Algebra

Barth, Friedrich

München, 1999

7.2 Produktungleichungen

Beispiel 3:

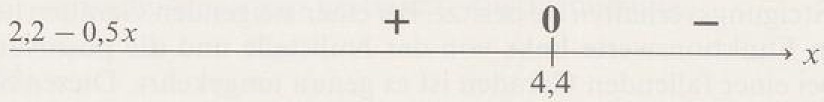
$0{,}3 - 3{,}2x < -2{,}7x - 1{,}9 \quad \| + 2{,}7x + 1{,}9$

$2{,}2 - 0{,}5x < 0$

Nullstelle: $2{,}2 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}4$

Steigung $= -0{,}5 < 0$

$L =]4{,}4; +\infty[$.



Aufgaben

Abb. 168.1 Unterschrift HARRIOTS im Brief an KEPLER vom 13. 7. 1608

1. **a)** $2x - 5 < 0$ **b)** $0 < -3x - 12$
2. **a)** $3\frac{1}{3} - \frac{5}{9}x > 0$ **b)** $0 > -2\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{8}$
3. **a)** $5{,}6x - 0{,}49 \geqq 0$ **b)** $0 \leqq 1 - 0{,}001x$
4. **a)** $3x - 12 < 4 - 3(1 - (1 - x))$
   b) $8\frac{1}{4}x + 3(-\frac{1}{12}x + \frac{4}{9}) \geqq 4\frac{1}{4}x - 6(\frac{11}{24} - \frac{11}{24}x)$
5. **a)** $(2x - \frac{1}{2})^2 > 2x(2x - 1)$
   b) $(0{,}3 - 2x)(0{,}3 + 2x) < 0{,}09 - 4x^2$

7.2. Produktungleichungen

Das graphische Lösungsverfahren von **7.1** bewährt sich besonders bei Produktungleichungen. Unter einer **Produktungleichung** verstehen wir eine Ungleichung, deren eine Seite ein Produkt und deren andere Seite null ist. Ein **Beispiel** hierfür ist

$$(3x + 5)(10 - 2x) < 0.$$

Man könnte diese Ungleichung mittels der Vorzeichenregeln rein rechnerisch lösen. Das links stehende Produkt ist nämlich nur dann negativ, wenn beide Faktoren verschiedenes Vorzeichen haben; dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

(1. Faktor positiv **und** 2. Faktor negativ)

oder

(1. Faktor negativ **und** 2. Faktor positiv) d.h.

Zeichen ≮ und ≯ drucktechnisch zu < und > vereinfacht. – Sir Walter RALEIGH sandte 1585 HARRIOT nach Amerika, wo er North-Carolina erforschte und kartographierte. Nach seiner Rückkehr nach England (1587) tat er sich als Astronom hervor, der mit Johannes KEPLER (1571–1630) korrespondierte; er beobachtete die Sonnenflecken und 1610 nach Galileo GALILEI (1564–1642) die Jupitermonde.
Erst 1734 verband Pierre BOUGUER (16. 2. 1698 Croisic/Bretagne – 15. 8. 1758 Paris) die Zeichen WARNERS mit dem Gleichheitszeichen des Robert RECORD(E) (1510(?) – 1558) zu den Symbolen ≦ und ≧. BOUGUER war einer der Geodäten, die Frankreich 1735 zur Vermessung eines Meridianbogens nach Peru sandte.

$$((3x+5>0) \wedge (10-2x<0)) \vee ((3x+5<0) \wedge (10-2x>0))$$
$$(x>-\tfrac{5}{3} \wedge x>5) \;\vee\; (x<-\tfrac{5}{3} \wedge x<5)$$
$$x>5 \;\vee\; x<-\tfrac{5}{3}$$
$$L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\;\cup\;]5; +\infty[$$

Dieses rein rechnerische Verfahren ist aufwendig und auch unübersichtlich. Einfacher findet man die Lösungsmenge mit dem graphischen Verfahren. Dazu berechnet man für jeden Faktor zuerst die Nullstelle, zeichnet dann die dazugehörige Vorzeichenverteilung und ermittelt über die Vorzeichenregeln die Vorzeichenverteilung des Produkts, aus der man die Lösungsmenge abliest. Betrachten wir nochmals die Produktungleichung

$(3x+5)(10-2x)<0$.

Nullstellen: $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\tfrac{5}{3}$ Steigungen: $3>0$

$10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$ $-2<0$

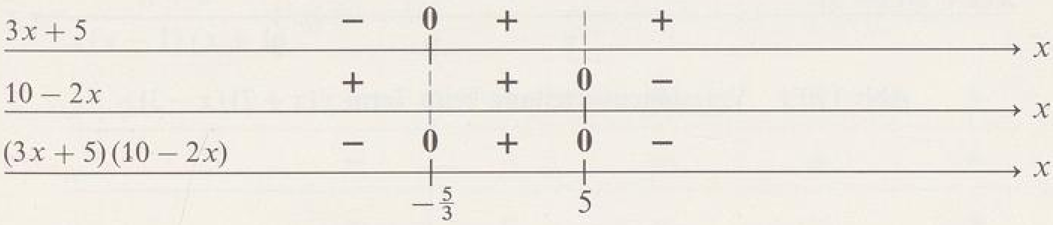


Abb. 169.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+5)(10-2x)$

Aus Abbildung 169.1 liest man ab $L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\;\cup\;]5; +\infty[$

