Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

7.1 Ein graphisches Verfahren zur Lösung linearer Ungleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83513

7 Ungleichungen

7.1 Ein graphisches Verfahren zum Lösen linearer Ungleichungen

Dir ist bekannt, wie man die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mittels Äquivalenzumformungen bestimmt. Zur Erinnerung

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x - 6 &< 0 \quad \| + 6 \\ \tfrac{3}{2}x &< 6 \quad \| \cdot \tfrac{2}{3} \\ x &< 4, \quad \text{also} \quad L =]-\infty; 4[. \end{aligned}$$

Für viele Ungleichungen ist dieses Vorgehen das bequemste. Es gibt aber Ungleichungen, bei denen sich ein graphisches Verfahren lohnt, wie du im nächsten Abschnitt sehen wirst. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Überlegungen.
Du hast in **5.4** gelernt, dass $\frac{3}{2}x - 6$ der Term einer Funktion ist, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$ ist (Abbildung 166.1). Die Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ verlangt von uns, all diejenigen x-Werte zu suchen, für die die Funktionswerte negativ sind. Um sie zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstelle dieser Funktion, d. h. die Lösung der Gleichung $\frac{3}{2}x - 6 = 0$. Wir

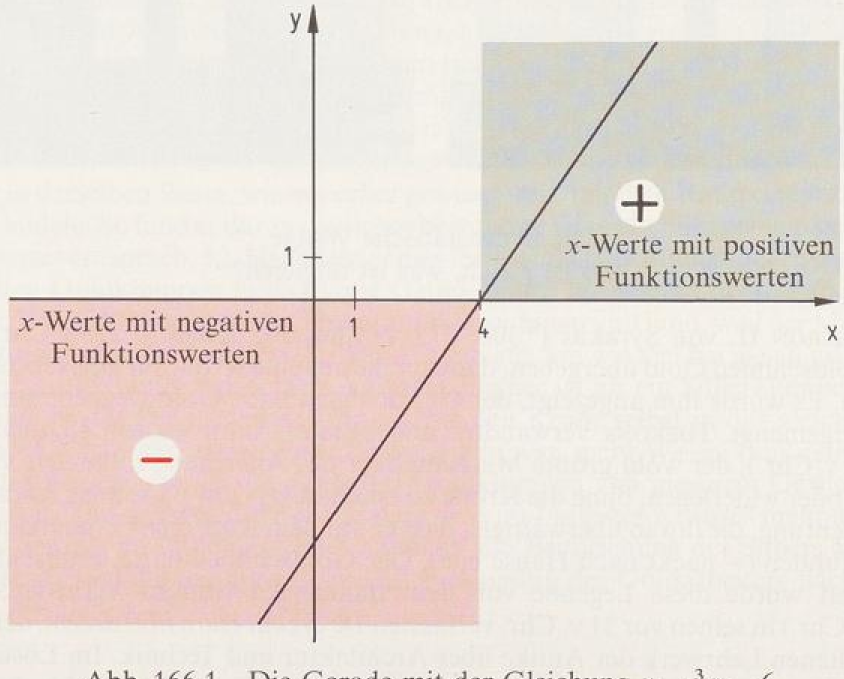


Abb. 166.1 Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$

erhalten $x = 4$. An dieser Stelle schneidet die Gerade die x-Achse. Da die Steigung der Geraden den Wert $\frac{3}{2}$ hat, also positiv ist, verläuft die Gerade von links unten nach rechts oben. Die Funktionswerte sind somit links von der Nullstelle 4 negativ, rechts davon positiv. Damit können wir die Lösungsmenge der Ungleichung direkt ablesen zu $L =]-\infty; 4[$.

Zur Lösung der Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ ist es aber gar nicht nötig, die Gerade zu zeichnen. Es genügt nämlich zu wissen, wo sie die x-Achse schneidet und welches Steigungsverhalten sie besitzt. Bei einer steigenden Geraden liegen die negativen Funktionswerte links von der Nullstelle und die positiven rechts davon; bei einer fallenden Geraden ist es genau umgekehrt. Diesen Sachverhalt geben wir durch Abbildung 167.1 wieder:

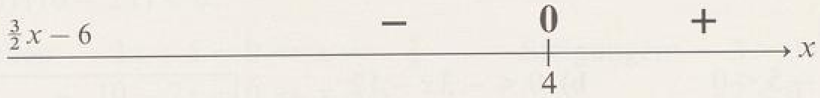


Abb. 167.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{3}{2}x - 6$

Aus ihr kann man die Lösungsmengen folgender vier Ungleichungen sofort ablesen.

$\frac{3}{2}x - 6 < 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4[$ $\quad$ $\frac{3}{2}x - 6 > 0 \Rightarrow L =]4; +\infty[$

$\frac{3}{2}x - 6 \leqq 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4]$ $\quad$ $\frac{3}{2}x - 6 \geqq 0 \Rightarrow L = [4; +\infty[$

Beim graphischen Verfahren zur Lösung von Ungleichungen löst man also durch Rechnen zunächst eine Gleichung und macht dann eine Zeichnung, aus der man die Lösungsmenge abliest. Zur Einübung ein weiteres Beispiel.

