik verfügt.

Material	Typ 1	Typ 2	Vorrat
a	8	12	620
b	10	4	390
c	5	10	500
d	4	0	140

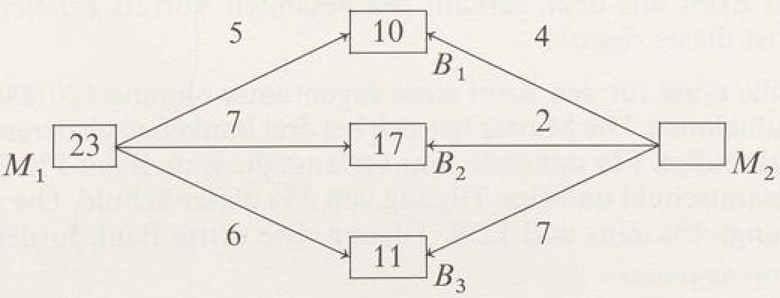
Wie viele Geräte müssen von jedem Typ hergestellt werden, damit die Gesamtzahl maximal wird?

5. Eine Großbäckerei mit drei Backstuben in verschiedenen Orten bezieht Mehl von zwei Mühlen. Im nachstehenden Diagramm ist neben der Tagesproduktion der ersten Mühle der Tagesbedarf der Backstuben, jeweils in t, eingetragen. Die Tagesproduktion der ersten Mühle wird vollständig an die drei Backstuben ausgeliefert; die zweite Mühle liefert den Rest. Auf den Pfeilen sind die Frachtkosten in € je t verzeichnet. Wie viel t Mehl muss jede Mühle an jede Backstube liefern, damit die Frachtkosten für die Großbäckerei minimal werden? Wie hoch sind sie?

a)



b)



c) Was ergibt sich bei Aufgabe **b**, wenn M_1 aufgrund eines alten Vertrags an B_2 mindestens so viel liefern muss wie an B_1?

d) Was ergibt sich bei Aufgabe **b**, wenn zusätzlich zur Bedingung aus **c** eine weitere Vertragsklausel vorschreibt, dass die Lieferung von M_1 an B_1 zusammen mit dem Doppelten der Lieferung an B_2 mindestens 24 t betragen muss?

6. Ein Bioladen hat 210 kg Haferflocken, 180 kg Rosinen und 240 kg Trockenäpfel lagern. Daraus werden zwei Sorten Müsli gemischt, und zwar einmal im Verhältnis 4 : 5 : 6, das andere Mal im Verhältnis 2 : 1 : 2. Welche Menge muss der Ladenbesitzer von jeder Sorte herstellen, um den größtmöglichen Verdienst zu erzielen, wenn er an 1 kg der ersten Sorte

a) 9 € **b)** 12 €

und an 1 kg der zweiten Sorte jeweils 10 € verdient?
Wie groß ist in jedem Fall sein Verdienst?

7. Für jeden Teilnehmer einer Expedition soll eine »eiserne Ration« aus Vollkornbrot, Wurst und Schokolade zusammengestellt werden. Sie muss genau 160 g Eiweiß und mindestens 360 g Kohlenhydrate und darf höchstens 100 g Fett enthalten. Es gilt folgende Tabelle:

je 100 g enthalten	g Kohlenhydrate	g Fett	g Eiweiß
Vollkornbrot	45	5	20
Wurst	10	20	30
Schokolade	60	10	10

Aus wie viel Gramm von jedem Nahrungsmittel muss die eiserne Ration bestehen, damit ihr Gesamtgewicht möglichst klein bleibt? Wie viel wiegt sie?

8. Eine Mischung aus Nüssen und Rosinen soll als Studentenfutter verkauft werden. Die Mischung soll zu mindestens 50 % aus Rosinen und zu mindestens 30 % aus Nüssen bestehen. Der Kaufmann hat einen Vorrat von 10 kg Nüssen und 5 kg Rosinen. Üblicherweise verkauft er die Nüsse für 25 € pro kg, die Rosinen für 10 € pro kg. In welchem Verhältnis muss er Nüsse und Rosinen mischen, wenn er bei einem Verkaufspreis für 1 kg Studentenfutter von

a) 15 € **b)** 13,75 € **c)** 14,50 €

maximalen Erlös aus dem Verkauf des gesamten Vorrats erzielen will. Wie groß ist dieser dann?

9. Eine Familie muss für den Kauf einer Eigentumswohnung 120 000 € an Kredit* aufnehmen. Die Mutter hat sich bei drei Banken nach deren Konditionen erkundigt. Für das erste Jahr verlangt die erste Bank 5 % Zinsen auf die Gesamtschuld und eine Tilgung von 3 % dieser Schuld. Die zweite Bank verlangt 4 % Zins und 12 % Tilgung. Die dritte Bank fordert 6 %

* creditum (lat.) = das Anvertraute

Zins und eine Tilgung von 5 % und ist überdies nur bereit, einen Kredit zu gewähren, der mindestens 12 000 € beträgt. Die Beratung im Familienkreis ergibt, dass nur eine Belastung von höchstens 12 200 € pro Jahr verkraftet werden kann. Bei welcher Aufteilung des Kredits auf die drei Banken zahlt die Familie die wenigsten Zinsen? Wie hoch sind sie? Wie viel € werden getilgt?