Das graphische Verfahren lässt sich im Gegensatz zum rechnerischen Verfahren mit Leichtigkeit auch auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren übertragen. Hierzu ein

Beispiel: $x(1-x)(2x+8) \geqq 0$

Nullstellen: $x=0$ Steigungen: $1>0$

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ $-1<0$

$2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ $2>0$

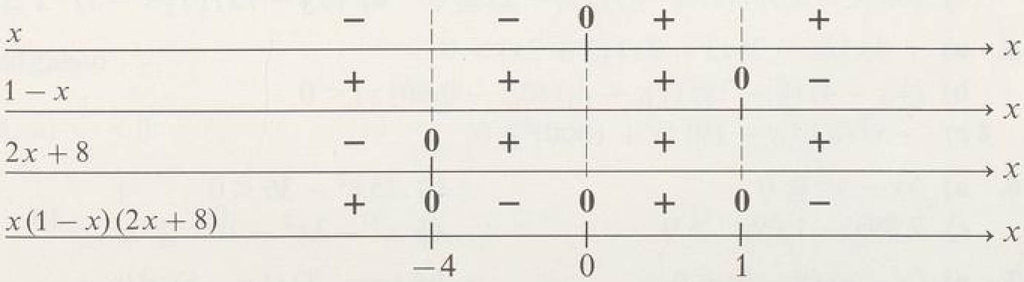


Abb. 169.2 Vorzeichenverteilung beim Term $x(1-x)(2x+8)$

Aus Abbildung 169.2 liest man ab $L =]-\infty; -4] \cup [0; 1]$

Wenn eine Ungleichung nicht in Produktform vorliegt, dann kann man sie manchmal durch Faktorisieren in Produktform bringen und lösen.
Dazu ein

Beispiel: $x^3 + 4x^2 - 21x > 0$
$x(x^2 + 4x - 21) > 0$
$x(x+7)(x-3) > 0 \qquad L =]-7; 0[\cup]3; +\infty[$

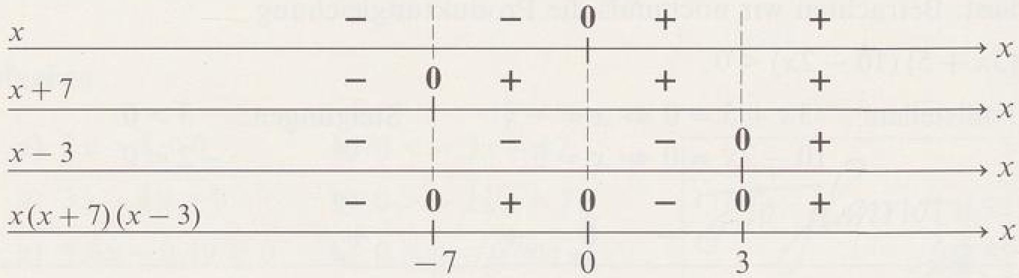


Abb. 170.1 Vorzeichenverteilung beim Term $x(x+7)(x-3)$

Aufgaben

1. **a)** $(x-2)(x-5) < 0$ **b)** $x(x-\frac{1}{3}) > 0$
c) $(x+1)(x-1) \leqq 0$ **d)** $(x+2)(-x+4) \geqq 0$

2. **a)** $(x+2)^2 > 0$ **b)** $(-x-7)^2 < 0$
c) $(x+3)^2 \geqq 0$ **d)** $(-x+7)^2 \leqq 0$
e) $(x+1)^3 > 0$ **f)** $(x-3)^3 < 0$

3. **a)** $\frac{1}{2}(2x+6)(x+3) < 0$ **b)** $5(3x+1)(2x-5) > 0$
c) $-3(\frac{1}{2}x-2)(-\frac{1}{3}x-3) \leqq 0$ **d)** $-(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}) \geqq 0$

4. **a)** $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ **b)** $3x(2x+9)(-x+7) < 0$
c) $(0{,}1x - 0{,}01)(1{,}2 - x)(1{,}2 + x) \geqq 0$ **d)** $(3\frac{1}{2} - 7x)(3\frac{1}{2}x - 7) \cdot x \leqq 0$

• **5.** **a)** $-4x(2x-3)(3-2x)(3+2x) > 0$
b) $(\frac{1}{2}x-4)(\frac{4}{3}-2x)(\frac{3}{5}x+\frac{1}{10})(0{,}1-0{,}001x) < 0$
: **c)** $-x^2(0{,}01x+10)(x+1000) \geqq 0$

6. **a)** $3x - x^2 \geqq 0$ **b)** $25x^2 - 36 < 0$
c) $2{,}89x - 1{,}69x^3 > 0$ **d)** $x^3 - 3x^2 - 10x \leqq 0$

: **7.** **a)** $(x-a)(x-b) < 0$ **b)** $(ax-1)(bx-b) > 0$
c) $-x(a-x)(b+x)^2 \geqq 0$ **d)** $-(a^2x^2 - b^4)(ax+b^2) < 0$