Beispiel 2:

$-7x + 13 \geqq 0$

Nullstelle: $-7x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{7}$

Steigung $= -7 < 0$

Die Vorzeichenverteilung gibt Abbildung 167.2 wieder. Aus ihr liest man ab, dass $L =]-\infty; \frac{13}{7}]$ ist.

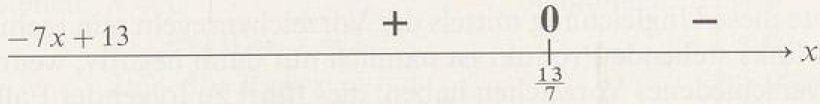


Abb. 167.2 Vorzeichenverteilung beim Term $-7x + 13$

Das graphische Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn eine Seite der Ungleichung den Wert null hat. Andernfalls muss man durch Äquivalenzumformungen erst eine solche **Nullform*** herstellen. Dazu

* Die erste Nullform einer Gleichung findet sich in der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487(?) bis 1567), folium 283r.
Systematisch führte die Nullform Thomas HARRIOT (1560–1621) ein. 1631 stellten Freunde, vor allem Walter WARNER, aus seinen hinterlassenen Manuskripten einen dünnen Band *Artis analyticae praxis, ad aequationes Algebraicas nova, expedita & generali methodo, resolvendas: tractatus* zusammen, der starken Einfluss auf René DESCARTES (1596–1650) ausübte. Wir erinnern daran, dass sich in diesem Werk zum ersten Mal die nicht von HARRIOT erfundenen Symbole $<$ und $>$ finden. Walter WARNER hat HARRIOTS handschriftliche

Beispiel 3:

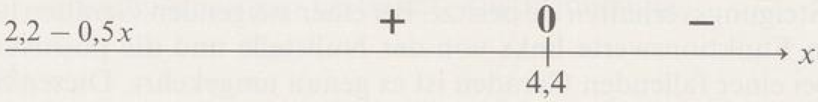
$$0{,}3 - 3{,}2x < -2{,}7x - 1{,}9 \quad \| + 2{,}7x + 1{,}9$$

$$2{,}2 - 0{,}5x < 0$$

Nullstelle: $2{,}2 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}4$

Steigung $= -0{,}5 < 0$

$L =]4{,}4; +\infty[$.



Aufgaben

1. **a)** $2x - 5 < 0$ **b)** $0 < -3x - 12$

2. **a)** $3\frac{1}{3} - \frac{5}{9}x > 0$ **b)** $0 > -2\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{8}$

3. **a)** $5{,}6x - 0{,}49 \geqq 0$ **b)** $0 \leqq 1 - 0{,}001x$

4. **a)** $3x - 12 < 4 - 3(1 - (1 - x))$

b) $8\frac{1}{4}x + 3(-\frac{1}{12}x + \frac{4}{9}) \geqq 4\frac{1}{4}x - 6(\frac{11}{24} - \frac{11}{24}x)$

5. **a)** $(2x - \frac{1}{2})^2 > 2x(2x - 1)$

b) $(0{,}3 - 2x)(0{,}3 + 2x) < 0{,}09 - 4x^2$

Abb. 168.1 Unterschrift HARRIOTS im Brief an KEPLER vom 13. 7. 1608

7.2. Produktungleichungen

Das graphische Lösungsverfahren von **7.1** bewährt sich besonders bei Produktungleichungen. Unter einer **Produktungleichung** verstehen wir eine Ungleichung, deren eine Seite ein Produkt und deren andere Seite null ist. Ein **Beispiel** hierfür ist

$$(3x + 5)(10 - 2x) < 0.$$

Man könnte diese Ungleichung mittels der Vorzeichenregeln rein rechnerisch lösen. Das links stehende Produkt ist nämlich nur dann negativ, wenn beide Faktoren verschiedenes Vorzeichen haben; dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

(1. Faktor positiv **und** 2. Faktor negativ)

oder

(1. Faktor negativ **und** 2. Faktor positiv) d.h.

Zeichen $\lessdot$ und $\gtrdot$ drucktechnisch zu < und > vereinfacht. – Sir Walter RALEIGH sandte 1585 HARRIOT nach Amerika, wo er North-Carolina erforschte und kartographierte. Nach seiner Rückkehr nach England (1587) tat er sich als Astronom hervor, der mit Johannes KEPLER (1571–1630) korrespondierte; er beobachtete die Sonnenflecken und 1610 nach Galileo GALILEI (1564–1642) die Jupitermonde.

Erst 1734 verband Pierre BOUGUER (16. 2. 1698 Croisic/Bretagne – 15. 8. 1758 Paris) die Zeichen WARNERS mit dem Gleichheitszeichen des Robert RECORD(E) (1510(?) – 1558) zu den Symbolen $\leqq$ und $\geqq$. BOUGUER war einer der Geodäten, die Frankreich 1735 zur Vermessung eines Meridianbogens nach Peru sandte.